Organization of the process of geometrical tasks drawing teaching to develop students' cognitive activity

***Elena Evgen'evna Alekseeva**, Teacher*

The article substantiates the need of development of universal educational actions during the teaching of mathematics at the main step of the general education. There is formulated the problem of the organization of process of the teaching of geometry aimed at the development of informative actions of pupils. The teaching of drawing up geometrical tasks on the basis of the text of task's situation is considered as one of solutions to this problem.

Keywords – drawing up geometrical tasks, text of a task's situation, informative actions, universal educational actions, standard, condition, requirement.

УДК 372:851

НАУЧНЫЕ ОСНОВЫ ШКОЛЬНОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ В ОБУЧЕНИИ

***Людмила Ивановна Боженкова**, д.п.н., профессор кафедры элементарной математики методики обучения математике*
Тел.: 8 917 521 6362, e-mail: krasel1@yandex.ru
ФГБОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет»
http://emmom.ru

Научными основами школьного курса геометрии являются теории и методы высшей геометрии. В статье рассматривается проблема их актуализация в обучении геометрии. Это способствует достижению планируемых результатов освоения учащимися геометрии.

Ключевые слова: школьный курс геометрии, Федеральный государственный образовательный стандарт, обучение геометрии, планируемые результаты.

В соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами основного и среднего (полного) общего образования (Стандарт) в число требований к предметным результатам освоения обучающимися образовательной программы относится формирование научного типа мышления, научных представлений о ключевых теориях изучаемой области знаний[1]. Геометрия – «землемерие» – как наука далеко ушла от тех задач, которые дали ей это название. В ходе её развития, идущего от Евклида, появились проективная и аффинная геометрии, топология, где нет речи о привычных для учеников геометрических величинах. Эти идеи мало отражены в учебном содержании школьного курса геометрии. Реализации требования, указанного в Стандарте, будет способствовать деятельность учителя, направленная на актуализацию научных основ в процессе обучения геометрии, которые не осознаются субъектами процесса обучения геометрии.

Л.И. Боженкова

Идейными научными основами школьного курса геометрии являются: учение о геометрических величинах; теория геометрических построений; теория геометрических преобразований; аналитическая геометрия; аксиоматический метод; методы изображений. Эти фундаментальные теории и методы отражаются в школьном курсе геометрии в следующих *содержательных линиях*: геометрические фигуры, их свойства и изображение (в стереометрии); геометрические величины; геометрические построения; геометрические преобразования; методы аналитической геометрии; аксиоматический ме-

[1] Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования/ МО и науки Российской Федерации. – М.: Просвещение, 2011. – 48 с.

тод в геометрии. Анализ результатов анкетирования учителей, направленный на выявление их знаний о научных основах школьного курса геометрии, показал, что некоторые содержательные линии и их базовые основы осознаются учителями недостаточно. Например, указали линии: геометрических величин (40% учителей), геометрических построений (30%), геометрических преобразований (12%), методов изображений (1%), в то время как основные содержательные линии школьного курса алгебры перечислили большинство учителей [1].

В процессе подготовки к обучению учащихся определённым темам учителю необходимо учесть эти линии при создании информационной основы обучения. Следует предусмотреть знакомство учеников с научными основами курса геометрии через выполнение ими индивидуальных заданий, выбираемых в соответствии с предпочтениями и интересами, что будет способствовать достижению планируемых результатов, реализации предпрофильной и профильной дифференциации. Рассмотрим кратко организацию актуализации отдельных содержательных линий [1].

1. Измерение геометрических величин

Школьный курс геометрии по содержанию и по изложению представлен, большей частью, метрической геометрией. Я.С. Дубнов, видный советский математик и выдающийся педагог отмечал, что учитель «должен с особой тщательностью изучить научную теорию измерения, чтобы быть в состоянии разрешить основную методическую задачу: найти равнодействующую между требованиями науки и интеллектуальными ресурсами ученика» [2].

Таблица 1

Систематизационная таблица определений и свойств геометрических величин

	Длина отрезка	**Величина угла**	**Площадь фигуры**	**Объём тела**
Мера	Единичный отрезок	Угол в 1°	Единичный квадрат	Единичный куб
Определение	Положительное число, показывающее сколько раз единичный отрезок и его части укладывается в данном отрезке	Градусная величина угла показывает, сколько раз угол в 1° и его части укладываются в этом угле	Положительное число, показывающее сколько раз единичный квадрат и его части укладываются в данной фигуре	Положительное число, показывающее, сколько раз единица измерения объёма укладывается в данной фигуре
1. нормированность	Отрезок, имеющий длину, равную одной единице – единичный отрезок, принимается за единицу измерения отрезков (1м, 1см, 1мм)	Угол, имеющий величину равную единице измерения углов (1°), принимается за единицу измерения углов	Квадрат со стороной равной единице измерения длины – единичный квадрат, принимается за единицу измерения площади	Куб, ребро которого равно единице измерения длины, принимается за единицу объёма
2. инвариантность	Длина отрезка не зависит от его положения (равным отрезкам соответствуют равные длины)	Градусные величины равных углов – равны	Равные фигуры имеют равные площади	Равные фигуры имеют равные объёмы
3. аддитивность	Если отрезок разбит на неперекрывающиеся части, то его длина равна сумме длин этих частей	Градусная величина суммы углов равна сумме их градусных величин	Если фигура состоит из двух неперекрывающихся фигур, то её площадь равна сумме площадей этих фигур	Если фигура состоит из двух фигур, то её объём равен сумме объёмов этих фигур

Измерение геометрических величин – наиболее сложная теория для трансформации в школьный курс геометрии, является одной из важнейших его частей и имеет ясно выраженную прикладную направленность. В школьном курсе геометрии понятием геометрической величины пользуются без определения, однако к концу девятого класса, когда у учеников накоплен известный объём учебной информации, с целью организации знаний в систему, полезно обобщить всё то, что к этому времени известно о геометрических величинах (табл. 1). С учениками полезно обсудить, что если каждый конкретный род геометрической величины связан с определённым способом сравнения геометрических объектов, то рассмотрение общего понятия геометрической величины позволяет отвлечься от процесса измерения и сосредоточиться на процессе обобщения [3]. Развёртывание линии геометрических величин осуществляется по следующим направлениям [1].

1) Обращение внимания учащихся на общности свойств геометрических величин при изучении каждой конкретной величины, составление обобщающей таблицы (7 – 9 классы) и показ процесса аксиоматизации при их изучении (11-й класс).

2) Использование аналогии при решении и составлении задач на вычисление геометрических величин.

3) Выделение групп задач и нахождение частных методов их решения при изучении площадей многоугольников: а) равновеликие и равносоставленные многоугольники, теорема Бойяи-Гервина; б) разрезание многоугольников (без использования формул для вычисления площадей), в) использование формул площадей многоугольников (метрические задачи), г) использование только отношения площадей и других аффинных свойств (аффинные задачи).

4) Выделение групп задач и частных методов их решения при изучении объёма многогранников и площади их поверхности: а) задачи на конструирование многогранников и вычисление значений геометрических величин, б) вычисление значений геометрических величин данных многогранников различными способами.

5) Создание учениками межпредметных учебных проектов, связанных с геометрическими величинами.

2. Геометрические построения

При традиционном обучении этому важному разделу геометрии у школьников не создаётся представления о нём, как о целостной геометрической теории. Поэтому, в процессе обучения решению задач на построение, учителю целесообразно постепенно довести до понимания учащихся основные факты теории геометрических построений на плоскости и в пространстве, сравнить, выявив их общность и различие [4]. Расширение и углубление знаний учащихся осуществляется посредством подготовки и презентации ими индивидуальных заданий, связанных с богатой историей развития теории геометрических построений, что способствует развитию УУД. При рассмотрении методов решения задач на построение учителю необходимо выявить общие приёмы их решения, используя алгоритмический подход в обучении, при котором ученики открывают предписания для решения классов задач [1].

3. Геометрические преобразования

Обобщение теоретических основ процесса решения планиметрических задач позволяет на доступном для учеников уровне, подвести их к знакомству с одной из фундаментальных идей, нашедших отражение в Эрлангенской программе, сформулированной Ф. Клейном. Поиск ответов на вопросы: «Является ли значение величин чем-то существенным и неизменным в геометрии?», «Какие свойства фигур остаются неизменными, когда фигура подвергается различным преобразованиям?» привёл к возникновению различных видов геометрий [5]. Учащихся целесообразно познакомить с такими видами геометрий, с общим подходом к их определению с точки зрения группы преобразований. Не выходя за рамки обычных аксиом, внутри евклидовой геометрии, можно вести речь о нескольких геометриях: аффинной, метрической, проективной: каждой группе преобразований отвечает своя геометрия, изучающая свойства фигур, инвариантные относительно преобразований этой группы.

При решении задач, сначала на содержательном уровне, а затем, по мере изучения метрических теорем и их систематизации, выявляются признаки не только метрических, но и аффинных задач, и вводится соответствующий термин. Постепенно ученики осознают, что в евклидовой геометрии основным является понятие расстояния, а евклидовы свойства – это те, которые сохраняются при любом движении. То есть, понятие движения считается основополагающим в метрической (евклидовой) геометрии, которая определяется группой подобия и её подгруппой – группой движений.

В контексте рассмотрения ведущих идей курса геометрии, после изучения темы «Параллельность», учеников полезно познакомить с понятием аффинного преобразования, организовав работу с содержанием таблиц 2 и 3 [1].

Таблица 2

Аффинные фигуры и теоремы

Аффинные фигуры	Аффинные теоремы	Аффинно эквивалентные фигуры
1. луч 2. угол 3. параллелограмм 4. трапеция 5. многоугольник 6. медиана 7. средняя линия	1. о средней лини треугольника 2. о средней линии трапеции 3. о пропорциональных отрезках 4. о пересечении медиан треугольника 5. о точке пересечения диагоналей параллелограмма 6. теорема Паппа 7. теорема Менелая	1. любые два треугольника (существует шесть аффинных преобразований, каждое из которых отображает один из них на другой); любой треугольник аффинно эквивалентен правильному треугольнику; 2. любые два параллелограмма; параллелограмм аффинно эквивалентен любому квадрату; 3. Для аффинной эквивалентности двух любых трапеций $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ и $MNPQ$ $(MN \parallel PQ)$, необходимо и достаточно: $AB : CD = MN : PQ$, тогда аффинное преобразование переводит D в Q.; произвольная трапеция аффинно эквивалентна равнобедренной трапеции при указанном условии.

Ученики анализируют известные фигуры и теоремы с позиции инвариантов преобразований (табл. 3). Они понимают, что аффинно эквивалентные фигуры могут заменять друг друга, и что чем «проще» фигура, используемая при решении задачи, тем легче решается эта задача. Неявно используемые учителем инварианты аффинных преобразований, выступают с одной стороны, в качестве признаков распознавания аффинной задачи, а с другой – направляют процесс поиска её решения.

Таблица 3

Типы задач в метрической и аффинной геометрии

Тип задачи	Признаки типа задачи	Вид преобразования	Инварианты преобразования
1. Метрические задачи 7 класс	Условие содержит значения длин отрезков, периметров, площадей, объёмов фигур, величин углов; отношение параллельности, перпендикулярности между двумя объектами и др.	Движения: осевая и центральная симметрии; параллельный перенос; поворот	1) длина отрезка; площадь; объём; величина угла; 2) инцидентность точки и прямой (принадлежность); 3) параллельность прямых; пересечение прямых
2. Задачи на подобие 8 класс		гомотетия, подобие	1) величина угла; 2) отношение отрезков, периметров, площадей, объёмов подобных фигур; 3) параллельность и пересечение прямых; 4) инцидентность точки и прямой
3. Аффинные задачи	Условие содержит: отношение: параллельности двух прямых; длин отрезков, площадей, (нет значений геометрических величин, нет окружности и др.)	Аффинные: *преобразование* (параллельное проектирование на плоскости); *отображение* (параллельное проектирование плоскости на плоскость)	1) проекция любой прямой есть прямая 2) параллельность прямых 3) отношение отрезков на одной прямой, на параллельных прямых 4) отношение площадей фигур
4. Проективные задачи	Условие содержит отношение длин отрезков	Проективное преобразование (центральная проекция)	1) инцидентность точки и прямой; 2) пересечение прямых; 3) двойное отношение

Предварительно следует решить метрические задачи, соответствующие аффинным. После этого учитель предлагает ученикам, используя понятие аффинно эквивалентных фигур, решить несколько задач «необычным» способом. Такое разделение задач позволяет сделать осознанный выбор необходимых теоретических средств для поиска их решения, приводит к истории развития геометрии и даёт замечательную возможность познакомиться с одним из современных подходов в науке геометрии.

4. Аналитические методы

В школьном курсе геометрии координатный и векторный методы изучаются в планиметрии и стереометрии, поэтому очевидна целесообразность использования аналогии, что необходимо подчёркивать при изучении соответствующих понятий и отношений между ними [1]. Содержание темы «Векторы» предоставляет широкие возможности для формирования познавательных УУД: преобразования информации способами: классификации (виды векторов), алгоритмизации (сумма и разность векторов, умножение вектора на число и др.). Систематизация задач по этим темам позволяет поставить задачу обобщения способов их решения в виде предписаний различных типов (первый уровень обобщения) [6]. Обобщение на втором уровне предполагает создание общих приёмов решения задач векторным и координатным методами и их использование. Эти приёмы иллюстрируют процесс решения любой задачи математическим методом.

Ученикам следует понимать значение метода координат для решения практических задач, его роль в развитии науки. По выражению Ф. Энгельса, открытие Р. Декартом метода координат было «революцией в математике». Знакомство с биографией великого учёного, который отличался высокой требовательностью к себе, к своим трудам, способствует личностному развитию учащихся.

5. Аксиоматический метод в школьном курсе геометрии

В настоящее время аксиоматический метод является одним из основных при построении математических моделей действительности. Учёные отмечают, что знакомство учащихся с узловыми, революционными моментами развития знаний человека, в частности, - открытие геометрии Н.И. Лобачевского, непосредственно связанной с аксиоматическим методом, должно занять особое место в обучении геометрии [7]. Сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений входит в число требования к предметным результатам освоения курса математики.

Создание первоначальных представлений о сути аксиоматического метода, в основу которого кладутся некоторые исходные положения, а все остальные предложения выводятся логическим путём с помощью доказательств, начинается с изучением первых доказательств. Уже на этом уровне с учащимися следует выяснить: что понимать под «исходными положениями», что означают фразы «логическим путём», «доказательство» и др. В процессе освоения учебной информации необходимо учить учеников создавать логические модели – учебные схемы структур теорем и схемы поиска решения задач [1]. Эта деятельность реализуется только при условии владения учениками метаумениями: познавательными логическими и общеучебными УУД. Процесс поиска доказательства и реализация его результатов в записи доказательства поднимает вопрос о полноте и строгости доказательства. Уровень строгости зависит от целей применения аксиоматического метода при обучении геометрии в условиях реализации профильной дифференциации обучения. Полные и строгие доказательства в ШКГ невозможны, но ученик должен это понимать и знать, что значение труда, который он затратил на доказательство теоремы, «состоит в знакомстве и некотором упражнении на тему «аксиоматический метод» [7: *40]*.

Для обоснования выводов целесообразно использовать наиболее распространённую схему рассуждений, введённую Аристотелем и используемую при дедуктивном умозаключении – силлогизм. К использованию силлогизмов в процессе обучения геометрии можно подходить двумя путями. Первый – явное их использование, что предполагает достаточно серьёзное знакомство с элементами логики, этот путь вряд ли возможен в условиях обучения в массовой школе, но вполне допустим в рамках профильной дифференциации обучения. Второй путь – использование силлогизмов на содержательном уровне – приемлем без ограничений. Силлогистическая логика используется для обоснования аргументов. С помощью типов высказываний, используемых в силлогизме, можно определить нелогичные выводы и установить их причину [3]. Разницу между аксиоматикой и традиционной «дедуктивностью» разъяснял Г. Фройденталь с помощью терминов «глобальное упорядочение» и «локальное упорядочение» соответственно. По его мнению, учащихся не следует обучать аксиоматике в школе, но следует рассматривать процесс аксиоматизации - то, что так высоко ценит настоящий математик – «локальные упорядочения». В этом случае речь идёт не о полной аксиоматически обоснованной теории упорядочения, не о сложных дедуктивных рассуждениях, а о таком процессе, когда осознаются наглядные, но не всегда сознательно воспринимаемые факты [7]. Примером таких упорядочений является работа с геометрическими понятиями, «открытие» теорем, «открытие» теории параллелограмма и др.

Автор считает, что в данной работе новыми являются следующие результаты: актуализация учителем в процессе обучения математике научных основ школьного курса геометрии способствует достижению планируемых результатов в предметном, метапредметном направлении и в направлении личностного развития.

Литература

1. *Боженкова Л.И.* Интеллектуальное воспитание учащихся общеобразовательной школы при обучении геометрии: теория и практика. – М., Калуга: КПГУ, 2007. 281 с.

2. *Дубнов Я.С.* Беседы о преподавании математики. – М.: Просвещение, 1965. 236 с.

3. *Виленкин Н.Я., Дуничев К.И.* и др. Современные основы школьной математики: Пособие для студентов пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1980. – 236 с.

4. *Адлер А.* Теория геометрических построений. – Л.: Учпедгиз, 1940. 231 с.

5. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? – М.: МЦНМО, 2004. 568 с.

6. *Болтянский В.Г., Яглом И.М.* Векторы в курсе геометрии средней школы. Пособие для учителя. – М.: Учпедгиз, 1962. – 96 с.

7. *Фройденталь Г.* Математика как педагогическая задача. Ч. 2. / Под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1983. 192 с.

Scientific bases of a school course of geometry in training

Lyudmila Ivanovna Bozhenkova, *Doctor of Pedagogical Sciences, Professor.*

Theories and methods of higher geometry are scientific bases of a school course of geometry. This paper considers the problem of updating them in learning geometry. It contributes to the achievement of planned results of studying geometry.

Keywords – school geometry course, Federal state educational standards, teaching geometry, planned results.

УДК 007.52:004.81

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ИНФОГРАФИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ДАННЫХ

Александр Анатольевич Евсюков, *к.т.н. старший научный сотрудник*
Тел. 89632611921, e-mail:alev@icm.krasn.ru
Анна Владимировна Коробко, *к.т.н. научный сотрудник*
Тел. 89131715262, e-mail: lynx@icm.krasn.ru
Институт вычислительного моделирования СО РАН
http://icm.krasn.ru