

$$-\frac{25}{288} \cdot 8 - \frac{5}{36} \cdot 2 + \frac{5}{288} \cdot 1 + \frac{5}{288} \cdot 12 + \frac{1}{36} \cdot 3 - \frac{1}{288} \cdot 0 = \frac{7}{12} = 058(3).$$

Результат совпадает с известным аналитическим решением.

Заключение

Автор считает, что в данной работе новыми являются следующие положения и результаты. Новизна метода проявилась в том, что разработан алгоритм выбора узлов решетки при фиксированных коэффициентах, и эта задача является более трудной задачей. Для классов функций, зависящих от гладкостей по выбранным координатным осям, построенные формулы сохраняют полученный ранее порядок сходимости. Качество полученных методов проверены на контрольных задачах с известными решениями.

Литература

1. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
2. *Шойнжуров Ц.Б.* Некоторые вопросы теории кубатурных формул в неизотропных пространствах С.Л. Соболева. // Докл. АН СССР, 1973. Т. 209/ № 5. С. 1036-1038.
3. *Рамазанов М.Д.* Лекции по теории приближенного интегрирования. Уфа: Изд-во Башкир. ун-та, 1973. 174 с.
4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – 5-е изд., доп. М.: Наука, 1988. 512 с.
5. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1977. 456 с.
6. *Шойнжуров Ц.Б.* Некоторые вопросы теории кубатурных формул в пространстве $W_p^m(E_n)$ // Сб. Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск: Наука, 1980. С.302-306.
7. *Юмова Ц.Ж.* Вычисление параметров функционалов погрешностей кубатурных формул. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH&Co. KG, 2011. 108 с.

On the cubature formula with the involving derivatives

Yumova Tsyrenkhanda Zhembeevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate professor of the Department of High Mathematics, East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude, Kluchevskaya st, 40V.

The algorithm of replacing some other lattice nodes to minimize the error functional norm is developed under the concordance condition of the convergence order with lattice step and the smoothness of the function along the selected coordinate directions. The results obtained by the method tested in the control examples.

УДК 532.517.4

ДИНАМИКА ЗАГЛУБЛЕНИЯ ПЕРЕМЕШАННОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ В ТРЕХМЕРНЫХ РАСЧЕТАХ

Лидия Алексеевна Компаниец, канд. физ.-мат. наук, доцент, с.н.с.

тел.: 8 391 249 8811, e-mail: kla@icm.krasn.ru

ФГБУН ИВМ СО РАН

http://icm.krasn.ru

Татьяна Валерьевна Якубайлик, канд. физ.-мат. наук, н.с.

тел.: 8 391 249 8811, e-mail: ytv@icm.krasn.ru

ФГБУН ИВМ СО РАН

http://icm.krasn.ru

*Людмила Владимировна Гаврилова, канд. физ.-мат. наук, доцент
тел.: 8 391 249 7147, e-mail: lv.gavrilova@gmail.com
ФГАОУ ВО "Сибирский федеральный университет"
<http://sfu-krasn.ru>*

С использованием трехмерной численной модели выполнены расчеты заглупления перемешанного слоя под действием ветровой нагрузки в стратифицированном водоеме прямоугольной формы. Проведено сравнение результатов для различных моделей турбулентности.

Ключевые слова: трехмерное численное моделирование, турбулентное замыкание, заглупление перемешанного слоя.

Введение

Задача численного исследования заглупления турбулентного слоя жидкости рассматривалась в ряде работ [1;2;3;4] и опирается на натурные измерения, приведенные в работе [3]. Натурные эксперименты проводились для водоема глубины 0,3 м. Область наших интересов — исследование основных гидрофизических характеристик неглубоких стратифицированных озер. В частности, нами применялся пакет GETM [5] для расчета течений в озере Шира, глубина которого 25 м. Поэтому в дальнейшем мы будем опираться на статью [2], в которой результаты статьи [3] теоретически (численно) обобщаются на водоемы глубины 40 м, и результаты работы новосибирских ученых О. Ф. Васильева, Т. Э. Овчинниковой, Г. Г. Черных. Нашей задачей было сравнение результатов указанных авторов и результатов трехмерных расчетов по программе GETM.



Л.В. Гаврилова



Т.В. Якубайлик



Л.А. Компаниец

Модель GETM — это наиболее динамично развивающаяся модель, специализированная для расчета течений в различных водоемах (в отличие, например, от универсальной MITgsm, которая позволяет, наряду с водоемами, рассчитывать и движение в атмосфере и за счет этого имеет некоторые ограничения в вариативности). В GETM возможен выбор из четырех вариантов сетки для дискретизации по вертикали, достаточно большой выбор разностных аппроксимаций для расчета адвекции (по сравнению, например, с ROM). Также она позволяет подключать много разных моделей вертикального турбулентного перемешивания (для расчета коэффициента вертикального турбулентного обмена).

1 Постановка задачи

Постановка задачи по [4] следующая.

Уравнение состояния записывается в виде: $\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0) + \beta S)$, где $\alpha = 0,253547 \cdot 10^{-3} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ и $\beta = 0,717031 \cdot 10^{-3} \text{ л/г}$ получены путем линеаризации уравнения состояния, предложенного Ченом и Миллером [6], $T_0 = 3,98 \text{ }^\circ\text{C}$ — температура максимальной плотности для пресной воды.

Распределение температуры по вертикали постоянное (гомотермия) $T = 3,5 \text{ }^\circ\text{C}$. Имеем линейную стратификацию плотности по глубине. На рис. 1 приведены распределения солености и плотности по глубине в начальный момент времени.

В начальный момент времени скорости нулевые. На поверхности задается граничное условие, позволяющее учесть влияния ветра: $K_z \partial u / \partial z = \tau_w / \rho$, где τ_w — напряжение ветра. Для солености на поверхности задаются нулевые потоки. На дне задаются условия проскальзывания с трением для скорости и постоянное значение для солености. Кроме того, задаются начальные данные и краевые условия для уравнений, позволяющих учесть вертикальный турбулентный обмен. На рис. 2 изображены значения относительной скорости, энергии турбулентности e , коэффициента вертикального турбулентного обмена и плотности. Рисунки предоставлены Г. Г. Черных и Т. Э. Овчинниковой.

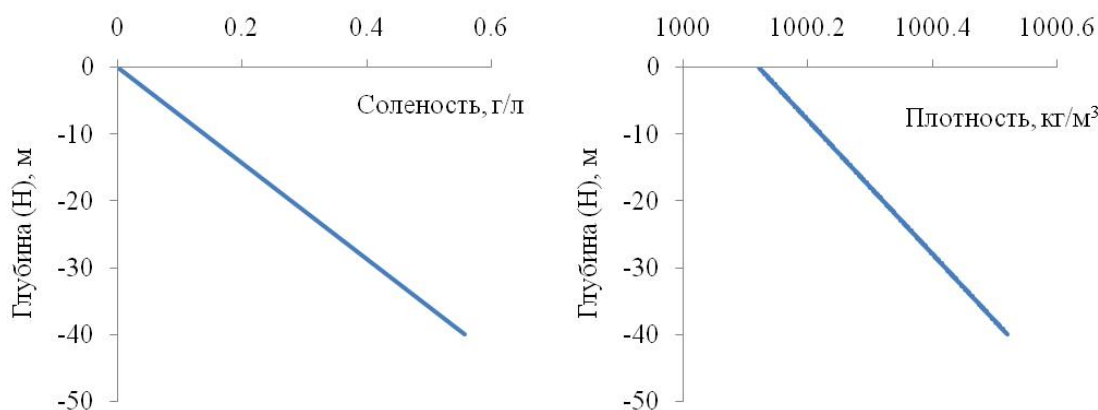


Рис. 1. Начальное распределение солености и плотности

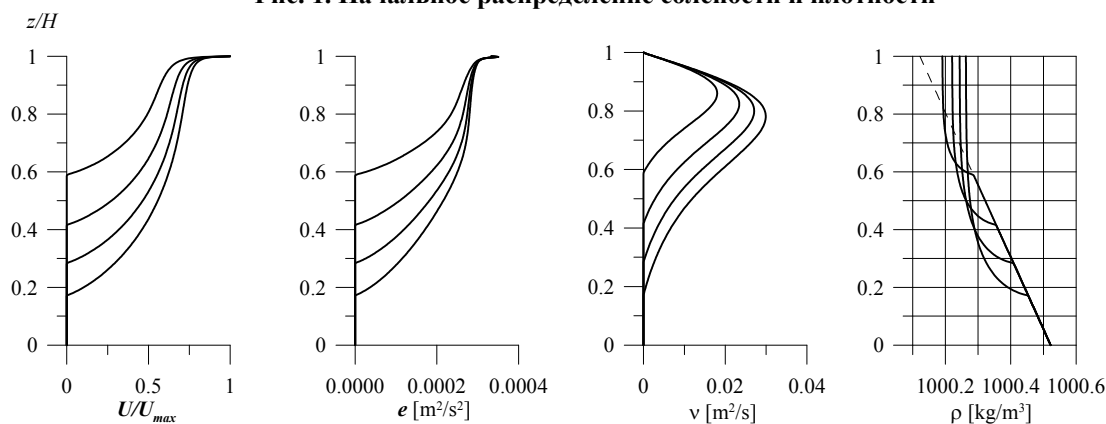


Рис. 2. Вертикальные распределения параметров для моментов времени $t = 7,5$ часов, $t = 15$ часов, $t = 22,5$ часа, $t = 30$ часов

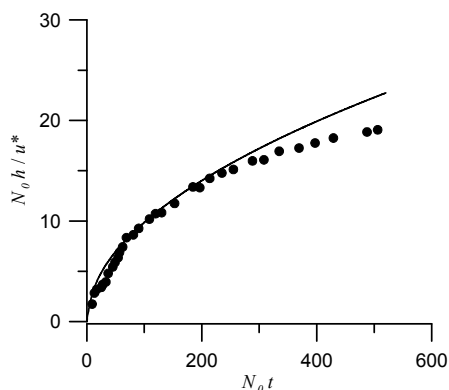


Рис. 3. Динамика заглубления перемешанного слоя $h_1 = N_0 h / u^*$ в зависимости от безразмерного времени $t_1 = N_0 t$

На рис. 3, взятом из [7], представлены экспериментальные данные [3] и результаты расчетов из статьи [4]. Точками обозначены результаты натурального эксперимента, сплошной линией — результаты численных расчетов.

Здесь $N_0 = \left[- (g / \rho^*) (\partial \rho / \partial z)_{t=0} \right]^{1/2}$ — частота Вайсяля – Брента, h — толщина перемешанного слоя, $u^* = \sqrt{\tau_w / \rho^*}$, ρ^* — начальное значение плотности жидкости на поверхности. Толщина перемешанного слоя определялась следующим образом: $h = H - z_h$, где z_h — величина, удовлетворяющая условию $e(t, z_h) = 0,02 e_{\max}(t)$, $e_{\max}(t) = \max_e(t, z)$.

Нашей целью было исследовать различные модели турбулентности в расчетах задачи перемешанного верхнего слоя в модельном прямоугольном бассейне. При расчетах использовались пакеты программ GETM, GOTM [8].

Система уравнений, используемая в этой программе, является модификацией хорошо известной и часто используемой для расчетов российскими и зарубежными учеными, системой уравнений гидрофизики, основанной на приближениях Буссинеска и гидростатики. По сравнению с системой уравнений, выписанной, например, в [9], из уравнений не исключается вертикальная молекулярная вязкость.

Коэффициент вертикального турбулентного обмена рассчитывается с использованием моделей турбулентного замыкания разного уровня сложности. Существует возможность расчета с постоянным коэффициентом вертикального турбулентного обмена. Запрограммировано несколько вариантов $k-\varepsilon$ модели. Также присутствует возможность расчета по моделям второго порядка. Коэффициенты горизонтальной турбулентной диффузии берутся постоянными.

Далее приведены результаты расчетов по двум моделям турбулентности.

1. Вариант турбулентного замыкания, который в GOTM именуется как модель с вычислением ТКЕ и масштаба длины (далее модель 1). При вычислении ТКЕ используется динамическое уравнение типа Меллора-Ямады [1]. Величина l вычисляется через динамическое уравнение скорости диссипации. Функция стабильности постоянна.

2. Модель 2-го порядка с динамическим уравнением типа $k-\varepsilon$ модели (далее модель 2).

2 Тестовые расчеты

Тестовые расчеты проводились на трехмерной задаче о заглублении верхнего перемешанного слоя в прямоугольном бассейне шириной 7,5 км и длиной 10 км с постоянной глубиной 40 м.

Моделирование проводилось для стратифицированной по солености жидкости с использованием GETM. В этом случае скорости зависят от времени, глубины и еще двух пространственных переменных. Наш опыт вычислений показывает, что если в модели GETM коэффициент вертикального турбулентного обмена не слишком большой, то влияние бокового обмена на величины скоростей в центре бассейна невелико и можно попытаться сравнить одномерный модельный расчет [4] со специальной усовершенствованной моделью турбулентности [1].

На рис. 4 представлена динамика заглубления перемешанного слоя $h_1 = N_0 h / u^*$ в зависимости от безразмерного времени $t_1 = N_0 t$. Графики выведены в центральной точке

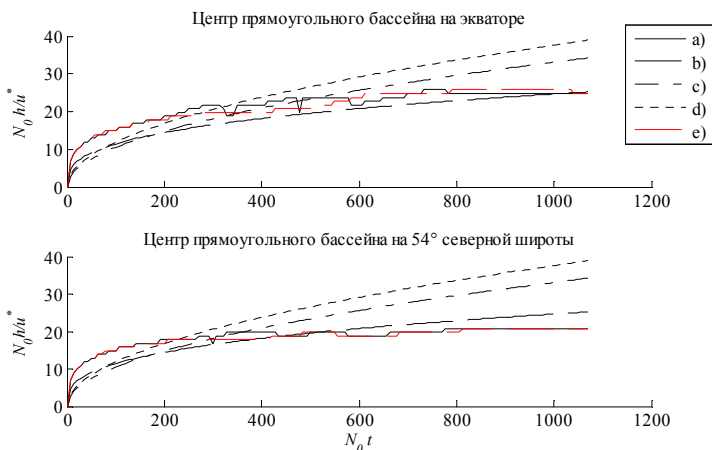


Рис. 4. Динамика заглубления перемешанного слоя бассейна.

Толщина перемешанного слоя определялась следующим образом:

а) модель 1, $h = H - z_h$, где z_h — величина, удовлетворяющая условию

$$K_z(t, z_h) \leq 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с},$$

б) $h = 15^{1/3} u^* N_0^{-2/3} t^{1/3}$,

в) $h = (6/5)^{1/4} u^* N_0^{-1/2} t^{1/2}$,

d) $h = 2^{1/4} u^* N_0^{-1/2} t^{1/2}$,

e) модель 2, $h = H - z_h$, где z_h — величина, удовлетворяющая условию $K_z(t, z_h) \leq 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$.

Соотношения b) – d) взяты из статьи [2].

На рис. 5 приведен типичный график коэффициента вертикального турбулентного обмена в центре бассейна, который качественно совпадает с графиком этой величины, приведенном в [7].

Результаты, приведенные на рис. 4–5 получены при коэффициенте горизонтального обмена $K_x = 10 \text{ м}^2/\text{с}$.

Кроме того, исследовалось влияние коэффициента горизонтального турбулентного обмена на величину заглужения турбулентного слоя. На рис. 6 представлены результаты расчетов с $K_x = 200 \text{ м}^2/\text{с}$.

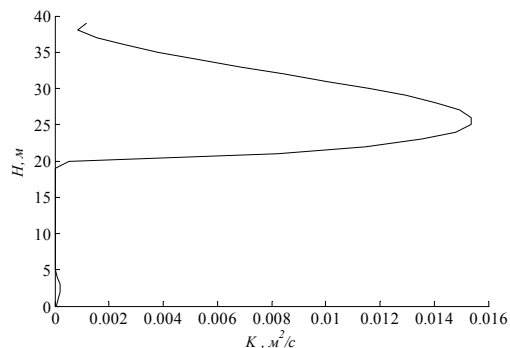


Рис. 5. Распределение коэффициента вертикального турбулентного обмена по глубине

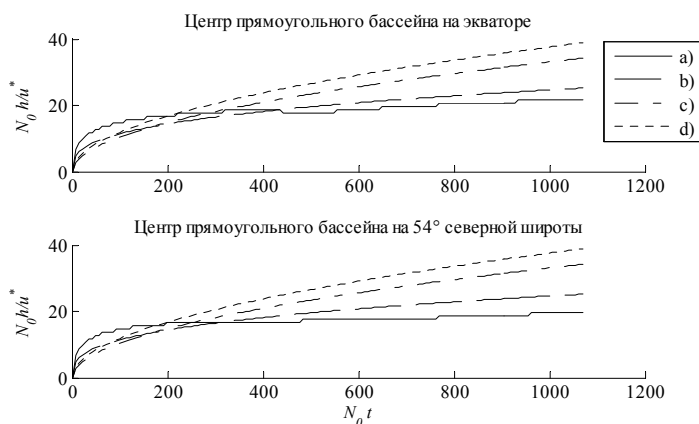


Рис. 6. Динамика заглужения перемешанного слоя, $K_x = 200$

Заключение

Физика задачи о заглужении перемешанного верхнего слоя в замкнутом прямоугольном бассейне с жесткими стенками при постоянных граничных условиях обуславливает выход на квазистационарное течение, что демонстрируют рис. 4 и 6. Аналитические формулы b) – d) со степенной зависимостью величины заглужения перемешанного верхнего слоя от времени выхода на стационар не предусматривают.

Мы пришли к следующим выводам:

- 1) получаемый результат зависит от того, каким взят параметр Кориолиса (т.е. от места расположения бассейна);
- 2) в начальный момент времени в реальных расчетах перемешивание идет быстрее, чем в расчетах по аналитическим формулам;
- 3) с течением времени в реальных расчетах перемешивание практически прекращается, что может быть связано с выходом решения на стационар.
- 4) увеличение коэффициента горизонтального турбулентного обмена приводит к ускорению процесса перемешивания.

Авторы благодарят Г. Г. Черных и Т. Э. Овчинникову за постановку задачи и плодотворное обсуждение результатов.

Литература

1. Mellor G.L., Yamada T. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems // Reviews of geophysics and space physics. 1982. V. 20. No. 4. Pp. 851-875.
2. Deleersnijder E., Luyten P. On the practical advantages of the quasi-equilibrium version of the Mellor and Yamada level 2.5 turbulence closure applied to marine modelling // Appl. Math. Modelling. 1994. V.18. Pp. 281-287.
3. Kato H., Phillips O.M. On the penetration of a turbulent layer into stratified fluid // J. Fluid. Mech. 1969. V. 37, part 4. Pp. 643-655.
4. Васильев О.Ф., Овчинникова Т.Э., Черных Г.Г. Математическое моделирование заглупления турбулентного слоя в стратифицированной жидкости // Доклады академии наук. 2012. Т. 443. № 5. С. 578-582.
5. GETM [Электронный ресурс]. URL: <http://getm.eu> (дата обращения: 22.02.2016).
6. Chen C.T., Millero F.J. Precise thermodynamic properties for natural waters covering only the limnologies range // Limnol. Oceanogr. 1986. Vol.31(3). Pp. 657-662.
7. Васильев О.Ф., Овчинникова Т.Э., Черных Г.Г. Численные модели заглупления турбулентного слоя в устойчиво стратифицированной жидкости // Математическое моделирование. 2015. Т. 27. № 5. С. 52-64.
8. GOTM [Электронный ресурс]. URL: <http://www.gotm.net/> (дата обращения: 22.02.2016).
9. Марчук Г.И., Саркисян А.С. Математическое моделирование циркуляции океана. М.: Наука, 1988. 304 с.

Dynamics of fluid mixed layer penetration in 3d calculations

Lidiya Kompaniets, PhD, Associate Professor, Senior Researcher, ICM SB RAS

Tatiana V. Yakubaylik, PhD, Researcher, ICM SB RAS

Ljudmila Gavrilova, PhD, Associate Professor, Siberian Federal University

The wind-influenced deepening of the mixed layer in a stratified rectangular reservoir has been calculated using three-dimensional numerical model. A comparison of results has been made for various turbulence models.

Keywords: three-dimensional numerical simulation, turbulent closure, mixed layer penetration.

УДК 519.714

ВЕРИФИКАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ОПИСАНИЙ С ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ НЕ-ОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Людмила Дмитриевна Черемисинова, д.т.н., главный научный сотрудник

Тел.: 375 17 284 2 82, e-mail: cld@newman.bas-net.by

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

<http://uiip.bas-net.by>

Рассматривается подход к верификации логических описаний комбинационных устройств для случая, когда исходное функциональное описание проектируемой схемы не полностью определено. Предлагаемый подход основан на моделировании поведения схемы для общего случая, когда входные стимулы представляются троичными векторами.

Ключевые слова: автоматизация проектирования, верификация, моделирование.

Одним из наиболее эффективных методов повышения качества и надежности оборудования является создание средств автоматизации, гарантирующих корректность проектируемых устройств. Это может быть обеспечено путем верификации проектных решений на всех стадиях проектирования. По мере возрастания сложности проектируемых устройств функциональная верификация становится все более необходимым и дорогим этапом процесса проектирования. Официальные издания проектных компаний