

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОЩАДИ АРЕАЛА ПО СНИМКАМ

Цветков Виктор Яковлевич¹,

д-р техн. наук, профессор,

e-mail: tsvetkov-vy@rut-miit.ru

¹Юридический институт Российского университета транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия

Статья предлагает новый подход к оценке площадей ареалов (динамических или труднодоступных территорий) на поверхности Земли. Такие участки трудно или невозможно определить наземными измерениями из-за динамики ситуации. Причиной возникновения подобных участков могут быть наводнение, ветровая эрозия, береговая абразия, выбросы вредных веществ. Формально модель расчета площади использует метод Монте-Карло и специальное деление ареальных зон. Однако принципиальным отличием предлагаемого подхода является то, что площадь ареала определяется не по абсолютному значению случайных точек, а по отношениям пропорций количества точек на снимке с изображением эталона и определяемого ареала. Ареалы описывают цифровыми моделями, полученными со снимка (беспилотного) летательного аппарата. Снимок дает возможность получать границы ареала. Дополнительным условием является введение эталонного объекта с известной площадью. Сравнение ареала с эталоном дает возможность получать пропорции по снимкам, которые используются для оценки реальной площади. Показано, что сходимость пропорций превосходит сходимость дискретных площадей по абсолютной и относительной погрешности. При наличии эталонного объекта с известной площадью отпадает необходимость в полномасштабной геометрической реконструкции поверхности. Предлагаемая концепция относительного измерения через эталонный объект потенциально может быть полезна в ситуациях, когда геометрическая привязка изображения затруднена, но возможно корректно выделить исследуемую область и эталон.

Ключевые слова: ареальная модель, поверхность, дискретная площадь, метод Монте-Карло, сходимость пропорций, площадь ареала, погрешность вычисления

SIMULATION MODELING OF AREA USING IMAGERY

Tsvetkov V.Ya.¹,

doctor of technical sciences, professor,

e-mail: tsvetkov-vy@rut-miit.ru

¹Law Institute of the Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia

The article proposes a new approach for assessing the area of dynamic or hard-to-reach territories on the Earth's surface. Such areas are difficult or impossible to identify using ground-based measurements due to changing conditions. The cause of such areas may be flooding, wind erosion, coastal abrasion, and emissions of harmful substances. Formally, the area calculation model employs the Monte Carlo method and a specialized division of areal zones. However, the key distinction of the proposed approach is that the area is determined not by the absolute number of random points, but by the proportional ratio of point counts between the reference image and the target area. The areas are described using digital models derived from unmanned aerial vehicle (UAV) imagery, which enables the delineation of area boundaries. An additional condition is the introduction of a reference object with a known area. Comparing the target area with the reference makes it possible to derive proportions from the images, which are then used to estimate the actual area. The results show that proportional convergence outperforms the convergence of discrete areas in terms of both absolute and relative error. When a reference object of known area is available, full-scale geometric surface reconstruction becomes

unnecessary. The proposed concept of relative measurement through a reference object may be particularly useful in cases where geometric image registration is challenging, yet the target area and the reference can still be reliably identified.

Keywords: areal model, surface, discrete area, Monte Carlo method, convergence of proportions, areal area, calculation error

Введение

В практике управления пространственными объектами возможны ситуации, в которых необходимо определение границ и площади ареалов. Зачастую для решения этой задачи затруднено использование наземных измерений. Примером является оценка площади разлива рек, когда площадь разлива меняется с течением времени как в большую, так и в меньшую сторону. Подобные ситуации возможны также при разливе нефтепродуктов в зоне нефтепровода. Определение границ разлива реки или нефти – это комплекс трудоемких мероприятий по установлению зон возможного разлива. Для расчёта границ и площади используют следующие основные методы:

- цифровые модели рельефа для симуляции распространения воды по территории при заданных уровнях подъема [1];
- гидродинамические модели, которые учитывают объем стока реки, рельеф дна и берегов, а также данные многолетних наблюдений за максимальными уровнями воды во время весенних паводков [2];
- спутниковые данные, которые позволяют визуально оценить фактические масштабы разлива¹ [3; 4];
- ГИС-анализ. Это процесс пространственного моделирования территорий, подверженных риску наводнений. Он сочетает гидрологические данные с рельефом местности в геоинформационных системах (ГИС) для оценки рисков [5];
- топографические, геодезические изыскания²: определение высоты поверхности воды на местности, геодезическая съемка поймы, определение рельефа и др.

Во многих существующих исследованиях основным аспектом является обработка высококачественных изображений, полученных с помощью спутников [4]. Классические методы геодезии и аэрофотосъемки для небольших и динамических участков не всегда пригодны. Применение наземных измерений является трудоемкой задачей, а для оценки границ разлива наземные методы неэффективны. Аэрофотосъемка требует длительной подготовки и наличия близко расположенных аэродромов. Она нерентабельна при съемке небольших участков. Для решения такой задачи целесообразно применение мотодельтапланов, управляемых человеком, либо беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), несущих легкую цифровую аппаратуру высокого разрешения. Фотоснимки с БПЛА являются одиночными и требуют специальной методики обработки [6; 7]. По снимкам БПЛА можно определить границы участка на основе методов обработки изображений, включая автоматизированное трассирование (векторизацию) снимка. Однако использование только снимков не позволяет решать задачу оценки площади участка без специальной методики. Одна из методик заключается в подсчете пикселей на растровом изображении. Методика позволяет определить наличие загрязнения или разлива, но она не позволяет оценивать площадь [8]. Для определения площади разлива по снимкам необходимо построение границ ареалов, что связано с решением отдельной задачи [9].

Целью исследования является разработка подхода к оценке площади пространственного ареала по снимкам с применением метода Монте-Карло и имитационного моделирования, позволяющего потенциально уменьшить зависимость результата от абсолютной метрической реконструкции изображения.

Методы исследования: теория множеств, имитационное моделирование, метод Монте-Карло.

¹ ГОСТ Р 59328-2021. Аэрофотосъемка топографическая. Технические требования. – Москва: Стандартинформ, 2021. – 36 с.

² Постановление Правительства Российской Федерации от 18 апреля 2014 г. № 360 «Об определении границ зон затопления, подтопления». – URL: <http://publication.pravo.gov.ru/document/0001201404220005> (дата обращения: 20.07.2026). – Текст: электронный; Инструкция по топографической съемке в масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000, 1:500 [ГКИНП-02-033-82: введен 01.01.1983]. – Москва: Недра, 1985. – 151 с.

Вариант имитационного моделирования площади ареала

Одна из задач определения площади ареала связана с ситуацией разлива. В момент времени T_1 площадь разлива определяется границей L_1 . Если разлив продолжается, то следующий участок разлива определяется границей L_2 в момент времени T_2 . Максимальная площадь показана на рисунке 1 для момента времени T_3 , которая определяется границей L_3 .

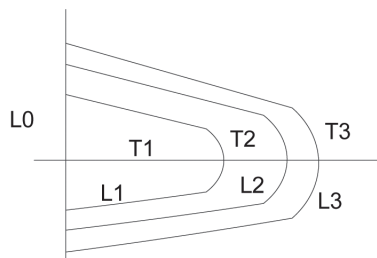


Рисунок 1 – Ареальные зоны при разливе рек

Существует условная граница L_0 (рисунок 1), относительно которой необходимо оценивать площадь или динамику изменения площади.

В инженерной отечественной практике для расчёта уровней воды и параметров затопления применяется зависимость:

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} I^{1/2},$$

где Q – расход воды;

A – площадь поперечного сечения потока;

R – гидравлический радиус;

I – уклон водной поверхности;

n – коэффициент шероховатости Маннинга.

На основании вычисленного уровня воды далее строится зона затопления по топографическим отметкам.

Вторая задача связана с замкнутыми ареалами произвольной формы. Она возникает в ситуации, когда необходимо определить площадь объекта с исключением внутреннего замкнутого ареала. Например, требуется определить площадь озера с исключением площади острова или площадь земельных угодий с исключением участков леса. На рисунке 2 замкнутый ареал A с границей LL_1 вложен в замкнутый ареал B с границей LL_2 . Такая ситуация описывает также химическое заражение местности, в которой необходимо определить границы участка заражения LL_1 .

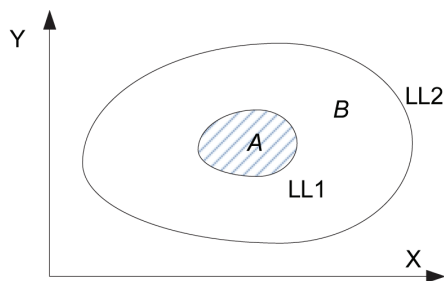


Рисунок 2 – Замкнутые вложенные ареалы

Различие между задачами первого типа (рисунок 1) и задачами второго типа (рисунок 2) заключается в том, что для задач первого типа существует взаимно однозначное соответствие на границах между координатами. Для задач второго типа не существует взаимно однозначного соответствия на границах между координатами.

Первый вариант моделирования использует ситуацию на рисунке 1 при наличии однозначности между координатами границ. В этом случае ситуацию дополняют эталоном B . Эталон создают путем измерения на местности двух точек $Q1$ и $Q2$, которые задают прямоугольник B с известной площадью (рисунок 3). Принципиальным является то, что ареал A включен в эталон B , т.е.

$$A \subset B.$$

Таким образом, ареал B есть эталонный объект, площадь которого известна.

Рассмотрим третий вариант из рисунка 1, который показан отдельно на рисунке 3.

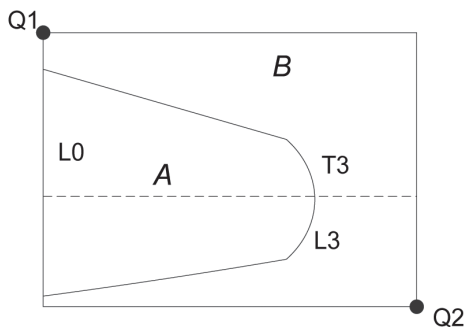


Рисунок 3 – Исследуемый ареал и эталон

В этой ситуации определяют границы $L0$ и $L3$ ареала A . Площадь ареала A – это часть площади ареала B . Метод вычисления основан на использовании трех множеств на снимке:

$$B(N) = A(N_A) + E(N_E). \quad (1)$$

Первый ареал в (1) или множество $B(N)$ – это множество эталонной области на реальной поверхности и на снимке; N – мощность этого множества, которая определяется числом выделенных на снимке элементов – растровых точек. Второй ареал или исходное множество $A(N_A)$ – это множество исследуемого участка на снимке, N_A – мощность этого множества, определяемая числом выделенных на снимке элементов – растровых точек в области A . Оно является подмножеством $B(N)$. Третий ареал или множество $E(N_E)$ – это также подмножество $B(N)$, точки которого лежат вне множества A . Величина N_E – мощность данного подмножества (число растровых точек не в области A). Сущность подхода заключается в последовательном нахождении трех групп точек N , N_A , N_E , принадлежащих трем множествам $B(N)$, $A(N_A)$, $E(N_E)$. Очевидно, что мощность или количество растровых точек на снимке пропорционально площади данных ареалов в реальности.

Предлагаемый подход основан на применении метода Монте-Карло [10; 11], но принципиальным отличием является то, что площадь ареала определяется не по абсолютному значению случайных точек, а по отношениям пропорций количества точек на снимке с изображениями эталона и определяемого ареала.

Для расчета применяется датчик случайных чисел [12], диапазон которого задан эталонным участком. На ареал эталонной области B с помощью датчика случайных чисел генерируется точка со «случайными координатами». Область генерации случайных точек задается областью B .

Границы $L0$, $L3$ для участка A известны. Их определяют по изображениям, полученным с летательного аппарата. Часть «случайных» точек M_A попадает в ареал A , часть точек M_E попадет в ареал E вне ареала A , но в область эталона B . Любая «случайная» точка M_B всегда попадает в область эталона B . В терминах теории множеств принадлежность точек можно представить в виде следующих соотношений:

$$\forall M_B (x_m, y_m) \in B(N), \quad (2)$$

$$\exists M_E (x_m, y_m) \in E(N_E), \quad (3)$$

$$\exists M_A (x_m, y_m) \in A(N_A), \quad (4)$$

$$N = N_A + N_E.$$

Соответственно в (2), (3), (4) величины N , N_A , N_E показывают текущие значения количества точек для данного шага моделирования. Их можно рассматривать как счетчики. В начале вычислений количество точек в счетчиках

$$N=N_A=N_E=0.$$

В процессе «бросания» случайной точки в эталон или выполнения текущего шага моделирования определяют принадлежность каждой точки к ареалам. Если

$$(x_m, y_m) \in A \rightarrow N_A = (N_A + 1) \wedge N = (N + 1), \quad (5)$$

если

$$(x_m, y_m) \in E \rightarrow N_E = (N_E + 1) \wedge N = (N + 1). \quad (6)$$

То есть выполняется один из альтернативных вариантов: точка прибавляется либо к N_A в (5), либо к N_E в (6), но в обоих случаях увеличивает N . В ходе моделирования проводится порядка $N \gg 1000$ испытаний. В современных вычислительных системах эта операция длится менее секунды. После завершения моделирования определяют «условную дискретную площадь» участка как количество «случайных» точек, накопленных в счетчиках в ходе моделирования. Количество точек – шагов моделирования пропорционально реальной площади ареала S_B , что можно представить с использованием коэффициента пропорциональности k_1 :

$$S_B = k_1 N. \quad (7)$$

Выражение (7) говорит о том, что реальная площадь эталона S_B пропорциональна общему количеству точек N , которые были использованы в моделировании. Также существует пропорциональность для множества S_A в виде

$$S_A = k_2 N_A. \quad (8)$$

Выражение (8) отражает факт пропорциональности (k_2) числа точек в ареале A (N_A) его реальной площади (S_A). При росте числа шагов моделирования к бесконечности величины k_1 и k_2 стремятся к 1 (в случае нормированной дискретной площади).

Предложенный подход применим при условии, что отображение исследуемой поверхности на изображение сохраняет отношение площадей либо после соответствующей ортокоррекции остаточная локальная деформация масштаба является пренебрежимо малой.

Для решения второй задачи (рисунок 2) также требуются значительные выкладки и это будет предметом следующей статьи.

Определение сходимости процесса моделирования

Как показывают опыты, приближение дискретной площади к реальной происходит по нелинейному закону в соответствии с сигмойдой (рисунок 4).

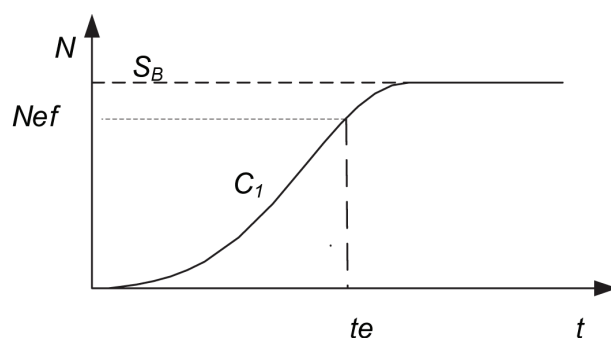


Рисунок 4 – Рост дискретной площади в зависимости от числа испытаний

По горизонтальной оси на рисунке 4 отложено число испытаний или время. По вертикальной оси отложена накопленная дискретная площадь. Величина S_B есть асимптота или реальная площадь. Величина Nef – эффективная дискретная площадь, $Nef \approx S_B$. Кривая сходимости C_1 показывает степень и скорость приближения счетчика к асимптоте в процессе имитационного моделирования.

Можно рассмотреть другую зависимость – отношение пропорций площадей

$$P = \frac{N_a S_B}{N S_A}. \quad (9)$$

Другая сигмоида характеризует зависимость пропорции (9) от числа шагов моделирования (рисунки 5). В этом случае асимптота есть единица.

Для данной зависимости кривая сходимости другая, C_2 . Отношение дискретных площадей быстрее приближается к асимптоте, чем абсолютные значения площадей. При одном и том же числе испытаний или времени испытаний близость между Pe и асимптотой (единицей) много больше, чем между Nef и S_B . Это дает основание вычислять отношение N_A/N , а затем умножить его на известную площадь S_B , т.е.

$$S_A = S_B (N_A(t)/N(t)). \quad (10)$$

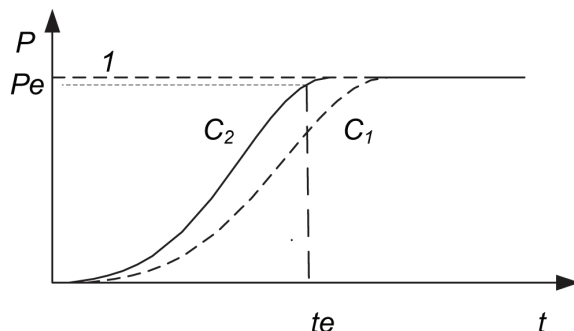


Рисунок 5 – Зависимость пропорции отношения площадей от числа испытаний

Выражение (10) характеризует принцип вычисления площади ареала. Определение площади ареала сводится к вычислению пропорций между дискретными площадями ареала и эталона и умножению этого отношения на известную площадь эталона. Возникает вопрос: на каком шаге надо прекратить моделирование и какова погрешность метода?

Величины N , N_A – оценивают текущее или переменное значение. Введем параметр U для завершающего этапа. Параметр U – это завершение моделирования и фиксированное последнее значение счетчика N . Оценим целесообразность дальнейшего моделирования на основе погрешности вычислений. Метод является итеративным, поэтому его погрешность связана с его сходимостью [13]. Пусть проведено всего N шагов моделирования, что соответствует числу точек, попавших на эталон. Из них N_A точек попали в ареал A . Рассмотрим, на сколько изменится значение площади при дополнительных K испытаниях. При точной оценке площади добавочные шаги моделирования не вносят существенных изменений в оценку площади ареала A . При этом все дополнительные результаты моделирования K попадут в ареал эталона, некоторая часть K_A попадет в ареал A .

Абсолютная погрешность оценивается по разности между площадью участка $S_A(N_A)$ и новой площадью участка $S_A(N_A + K_A)$ при $N + K$ шагах моделирования

$$\delta_A = |S_A(N_A + K_A) - S_A(N_A)|. \quad (11)$$

Часть дополнительных точек K_A в (11) может изменить отношение между вычисленной площадью $S_A(N_A)$ и уточненной площадью $S_A(N_A + K_A)$.

Введем отношение пропорций, ориентируясь на кривую сходимости C_2 на рисунке 5:

$$\Theta = N_A(N+K)/N(N_A+K_A). \quad (12)$$

При точных вычислениях $\Theta = 1$. При неточных вычислениях $\Theta \neq 1$. Из (12) относительная погрешность определится как

$$\xi = |1 - \Theta|. \quad (13)$$

Можно оценить относительную ошибку ξ в виде отношения

$$\xi = (N_A K - N K_A) / N(N_A + K_A). \quad (14)$$

Поясним на числовом примере.

1. Количество шагов моделирования $N=1000$, количество точек, попавших на участок A по снимку $N_A=500$. Количество дополнительных испытаний $K=20$, количество дополнительных точек, попав-

ших на участок $K_A=10$. Выражение (13) дает значение $\xi = 0$. Это идеальный вариант расчета и дополнительных вычислений, который говорит о целесообразности завершения моделирования.

2. Количество шагов моделирования $N=1000$, из них на участок попало $N_A=500$ точек. Количество новых бросаний $K=20$, из них $K_A=5$ точек попало на участок А. Относительная погрешность по формуле (14) получается равной $\xi = 0,009$ или 0.9 % от площади измеряемого участка. В этом случае можно либо проводить дополнительные шаги моделирования, либо не проводить, если погрешность является допустимой.

В современных компьютерах число шагов моделирования можно увеличивать до миллиона, однако при моделировании необходима разумная целесообразность. Если погрешность вычислений не превышает требуемых расчетов площади, то моделирование можно завершать.

Данный подход позволяет оценивать сравнительную мощность множеств и получать оценку площади ареала с заданной точностью.

Заключение

Предложен подход к оценке площади пространственного ареала посредством отношения пропорций количества точек на снимке с изображениями эталона и определяемого ареала. Ареалы описываются цифровыми моделями, полученными со снимка (беспилотного) летательного аппарата. Снимок дает возможность получать границы ареала. Представлена формализация процесса имитационного моделирования площади ареала по снимкам в терминах теории множеств. Показано, что пропорция быстрее сходится к асимптоте, чем абсолютное значение, по абсолютной и относительной погрешности. Основой подхода является сравнение изображений ареалов на снимке в предположении, что они пропорциональны ареалам реальности. В предложенном подходе используется эталонный объект с известной площадью. При наличии эталонного объекта с известной площадью отпадает необходимость в полномасштабной геометрической реконструкции поверхности, что представляет перспективное направление дальнейших исследований.

Предложенный подход отличается относительной простотой реализации и может быть использован при расчете площадей ареальных объектов по тепловым или радиолокационным снимкам.

Список литературы

1. Волчек А.А., Петров Д.О., Костюк Д.А. Алгоритм вычисления границ области затопления для речной сети с моделированием распространения воды по растровому представлению рельефа // Доклады Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. – 2016. – № 5 (99). – С. 73–78.
2. Храпов С.С., Хоперсков А.В., Еремин М.А. Моделирование динамики поверхностных вод: монография. – Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2010. – 131 с.
3. Кулик Е.Н., Байкин Д.А. Разливы нефтепродуктов на водной поверхности: методы анализа данных дистанционного зондирования Земли при их выявлении // Вестник СГУГиТ. – 2022. – Т. 27, № 4. – С. 61–73.
4. Amani M. et al. Remote sensing systems for ocean: A review. Part 1: Passive systems // IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing. – 2022. – Vol. 15. – P. 210–234.
5. Куракина Н.И., Мышко Р.А. ГИС моделирования нефтяных разливов на магистральных трубопроводах // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2020. – № 2. – С. 52–60.
6. Ознамец В.В. Обработка снимков с БПЛА с помощью проективных алгоритмов // Вектор ГеоНаук. – 2020. – Т. 3, № 2. – С. 74–81.
7. Федоровский А.С. БПЛА в геоэкологических и гидрологических исследованиях // Тихоокеанская география. – 2026. – № 1. – С. 68–82.
8. Гладких Т.Я. Обнаружение нефтяных загрязнений водных поверхностей с помощью БПЛА и мультиспектральных изображений на основе технологий глубокого обучения // Computational Nanotechnology. – 2024. – Т. 11, № 5. – С. 152–160. – DOI 10.33693/2313-223X-2024-11-5-152-160.

9. Цветков В.Я., Ознамец В.В., Филатов В.Н. Определение условной береговой линии по снимкам беспилотного летательного аппарата // Информация и космос. – 2019. – № 1. – С. 126–131.
10. Мигов Д.А., Винс Д.В. Параллельная реализация и имитационное моделирование оценки надёжности сети методом Монте-Карло // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2019. – № 47. – С. 66–74.
11. Цветков В.Я. Применение метода Монте-Карло для оценки загрязнения на морской поверхности // ИТНОУ: Информационные технологии в науке, образовании и управлении. – 2018. – № 1. – С. 35–40.
12. Киселева Э.В. Датчики случайных чисел // Путь в науку. Математика: тезисы докладов Всероссийской молодёжной конференции, Ярославль, 11–16 мая 2020 года. – Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2020. – С. 42–44.
13. Бештоков М.Х. О сходимости итерационного процесса для псевдопараболического уравнения третьего порядка с нелокальными краевыми условиями в многомерной области // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – № 2 (31). – С. 113–119.

References

1. Volchek A.A., Petrov D.O., Kostyuk D.A. Algoritmy vychisleniya granic oblasti zatopeniya dlya rechnoj seti s modelirovaniem rasprostraneniya vody po rastrovomu predstavleniyu rel'efa // Doklady Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta informatiki i radioelektroniki. – 2016. – № 5 (99). – S. 73–78.
2. Hrapov S.S., Hoperskov A.V., Eremin M.A. Modelirovanie dinamiki poverhnostnykh vod: monografiya. – Volgograd: Izd-vo VolGU, 2010. – 131 s.
3. Kulik E.N., Bajkin D.A. Razlivy nefteproduktov na vodnoj poverhnosti: metody analiza dannykh distancionnogo zondirovaniya Zemli pri ih vyyavlenii // Vestnik SGUGiT. – 2022. – T. 27, № 4. – S. 61–73.
4. Amani M. et al. Remote sensing systems for ocean: A review. Part 1: Passive systems // IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing. – 2022. – Vol. 15. – P. 210–234.
5. Kurakina N.I., Myshko R.A. GIS modelirovaniya neftyanykh razlivov na magistral'nykh truboprovodakh // Izvestiya SPbGETU «LETI». – 2020. – № 2. – S. 52–60.
6. Oznamec V.V. Obrabotka snimkov s BPLA s pomoshch'yu proektivnykh algoritmov // Vektor GeoNauk. – 2020. – T. 3, № 2. – S. 74–81.
7. Fedorovskij A.S. BPLA v geoeologicheskikh i gidrologicheskikh issledovaniyakh // Tihookeanskaya geografiya. – 2026. – № 1. – S. 68–82.
8. Gladkih T.Ya. Obnaruzhenie neftyanykh zagryaznenij vodnykh poverhnostej s pomoshch'yu BPLA i mul'tispektral'nykh izobrazhenij na osnove tekhnologij glubokogo obucheniya // Computational Nanotechnology. – 2024. – T. 11, № 5. – S. 152–160. – DOI 10.33693/2313-223X-2024-11-5-152-160.
9. Cvetkov V.Ya., Oznamec V.V., Filatov V.N. Opredelenie uslovnoj beregovoj linii po snimkam bespilotnogo letatel'nogo apparata // Informaciya i kosmos. – 2019. – № 1. – S. 126–131.
10. Migov D.A., Vins D.V. Parallel'naya realizaciya i imitacionnoe modelirovanie ocenki nadyozhnosti seti metodom Monte-Karlo // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika. – 2019. – № 47. – S. 66–74.
11. Cvetkov V.Ya. Primenenie metoda Monte-Karlo dlya ocenki zagryazneniya na morskoy poverhnosti // IT-NOU: Informacionnye tekhnologii v nauke, obrazovanii i upravlenii. – 2018. – № 1. – S. 35–40.
12. Kiseleva E.V. Datchiki sluchajnykh chisel // Put' v nauku. Matematika: tezisy dokladov Vserossijskoj molodyozhnoj konferencii, Yaroslavl', 11–16 maya 2020 goda. – Yaroslavl': Izd-vo YarGU, 2020. – S. 42–44.
13. Beshtokov M.H. O skhodimosti iteracionnogo processa dlya psevdoparabolicheskogo uravneniya tret'ego poryadka s nelokal'nymi kraevymi usloviyami v mnogomernoj oblasti // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki. – 2013. – № 2 (31). – S. 113–119.

Статья поступила в редакцию: 20.02.2026

Received: 20.02.2026

Статья принята к публикации: 27.07.2026

Accepted: 27.07.2026