ников без территориальных ограничений и затрат на очные профориентационные мероприятия.

Литература

1 *Орлов С.А.* Технологии разработки программного обеспечения. – СПб.: Питер, 2002. 576 с.

2 *Пряжников Н.С.* Методы активизации профессионального и личностного самоопределения. – М.: Модэк, 2002. 392 с.

3 *Пустовая Е.Н.* Профориентация: проблемы, опыт, перспективы // Информационно-методический и дидактический журнал «Имидж». 2002. № 2. С. 21–23.

4 *Трофимов С.А.* CASE-технологии. Практическая работа в Rational Rose. – СПб.: Бином-Пресс, 2002. 288 с.

Development of browser game for student's vocational guidance

Elena Mihailovna Tovbis, *ph.d., docent, Federal state budget-funded educational institution of higher education «Siberian state technological university»*

Elena Valerievna Lis, *ph.d., docent, Federal state budget-funded educational institution of higher education «Siberian state technological university»*

The article discusses developing new methods of student's vocational guidance. It is proposed to focus on electronic methods of vocational guidance, in particular in the form of a computer game.

Keywords: vocational guidance, computer game, strategy, model, web application.

УДК 519.1(075.8)+510.6(075.8)

ПРАКТИЧЕСКАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА (практические занятия 7–11)

Сергей Феофентович Тюрин*, проф., проф. кафедры автоматики и телемеханики,*
e-mail:tyurinsergfeo@yandex.ru,
Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
http://pstu.ru,
Юрий Александрович Аляев*, доц., доц. кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем,*
e-mail: alyr1@yandex.ru,
Пермский военный институт внутренних войск МВД России,
http://pvivv.ru

Предлагается методика решения задач на практических занятиях по дисциплине «Дискретная математика и математическая логика», разработанная и применяющаяся на практике в вузах Пермского края.

Ключевые слова: дискретная математика, математическая логика, переключательные функции, минимизация.

DOI: 10.21777/2312-5500-2016-3-29-46

Введение

Издавая в 2006 г. учебник «Дискретная математика и математическая логика» [1], авторы планировали вслед за ним издать и задачник. Переосмыслив имеющийся материал в последующие годы, они пришли к выводу о необходимости подготовки не совсем учебника, но советчика и подсказчика. Кроме того, был накоплен новый, интересный материал. Акцент сделан на практику, поскольку известно, что именно умение решать задачи является мерилом математического знания.

С.Ф. Тюрин

В предлагаемой серии статей нашел отражение опыт многолетнего преподавания авторами дисциплин «Дискретная математика» и «Математическая логика и теория алгоритмов» в вузах Пермского края.

Ю.А. Аляев

Информационные технологии ушли далеко вперед, но задача распознавания компьютером правильного ответа решается до сих пор тривиально – определением выбора одного заданного номера из n ответов. Причем $(n - 1)$ – неправильных ответов. На самом деле в дискретной математике, в логике, часто правильными могут быть разные ответы, например разные дизъюнктивные нормальные формы с одинаковым количеством букв – при минимизации переключательных функций.

Кроме того, приведение неправильных ответов, по мнению авторов, приводит к «рекламному» эффекту, – запоминаются именно они, причем самые несуразные.

Поэтому принято решение не разрабатывать так называемые тесты, а большую часть сил бросить на разъяснение методики решения типовых задач, выносимых на практические занятия по указанной тематике.

В статье рассматриваются методики решения задач на практических занятиях 7–11 по дискретной математике:

7) решение задач на применение законов алгебры переключательных функций и формул равносильных преобразований;

8) преобразование форм представления переключательных функций;

9) минимизация переключательных функций методом Квайна–Мак-Класки;

10) минимизация переключательных функций по картам Карно;

11) минимизация переключательных функций методом Л. Ф. Викентьева.

Методики решения задач на практических занятиях 1–6 по дискретной математике были рассмотрены в [2, 3]).

При изложении материала в серии статей принята сквозная нумерация рисунков и таблиц.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

Решение задач на применение законов алгебры переключательных функций и формул равносильных преобразований

Цель занятия: научиться решать задачи на применение законов алгебры переключательных функций и формул равносильных преобразований.

Методика решения задач

З а д а ч а 1. Упростить формулу ПФ:

$$f(abcd)=\bar a\bar c \vee \bar c(\bar a\bar b d \vee b \vee \bar b\overset{1}{\bar c})(d \vee \bar d\overset{0}{c} \vee \overset{1}{\bar c})=$$

$$= \bar a\bar c \vee \bar c(\underbrace{\bar a\bar b d \vee \underbrace{b \vee \bar b}_{1}}_{1})(\underbrace{d \vee 0 \vee 1}_{1})=\bar a\overset{0}{\bar c} \vee \bar c=\bar c.$$

З а д а ч а 2. Упростить формулу ПФ:

$$f(abcd)=a(bc \vee \overset{0}{\bar a}cd \vee b\bar c) \vee d(a\bar c \vee bc\overset{1}{d} \vee \bar a \vee c)(c\overset{1}{d} \vee \underbrace{\bar a b\underbrace{c\bar c}_{0}}_{0})=$$

$$= a(\underbrace{bc \vee b\bar c}_{b}) \vee d(\underbrace{a\overset{0}{\bar c} \vee b\overset{1}{c} \vee \bar a \vee \overset{1}{c}}_{1})c=ab \vee dc.$$

З а д а ч а 3. Упростить формулу ПФ:

$$f=bc(a\overset{1}{c}h \vee \overset{0}{\bar b}de \vee a\bar h(a\overset{0}{\bar c} \vee \bar d \vee d(\overset{1}{c} \vee \bar a))) \vee \overset{0}{\bar b}d(a\overset{1}{c} \vee \overset{0}{\bar c}))=$$

$$=bc(ah \vee a\bar h(\underbrace{\bar d \vee d}_{1}))=bc(ah \vee a\bar h)=bca=abc.$$

З а д а ч а 4. Упростить формулу ПФ:

$$f=\underbrace{\bar a\bar b}_{} \vee (a \vee b)(c \vee \bar a\bar b d(a \vee \bar e))=$$

Обозначим $\bar a\bar b$ как x, тогда:

$$=x \vee \overset{1}{\bar x}(c \vee \overset{0}{x}d(a \vee \bar e))=x \vee c=\bar a\bar b \vee c.$$

З а д а ч а 5. Упростить формулу ПФ:

$$f= x \vee y \vee \overset{1}{\bar x\bar y}(\bar z \vee h \vee \overset{0}{x \vee y})=x \vee y \vee \bar z \vee h.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8
Преобразование форм представления переключательных функций

Цель занятия: научиться преобразовывать переключательные функции из одной формы представления в другую, выполнять разложение Шеннона.

Методика решения задач

З а д а ч а 1. Получить ДНФ из произвольной (скобочной) формы ПФ.

$$f(x_1x_2x_3)=\overline{x_1 \vee x_2\bar x_3} \vee \bar x_1 x_3 = \bar x_1\overline{(x_2\bar x_3)} \vee \bar x_1 x_3 = \bar x_1(\bar x_2 \vee x_3) \vee \bar x_1 x_3 =$$
$$= \bar x_1\bar x_2 \vee \bar x_1 x_3 \vee \bar x_1 x_3 = \bar x_1\bar x_2 \vee \bar x_1 x_3.$$

З а д а ч а 2. Получить СДНФ из ДНФ $f(x_1x_2x_3)=\bar x_1\bar x_2 \vee \bar x_1 x_3$.

Представим функцию $f(x_1x_2x_3)=\bar x_1\bar x_2 \vee \bar x_1 x_3$ в виде: 00-∨0-1.

Тогда, подставляя вместо «–» всевозможные комбинации 0, 1, получим

$$00\text{-} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}0&0&0\\0&0&1\end{matrix}\right.$$

$$0\text{-}1 \longrightarrow \left\{\begin{matrix}0&0&1\\0&1&1\end{matrix}\right. .$$

Таким образом, получили номера 000, 001, 011, которые соответствуют членам СДНФ.

$$f(x_1x_2x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 .$$

З а д а ч а 3. Получить КНФ из произвольной (скобочной) формы ПФ.

$$f(x_1x_2x_3) = \overline{x_1 \vee x_2\bar{x}_3} \vee \bar{x}_1x_3 ;$$

$$\bar{f}(x_1x_2x_3) = \overline{\overline{x_1 \vee x_2\bar{x}_3} \vee \bar{x}_1x_3} =$$

$$\overline{\overline{(x_1 \vee x_2\bar{x}_3)}}\,\overline{\bar{x}_1x_3} = (x_1 \vee x_2\bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_3) = x_1 \vee x_2\bar{x}_3 ;$$

$$f(x_1x_2x_3) = \overline{x_1 \vee x_2\bar{x}_3} = \bar{x}_1(\bar{x}_2 \vee x_3) .$$

З а д а ч а 4. Получить КНФ из ДНФ.

$$f(x_1x_2x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 = \bar{x}_1(\bar{x}_2 \vee x_3).$$

З а д а ч а 5. Получить СКНФ из КНФ.

$f(x_1 x_2 x_3) = \bar{x}_1(\bar{x}_2 \vee x_3) =$

$= (\bar{x}_1 \vee x_2\bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_1\bar{x}_1) =$

$= (\bar{x}_1 \vee x_2\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_1)(\bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_1) =$

$= (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)\cancel{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)}^{\,1}.$

Соответствующие запрещенные наборы: 100, 110, 101, 111, 010 (база $x_1\,x_2\,x_3$).

З а д а ч а 6. Выполнить дизъюнктивное разложение Шеннона формулы по переменной b:

$f(abcd)=a\bar{b} \vee (\bar{a} \vee b)c[a\bar{b} \vee d(\bar{a} \vee b)]=$

$=b\{a{\cdot}0 \vee (\bar{a} \vee 1)c[a{\cdot}0 \vee d(\bar{a} \vee 1)]\} \vee \bar{b}\{a{\cdot}1 \vee (\bar{a} \vee 0)c[a{\cdot}1 \vee d(\bar{a} \vee 0)]\}=$

$= b\{0 \vee 1{\cdot}c[0 \vee d{\cdot}1]\} \vee \bar{b}\{a \vee \overset{1}{\bar{a}}c[\overset{0}{a} \vee d\overset{1}{\bar{a}}]\}=bcd \vee \bar{b}(a \vee cd).$

З а д а ч а 7. Выполнить конъюнктивное разложение Шеннона той же формулы (задача 6) по переменной a:

$f(abcd)=\{a \vee 0{\cdot}\bar{b} \vee (1 \vee b)c[0{\cdot}\bar{b} \vee d(1 \vee b)]\}\{\bar{a} \vee 1{\cdot}\bar{b} \vee (0 \vee b)c[1{\cdot}\bar{b} \vee d(0 \vee b)]\}=$

$=\{a \vee cd\}\{\bar{a} \vee \bar{b} \vee \overset{1}{b}c[\overset{0}{\bar{b}} \vee d\overset{1}{b}]\}=(a \vee cd)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee cd).$

З а д а ч а 8. Выполнить дизъюнктивное разложение ПФ, заданной десятичным номером № 174_{10} по переменной a, по переменным a, b.

Таблица истинности ПФ № 174_{10} показана в табл. 24.

Таблица 24

Таблица истинности

Переменные			BC	f(abc)	
a	b	c			
0	0	0	0	0	2^0

0	0	1	1	1	2^1
0	1	0	2	1	2^2
0	1	1	3	1	2^3
1	0	0	4	0	2^4
1	0	1	5	1	2^5
1	1	0	6	0	2^6
1	1	1	7	1	2^7

Выполним дизъюнктивное разложение ПФ, заданной десятичным номером № 174_{10} по переменной a. Для этого разделим таблицу истинности (табл. 24) пополам по значению a. В первой половине a = 0; во второй a = 1. Получим табл. 25 и табл. 26 соответственно.

Таблица 25

Таблица истинности (a = 0)

Переменные			BC	f(abc)
a	b	c		
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	2	1
0	1	1	3	1

Таблица 26

Таблица истинности (a = 1)

Переменные			BC	f(abc)
a	b	c		
1	0	0	4	0
1	0	1	5	1
1	1	0	6	0
1	1	1	7	1

Видим, что в табл. 25 при a = 0 получена функция двух переменных – дизъюнкция b, c. В табл. 26 при a = 1 получена функция одной переменной – повторение c. Таким образом, $f(abc) = \bar{a}(b \vee c) \vee ac$.

Выполним дизъюнктивное разложение ПФ, заданной десятичным номером № 174_{10} по переменным a, b.

Анализируем табл. 24. Делим ее на четыре части, получаем табл. 27–30.

Таблица 27

Таблица истинности

Переменные			BC	f(abc)
a	b	c		
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1

Таблица 28

Таблица истинности

Переменные			BC	f(abc)
a	b	c		
0	1	0	2	1
0	1	1	3	1

Таблица 29

Таблица истинности

Переменные			BC	f(abc)
a	b	c		
1	0	0	4	0
1	0	1	5	1

Таблица 30

Таблица истинности

Переменные			BC	f(abc)
a	b	c		
1	1	0	6	0
1	1	1	7	1

Видим, что для значений a = b = 0 функция равна 1 при c = 1, то есть – $\bar{a}\bar{b}c$.

Видим, что для значений a = 0, b = 1 функция равна 1 независимо от c = 1, то есть – $\bar{a}b$.
Видим, что для значений a = 1, b = 0 функция равна 1 при c = 1, то есть – $a\bar{b}c$.
Видим, что для значений a = b = 1 функция равна 1 при c = 1, то есть – abc.

Таким образом, получаем

$$f(abc) = \bar{a}\bar{b}c \vee \bar{a}b \vee a\bar{b}c \vee abc.$$

З а д а ч а 9. Получить полином Жегалкина дизъюнкции двух переменных.

$$x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y.$$

$$(1 \oplus 1 = 0).$$

З а д а ч а 10. Получить полином Жегалкина ПФ по таблице истинности.

Например, получим полином Жегалкина для функции f, таблица истинности которой имеет вид табл. 31.

Таблица 31

Таблица истинности

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Тогда получим

$f = (x \oplus 1)(y \oplus 1)z \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus x(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus xyz =$

$= (xy \oplus x \oplus y \oplus 1)z \oplus (xz \oplus x \oplus z \oplus 1)y \oplus x(yz \oplus y \oplus z \oplus 1) \oplus xyz =$

$= \cancel{xy}z \oplus \cancel{xz} \oplus \cancel{yz} \oplus \underline{z} \oplus \cancel{xy}z \oplus \cancel{xy} \oplus \cancel{yz} \oplus \underline{y} \oplus \cancel{xy}z \oplus \cancel{xy} \oplus \cancel{xz} \oplus \underline{x} \oplus \cancel{xy}z =$

$= x \oplus y \oplus z.$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 9

Минимизация переключательных функций методом Квайна–Мак-Класки

Цель занятия: научиться минимизировать переключательные функции методом Квайна–Мак-Класки.

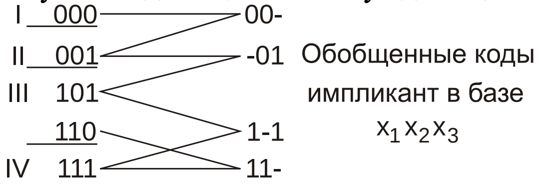
Методика решения задач

З а д а ч а 1. Минимизировать ПФ методом Квайна–Мак-Класки.

$$f(x_1x_2x_3) = x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \rightarrow$$

$\rightarrow 111 \vee 101 \vee 001 \vee 000 \vee 110.$

Группируем эти конституенты единицы по числу единиц:



Дальнейшие склеивания невозможны. Нахождение минимальных ДНФ далее производится по импликантной таблице (табл. 32):

Таблица 32

Импликантная таблица Квайна–Мак-Класки

	Простые импликанты			Конституенты единиц				
	x_1	x_2	x_3	111	101	001	000	110
A	0	0	–			+	+	
B	–	0	1		+	+		
C	1	–	1	+	+			
D	1	1	–	+				+

K = (C v ~~D~~)(B v C)(~~A~~ v B)AD = (B v C)AD = BAD v CAD.

Это означает, что тупиковые ДНФ содержат по три простые импликанты и имеют вид

$f_1 = x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1x_2$ (две инверсии);

$f_2 = \overline{x}_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1x_2$ (три инверсии).

Можно выбрать любую из полученных ТДНФ, а с учетом меньшего числа инверсий – первую.

З а д а ч а 2. Минимизировать ПФ методом Квайна–Мак-Класки.

f(a, b, c, d) = 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13 [0, 1, 2, 6, 8, 10, 14, 15].

Получим двоичное представление рабочих наборов ПФ:

f(a, b, c, d) = 0011, 0100, 0101, 0111, 1001, 1011, 1100, 1101.

Группируем рабочие наборы по возрастанию числа единиц, пронумеруем наборы:

I	1)	0	1	0	0
II	2)	0	0	1	1
	3)	0	1	0	1
	4)	1	0	0	1
	5)	1	1	0	0
III	6)	0	1	1	1
	7)	1	0	1	1
	8)	1	1	0	1

Начинаем склеивания соседних конституент из соседних групп I–II:

I	1)	0	1	0	0	Результат склеивания 1–3:	0	1	0	–
II	3)	0	1	0	1					

I	1)	0	1	0	0	Результат склеивания 1–5:	–	1	0	0
II	5)	1	1	0	0					

Больше склеивать в этих двух группах нечего.

Склеиваем соседние конституенты из соседних групп II–III:

II	2)	0	0	1	1	Результат склеивания 2–6:	0	–	1	1
III	6)	0	1	1	1					

II	2)	0	0	1	1	Результат склеивания 2–7:	–	0	1	1
III	7)	1	0	1	1					

II	3)	0	1	0	1	Результат склеивания 3–6:	0	1	–	1
III	6)	0	1	1	1					

II	3)	0	1	0	1	Результат склеивания 3–8:	–	1	0	1
III	8)	1	1	0	1					

II	4)	1	0	0	1	Результат склеивания 4–7:	1	0	–	1
III	7)	1	0	1	1					

II	4)	1	0	0	1	Результат склеивания 4–8:	1	–	0	1
III	8)	1	1	0	1					

Больше ничего не склеивается. Видно, что каждая конституента участвовала хотя бы в одном склеивании. Значит, они не простые импликанты.

Теперь группируем полученные импликанты с учетом положения тире (–).

I	2.1)	0	1	0	–
	2.2)	1	1	0	–
II	2.3)	–	1	0	0
	2.4)	–	0	1	1
	2.5)	–	1	0	1
III	2.6)	0	–	1	1
	2.7)	1	–	0	1
IV	2.8)	0	1	–	1
	2.9)	1	0	–	1

Теперь склеивания возможны только внутри групп.

I	2.1)	0	1	0	–	Результат склеивания 2.1–2.2:	–	1	0	–
	2.2)	1	1	0	–					

II	2.3)	–	1	0	0	Результат склеивания 2.3–2.5:	–	1	0	–
	2.5)	–	1	0	1					

По закону повторения оставляем одну импликанту (-10-). Все остальное не склеивается. Получаем 6 простых импликант:

3.1)	–	1	0	–
3.2)	–	0	1	1
3.3)	0	–	1	1
3.4)	1	–	0	1
3.5)	0	1	–	1
3.6)	1	0	–	1

Таким образом, получили сокращенную ДНФ (СкДНФ):

$$f(abcd) = b\bar{c} \vee \bar{b}cd \vee \bar{a}cd \vee a\bar{c}d \vee \bar{a}bd \vee a\bar{b}d.$$

Для получения ДНФ строим таблицу покрытий (табл. 33).

Таблица 33

Таблица покрытий

Простая импликанта		Конституенты							
		0011	0100	0101	0111	1001	1011	1100	1101
x_1	-10-		+	+				+	+
x_2	-011	+					+		
x_3	0-11	+			+				
x_4	1-01					+			+
x_5	01-1			+	+				
x_6	10-1					+	+		
КП		$x_2 \vee x_3$	x_1	$x_1 \vee x_5$	$x_3 \vee x_5$	$x_4 \vee x_6$	$x_2 \vee x_6$	x_1	$x_1 \vee x_4$

Получим конъюнктивное покрытие (КП, см. табл. 33), присвоив строкам обозначения x_i:

$$\text{КП}: (x_2 \vee x_3)x_1(x_1 \vee x_5)(x_3 \vee x_5)(x_4 \vee x_6)(x_2 \vee x_6)x_1(x_4 \vee x_1).$$

Применив закон поглощения, получим

$$\text{КП}: (x_2 \vee x_3)x_1(x_3 \vee x_5)(x_4 \vee x_6)(x_2 \vee x_6).$$

Применив распределительный закон, получим

$$\text{КП}: (x_2x_5 \vee x_3)x_1(x_4x_2 \vee x_6).$$

Раскрыв скобки, наконец, получим

$$\text{КП}: (x_2x_5x_1 \vee x_3x_1)(x_4x_2 \vee x_6) = x_1x_2x_4x_5 \vee x_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_5x_6 \vee x_1x_3x_6.$$

Выбираем самую короткую конъюнкцию: $x_1x_3x_6$.

Получаем ТДНФ: $f(abcd) = b\bar{c} \vee \bar{a}cd \vee a\bar{b}d$. Это и есть ответ.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 10
Минимизация переключательных функций по картам Карно

Цель занятия: научиться минимизировать переключательные функции методом карт Карно.

Методика решения задач

З а д а ч а 1. Минимизировать по карте Карно ПФ
$f(x_3\,x_2\,x_1) = 0, 1, 5, 6, 7\ [2, 3, 4]$.
Для функции трех переменных карта Карно содержит 8 клеток (рис. 15):

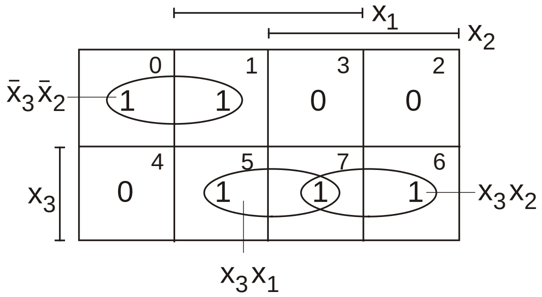


Рис. 15. Пример минимизации по карте Карно ПФ $f(x_3\,x_2\,x_1) = 0, 1, 5, 6, 7\ [2, 3, 4]$

Здесь (см. рис. 15) получилось три двухклеточных контура: (0,1), (3,7), (6,7).

Первый контур (0,1) линии переменных x_3x_2 полностью не покрывают (т. е. равны 0 в этом контуре – в номерах клеток контура), поэтому получаем импликанту $\bar{x}_3\bar{x}_2$.

Контур (5,7) линии переменных x_3x_1 полностью покрывают (т. е. равны 1 в этом контуре – в номерах клеток контура), поэтому получаем импликанту x_3x_1.

Контур (6,7) линии переменных x_3x_2 полностью покрывают (т. е. равны 1 в этом контуре – в номерах клеток контура), поэтому получаем импликанту x_3x_2.

Берем дизъюнкцию импликант $f_1 = \bar{x}_3\bar{x}_2 \vee x_3x_1 \vee x_3x_2$. Если взять вместо контура (5,7) контур (1,5), то получим $f_1 = \bar{x}_3\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_1 \vee x_3x_2$.

Этот результат аналогичен по количеству букв, но содержит больше инверсий.

З а д а ч а 2. Минимизировать по карте Карно ПФ

f(abcd) = 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13 [0, 1, 2, 6, 8, 10, 14, 15].

Карта Карно для четырех переменных содержит 16 клеток (рис. 16).

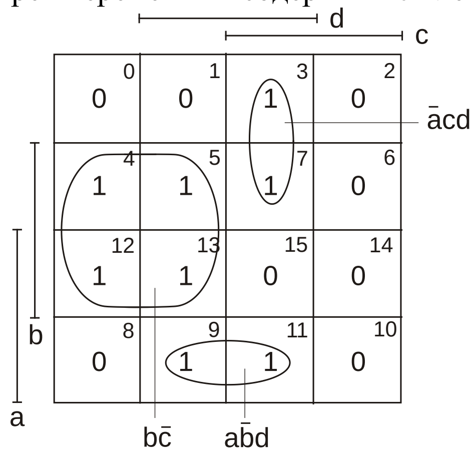


Рис. 16. Пример минимизации по карте Карно ПФ
f(abcd) = 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13 [0, 1, 2, 6, 8, 10, 14, 15]

Здесь (см. рис. 16) имеется четырехклеточный контур – квадрат (4, 5, 12, 13), ему соответствует импликанта из двух переменных $b\bar{c}$.

Двухклеточному контуру (3, 7) соответствует импликанта из трех переменных $\bar{a}cd$.

Двухклеточному контуру (9, 11) соответствует импликанта из трех переменных $a\bar{b}d$.

В итоге получим $f(abcd) = b\bar{c} \vee \bar{a}cd \vee a\bar{b}d$. Это и есть ответ.

Заметим, что в рассмотренных примерах ПФ – полностью определенные.

З а д а ч а 3. Минимизировать не полностью определенную ПФ по карте Карно: f(abcd) = 0, 8, 9, 10, 12, 13 [1, 2, 4, 7, 11, 15] {3, 5, 6, 14}.

В фигурных скобках представлены условные наборы, отмеченные на рис. 17 знаком «тильда». Условные наборы могут включаться в рабочие наборы, то есть доопределяться до единицы.

Анализируя карту Карно (рис. 17), получаем ответ: $f(abcd) = a\bar{c} \vee a\bar{d} \vee \bar{b}\bar{c}\bar{d}$.

З а д а ч а 4. Минимизировать по карте Карно не полностью определенную ПФ f(abcd) = 0, 2, 8, 11, 13 [1, 4, 7, 9, 14].

Здесь указаны только рабочие и запрещенные наборы, всего их десять, следовательно остальные шесть – условные наборы.

Имеем (рис. 18) два квадрата: (0, 2, 8, 10) и (3, 2, 11, 10) и один двухклеточный контур (5, 13). Вместо (5, 13) возможны контуры (12, 13), (13, 15).

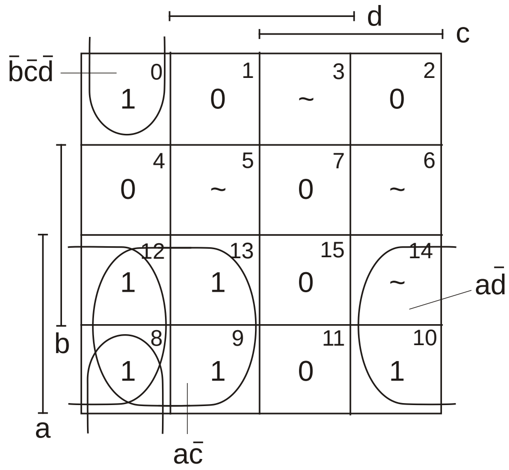


Рис. 17. Пример минимизации по карте Карно ПФ
f(abcd) = 0, 8, 9, 10, 12, 13 [1, 2, 4, 7, 11, 15] {3, 5, 6, 14}

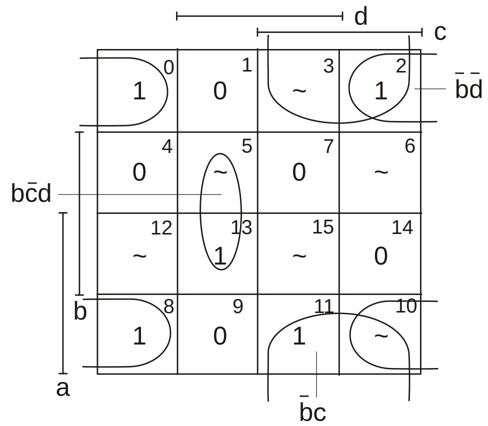


Рис. 18. Пример минимизации по карте Карно ПФ
f(abcd) = 0, 2, 8, 11, 13 [1, 4, 7, 9, 14]

Анализируя карту Карно (рис. 18), получаем ответ: $f(abcd) = \bar{b}\bar{d} \vee \bar{b}c \vee b\bar{c}d$.

З а д а ч а 5. Минимизировать по карте Карно ПФ
f(abcd) = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 14, 15 [0, 1, 8, 9, 13].

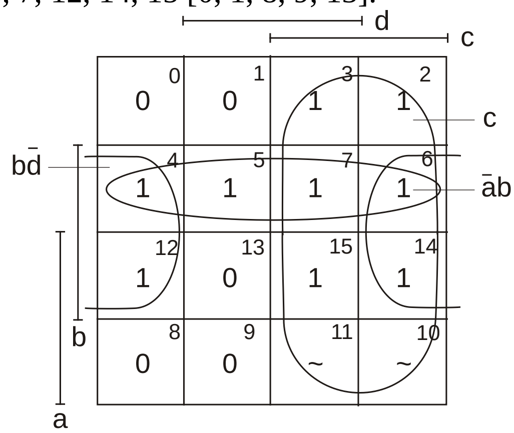


Рис. 19. Пример минимизации по карте Карно ПФ
f(abcd) = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 14, 15 [0, 1, 8, 9, 13]

В этой задаче (рис. 19) получается восьмиклеточный контур – куб (3, 2, 7, 6, 15, 14, 11, 10) и два квадрата (4, 5, 7, 6), (4, 12, 6, 14).

Анализируя карту Карно (рис. 19), получаем ответ: $f(abcd) = c \vee b\bar{d} \vee \bar{a}b$.

Решим эту задачу в классе КНФ. Объединим в контуры нули ПФ (рис. 20).

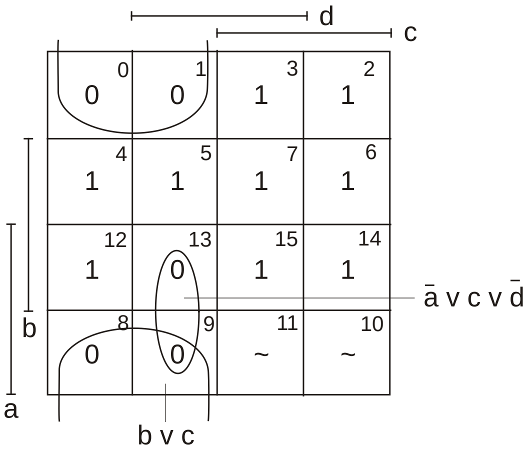


Рис. 20. Пример минимизации по карте Карно ПФ
f(abcd) = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 14, 15 [0, 1, 8, 9, 13] в классе КНФ

Получили квадрат и двухклеточный контур. Квадрату нулей (0, 1, 8, 9) соответствует дизъюнкция – имплицента $b \vee c$.

Переменная входит в имплиценту без инверсии, если она полностью не покрывает контур нулей, то есть равна 0 в клетках контура. Переменная входит в имплиценту с инверсией, если она полностью покрывает контур нулей, то есть равна 1 в клетках контура. Так, для контура нулей (13, 9) получим имплиценту $\bar{a} \vee c \vee \bar{d}$.

В итоге получим КНФ $f(abcd) = (b \vee c)(\bar{a} \vee c \vee \bar{d})$.

Напомним, что ПФ p(x) является имплицентой переключательной функции f(x), если множество запрещенных (нулевых) наборов функции p(x) совпадает или является подмножеством множества запрещенных (нулевых) наборов функции f(x), т. е. $M_0[p(x)] \subseteq M_0[f(x)]$.

З а д а ч а 6. Минимизировать по карте Карно ПФ
f(abcd) = 4, 5, 9, 12, 13, 14, 15 [0, 1, 2, 3, 6, 7, 8].

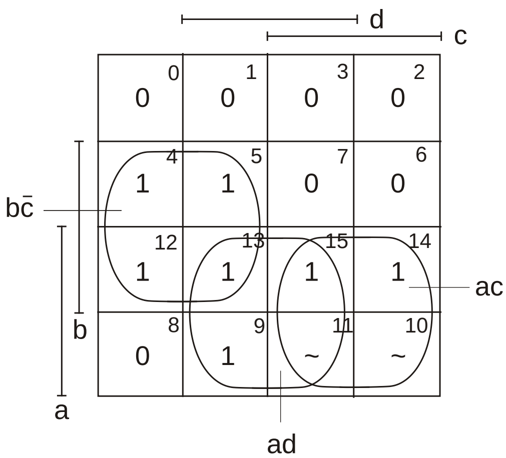


Рис. 21. Пример минимизации по карте Карно ПФ
f(abcd) = 4, 5, 9, 12, 13, 14, 15 [0, 1, 2, 3, 6, 7, 8]

Здесь (рис. 21) имеем три квадрата: $f(abcd) = b\bar{c} \vee ad \vee ac$.

З а д а ч а 7. Минимизировать по карте Карно ПФ
f(abcd) = 4, 5, 6, 10, 12 [0, 1, 7, 8, 9, 14].

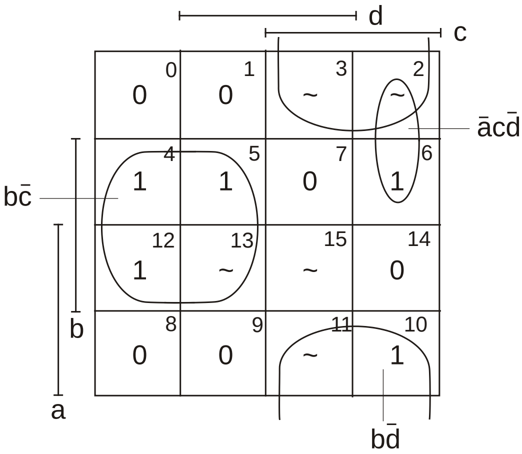


Рис. 22. Пример минимизации по карте Карно ПФ
f(abcd) = 4, 5, 6, 10, 12 [0, 1, 7, 8, 9, 14]

Получаем $f(abcd) = b\bar{c} \vee b\bar{d} \vee \bar{a}c\bar{d}$.

Решим эту задачу в классе КНФ (рис. 23).

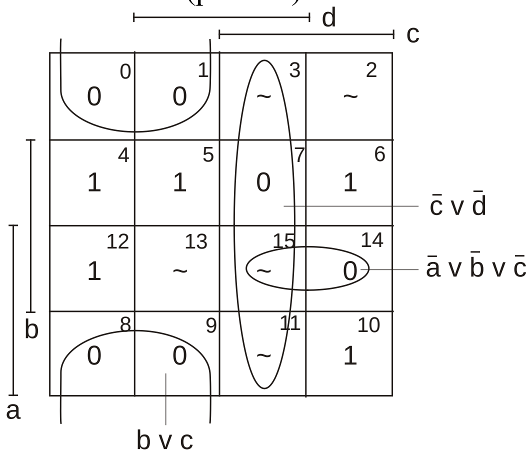


Рис. 23. Пример минимизации по карте Карно ПФ
f(abcd) = 4, 5, 6, 10, 12 [0, 1, 7, 8, 9, 14] в классе КНФ

Получаем $f(abcd) = (b \vee c)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})(\bar{c} \vee \bar{d})$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 11
Минимизация переключательных функций методом Л. Ф. Викентьева

Цель занятия: научиться минимизировать переключательные функции методом Л. Ф. Викентьева.

Методика решения задач

З а д а ч а 1. Задана функция шести переменных в восьмеричной системе счисления: $f_8(x_6\, x_5\, x_4\, x_3\, x_2\, x_1)$ = 3, 41 [0, 36]. Минимизировать ПФ методом Л. Ф. Викентьева.

Неминимизированная ПФ имеет две конституенты – 3 и 41, каждая из которых содержит шесть переменных, т. е. исходная сложность представления ПФ: 6 + 6 = 12.

Приступим к минимизации. Для начала проведем нормализацию наборов – все наборы должны иметь одинаковое число разрядов. Добавим левые нули:

$f_8(x_6\, x_5\, x_4\, x_3\, x_2\, x_1)$ = 03, 41 [00, 36].

Берем первый рабочий набор 03 и выполним его минимизацию со старшего разряда: $03 \to \frac{0}{-}3$.

Очевидно, что для старшего разряда нет запрещенных цифр, так как ни одно запрещенное число не оканчивается на 3. Поэтому 3 можно включить в полный куб: $03 \to \left(0 \vee 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 \vee 5 \vee 6 \vee 7\right)\frac{3}{-} = (0...7)\frac{3}{-}$.

Теперь минимизируем младший разряд. Так как старший разряд может быть любым, то младший не должен быть 0 или 6, чтобы не получить 00 и 36:

$$03 = (0...7)\frac{3}{0,6}.$$

Минимизируем младший разряд: рабочий набор 3, запрещенные – 0 и 6.

На кубе соседних чисел (рис. 37) треугольниками обозначены запрещенные вершины, кружком – минимизируемая вершина. Таким образом, 3 необходимо включить в квадрат (1, 3, 7, 5).

Поэтому $03 = (0...7)\frac{3}{0,6} = (0...7)(1 \vee 3 \vee 5 \vee 7)$.

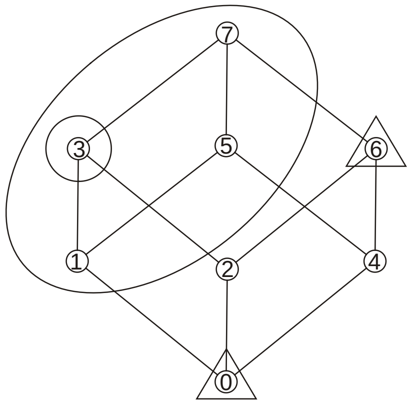


Рис. 37. Минимизация ПФ трех переменных 3 [0, 6]

Квадрату (1, 3, 7, 5) соответствует (рис. 38) импликанта в виде обобщенного кода (– – 1).

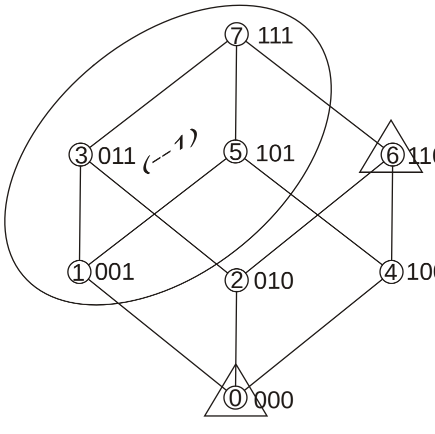


Рис. 38. Покрытие квадрата (1, 3, 7, 5)

Таким образом, получаем

$$03 = (0...7)\frac{3}{0,6} = (0...7)(1 \vee 3 \vee 5 \vee 7) = (---)(--1).$$

Здесь (– – –) – покрытие полного куба.

Проверим, покрыто ли число 41? Да, покрыто. В первой скобке покрытия (0…7)(1∨3∨5∨7) есть цифра 4, а во второй – цифра 1. Поэтому ответ такой:

$f_8(x_6\,x_5\,x_4\,x_3\,x_2\,x_1) = x_1$. Переменная x_1 – младшая переменная, соответствует 1 в покрытии (– – –)(– – 1).

Получили сложность – 1 (одна переменная).

З а д а ч а 2. Задана функция шести переменных в восьмеричной системе счисления:

$f_8(x_6\,x_5\,x_4\,x_3\,x_2\,x_1)$ = 21, 25, 33, 37, 54, 56 [20, 22, 24, 26, 30, 32, 34, 36].

Минимизировать ПФ методом Л. Ф. Викентьева.

Возьмем набор 21 и начнем минимизацию со старшего разряда:

$$21 = \frac{2}{-}1 = (0...7)\frac{1}{0,2,4,6}.$$

Минимизируем ПФ трех переменных 1[0,2,4,6] по кубу соседних чисел (рис. 39):

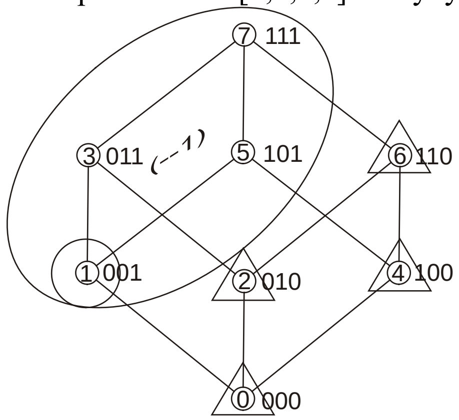


Рис. 39. Минимизация ПФ трех переменных 1 [0, 2, 4, 6]

Из рис. 39 видно, что 1 нужно включить в квадрат (1, 3, 7, 5).

Получим $21 = \frac{2}{-}1 = (0...7)\frac{1}{0,2,4,6} = (0...7)(1 \vee 3 \vee 5 \vee 7) = (---)(--1) = x_1$.

Исключаем покрытые числа: 21, 25, 33, 37. Остаются 54, 56.

Продолжим минимизацию: $54 = \frac{5}{2,3}4.$

Минимизируем ПФ трех переменных 5 [2, 3] по кубу соседних чисел (рис. 40):

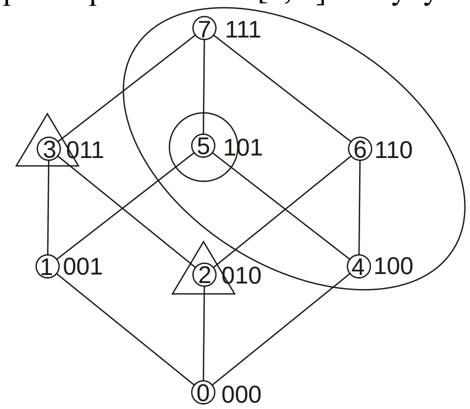


Рис. 40. Минимизация ПФ трех переменных 5 [2, 3]

Таким образом:

$$54 = \frac{5}{2,3}4 = (4 \vee 5 \vee 6 \vee 7)\frac{4}{-} = (4 \vee 5 \vee 6 \vee 7)(0...7).$$

Для младшего разряда нет запрещенных цифр, так как ни одно запрещенное число не начинается на 4, 5, 6, 7. Проверяем покрытие чисел: 54 покрыто, 56 покрыто, остальные числа не покрыты.

Получим импликанту (рис. 41) для квадрата (4, 5, 7, 6):

$(4\vee 5\vee 6\vee 7)(0\ldots 7)=(1\,-\,-)(-\,-\,-) = x_6$.

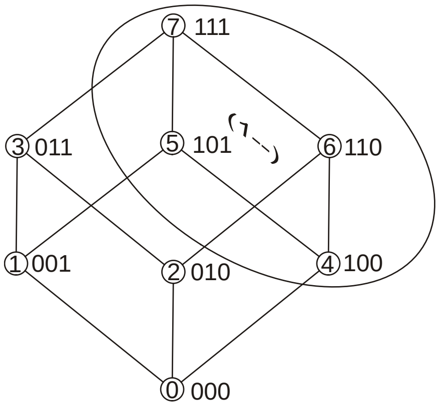


Рис. 41. Покрытие квадрата (4, 5, 6, 7)

Таким образом: $f_8(x_6\,x_5\,x_4\,x_3\,x_2\,x_1) = x_6\vee x_1$.

З а д а ч а 3. Задана функция девяти переменных в восьмеричной системе счисления:

$f_8(x_9\,x_8\,x_7\,x_6\,x_5\,x_4\,x_3\,x_2\,x_1) = 701,\ 001,\ 700\ [000,\ 770,\ 077,\ 777]$.

Минимизировать ПФ методом Л. Ф. Викентьева.

Начнем минимизацию со старшего разряда числа 701 (рис. 42):

$$701=\frac{7}{-}01=(0...7)\frac{0}{-}1=(0...7)(0...7)\frac{1}{0,7}=(0...7)(0...7)(1\vee 5)=$$

$$=(-\,-\,-)(-\,-\,-)(-01)=\bar{x}_2x_1.$$

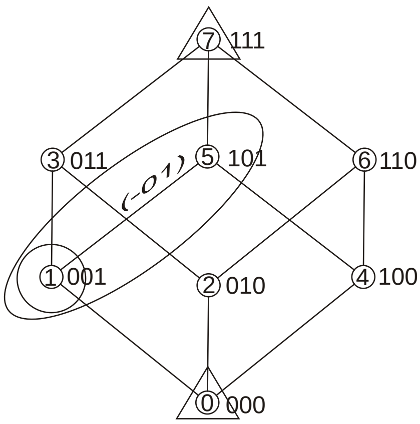


Рис. 42. Минимизация ПФ трех переменных 1 [0, 7]

Проверяем покрытие: 701 и 001 покрыто, 700 не покрыто. Приступаем к минимизации 700: $700=\frac{7}{0}00.$

На рис. 43 выбираем квадрат (1, 3, 7, 5).

Получаем: $700=\frac{7}{0}00=(1\vee 3\vee 5\vee 7)\frac{0}{7}0.$

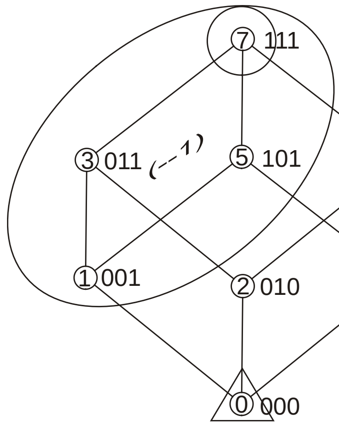


Рис. 43. Минимизация ПФ трех переменных 7 [0]

Минимизируем ПФ 0 [7]. Выбираем (рис. 44) нижнюю грань куба – квадрат (0, 1, 5, 4).

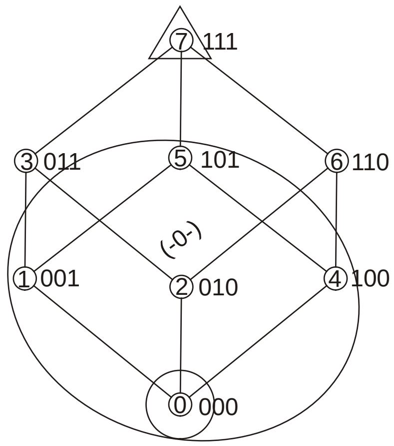


Рис. 44. Минимизация ПФ трех переменных 0 [7]

Получим

$$700 = \frac{7}{0}00 = (1 \vee 3 \vee 5 \vee 7)(0 \vee 1 \vee 5 \vee 4)\frac{0}{-} = (1 \vee 3 \vee 5 \vee 7)(0 \vee 1 \vee 4 \vee 5)(0...7).$$

Проверяем покрытие: 700 покрыто, 701 покрыто, 001 не покрыто, т. е. первое покрытие необходимо.

Получаем импликанту $(1 \vee 3 \vee 5 \vee 7)(0 \vee 1 \vee 4 \vee 5)(0...7) = (--1)(-0-)(---) = x_7 \bar{x}_5$.

Минимизированная ПФ выглядит следующим образом:

$$f(x_9 x_8 x_7 x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1) = \bar{x}_2 x_1 \vee x_7 \bar{x}_5.$$

Заметим, что функция теперь зависит только от трех переменных, а не от девяти.

Решим эту же задачу методом поразрядного сравнения рабочих и запрещенных двоичных наборов. Построим таблицу (табл. 34) двоичных наборов.

Таблица 34

Таблица двоичных наборов

X_9	X_8	X_7	x_6	X_5	X_4	X_3	X_2	X_1	Набор
Рабочие наборы									
1	1	1	0	0	0	0	**0**	**1**	701
0	0	0	0	0	0	0	**0**	**1**	001
1	1	**1**	**0**	0	0	0	0	0	700

Запрещенные наборы									
0	0	**0**	0	0	0	0	0	**0**	000
1	1	1	**1**	1	1	0	0	**0**	770
0	0	0	**1**	1	1	1	**1**	1	077
1	1	1	**1**	1	1	1	**1**	1	777

Видим (табл. 34), что для покрытия первого числа 701 одной переменной не обойтись. Если выбрать из рабочего набора 701 переменную X_1, то она обеспечит отличие (ортогональность) по отношению к запрещенным наборам 000 и 770. Для обеспечения ортогональности с запрещенными наборами 077 и 777 – добавим переменную $\bar{x}_2$.

Получаем импликанту $\bar{x}_2 x_1$, которая покрывает и рабочий набор 001 (в нем тоже младшие разряды – 01).

Для покрытия рабочего набора 700 можно взять переменную $\bar{x}_6$ для отличия от запрещенных наборов 770, 077 и 777, а для отличия от запрещенного набора 000 выберем, например, переменную x_7.

Получим импликанту $x_7 \bar{x}_6$.

В итоге $f(x_9 x_8 x_7 x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1) = \bar{x}_2 x_1 \vee x_7 \bar{x}_6$, и это тоже правильный ответ.

Литература

1. *Аляев Ю.А., Тюрин С.Ф.* Дискретная математика и математическая логика. – М.: Финансы и статистика, 2006. 368 с.

2. *Тюрин С.Ф., Аляев Ю.А.* Практическая дискретная математика и математическая логика (практические занятия 1–3) // Образовательные ресурсы и технологии. 2015. № 4 (12). С. 43–52. http://www.muiv.ru/vestnik/pdf/pp/ot_2015_4_043-052.pdf.

2. Тюрин С.Ф., Аляев Ю.А. Практическая дискретная математика и математическая логика (практические занятия 4–6) // Образовательные ресурсы и технологии. 2016. № 1 (13). С. 21–33. http://www.muiv.ru/vestnik/pdf/pp/ot_2016_1_021-033.pdf.

Practical discrete mathematics and mathematics of logic (practical occupations 7–11)

Sergey Fedofentovich Tyurin*, professor, professor of the pulpit of the automation and tele mechanical engineers,*

Yuri Alexandrovich Alyaev*, assistant professor, assistant professor of the pulpit of software of the computing machinery and automated systems, Perm military institute of internal troops of the MIA of Russia*

The technique of solving problems on a practical training on discipline «Discrete mathematics and mathematical logic» developed and applied in practice in the universities of the Perm region.

Keywords: the discrete mathematics, mathematics of logic, the switching function, minimization.