

ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПО ШТАКЕЛЬБЕРГУ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ДРЕВОВИДНОЙ ИГРЕ

*Валентина Анатольевна Еськова, к.ф.-м.н., доцент
кафедра высшей математики
Тел.: 8 905 073 0405, e-mail: vales@kemsu.ru
Кемеровский государственный университет
<http://kvsu.kemsu.ru>*

Рассматривается двухуровневая дифференциальная игра, в которой на первом уровне иерархии находится управляющий центр A_0 , на втором – игроки B_1, \dots, B_m . Строится оптимальное по Штакельбергу решение данной игры. Показано, что оно не является динамически устойчивым.

Ключевые слова: некооперативные дифференциальные игры, иерархические дифференциальные игры, оптимальность по Штакельбергу.

Основными принципами оптимальности в некооперативной теории дифференциальных игр является равновесие по Нэшу, ε -равновесие, оптимальность по Парето, оптимальность по Штакельбергу. К сожалению, многие из принципов оптимальности формально переносятся из статической теории некооперативных игр и не проводится необходимый анализ их динамической устойчивости в смысле, введенном в [1]. Автором ранее была показана сильная динамическая устойчивость K -равновесия [2] и K_ε -равновесия [3].



В.А. Еськова

В ряде экономических приложений некооперативных дифференциальных игр, в частности, при олигополистической конкуренции с доминирующей фирмой, возникает несимметричное распределение информации, т.е. ситуация типа лидер-ведомый. Поведение лидера-ведомого было впервые рассмотрено экономистом Г. Штакельбергом в начале 20 века при описании стратегий фирм, конкурирующих на одном и том же рынке (в условиях олигополии). В таких ситуациях нередко одна из фирм оказывается сильнее остальных и навязывает им свою цену. Концепция равновесия по Штакельбергу используется для анализа иерархических систем.

Рассматривается двухуровневая дифференциальная игра, в которой на первом уровне иерархии находится управляющий центр A_0 , на втором – игроки B_1, \dots, B_m .

Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u, v_1, \dots, v_m), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

$$x \in R^n, \quad u \in \text{comp } U, \quad v_i \in \text{comp } V_i, \quad V = V_1 \times \dots \times V_m,$$

где $u(t)$ - управление центра, $v = (v_1, \dots, v_m)$ - вектор управлений игроков нижнего уровня.

Функционалы выигрышей игроков имеют вид:

$$I_0(u, v_1(u), \dots, v_m(u)) = \sum_{i=1}^m H_{i0}[v_i(u)],$$

$$I_i(u, v_1(u), \dots, v_m(u)) = H_i[v_i(u)] = (H_i^1[v_i(u)], \dots, H_i^{k_i}[v_i(u)]).$$

Центр, используя кусочно-программное управление $u(t)$, сообщает его игрокам нижнего уровня, а те выбирают вектор $v(u(t))$ - кусочно-программные управления, образующие ситуацию равновесия по Нэшу, из множества оптимальных управлений (реакций) $R(u) \subset V$. Центр, зная множество оптимальных управлений (реакций) игроков нижнего уровня, определяет множество оптимальных управлений $P(R)$, $P(R) \subset U$.

$$R(u) = \left\{ v : I_i(u, v(u)) \geq I_i(u, v(u)) \parallel v_i'(u), \forall v_i(u) \in V_i, i=1, \dots, m \right\},$$

$$P(R) = \left\{ u : u \in U, \min_{v(u) \in R(u)} I_0(u, v(u)) \geq \min_{v(u') \in R(u')} I_0(u', v(u')), \forall u' \in U \right\}.$$

Оптимальным по Штакельбергу решением $M(t_0, x_0)$ иерархической дифференциальной игры будем называть множество пар управлений (u, v) таких, что $u \in P(R)$, $v \in R(u)$, т.е.

$$M(t_0, x_0) = \{(u, v) : u \in P(R), v \in R(u)\}.$$

Пусть $(\bar{u}, \bar{v}) \in M(t_0, x_0)$, а $\bar{x}(t)$ - траектория системы (1) при управлениях (u', v_1, \dots, v_m) . Обозначим через \bar{u}^t, \bar{v}^t сужение управлений на интервал $(t, T]$, $\bar{u}^t \in U^t, \bar{v}^t \in V^t$. Решение текущей игры, начинающейся из положения $\bar{x}(t)$ в момент времени t , обозначим $M(t, \bar{x}(t))$.

Решение $M(t_0, x_0)$ иерархической дифференциальной игры будем считать динамически устойчивым [1], если для любой пары оптимальных управлений $(\bar{u}, \bar{v}) \in M(t_0, x_0)$ и любого $t \in [t_0, T]$ выполнено условие $(\bar{u}^t, \bar{v}^t) \in M(t, \bar{x}(t))$.

Покажем, что оптимальность по Штакельбергу не является динамически устойчивым принципом оптимальности.

Для динамической устойчивости решения, оптимального по Штакельбергу, необходимо, чтобы сужение управлений, оптимальных в игре из начальных условий, должно быть оптимальным в текущей игре. Пусть $(\bar{u}, \bar{v}) \in M(t_0, x_0)$, а $\bar{x}(t)$ - оптимальная траектория системы (1) при управлениях $(\bar{u}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$ в игре из начальных условий (t_0, x_0) , ведущая в точку $x^*(x_0, T - t_0)$, т.е. $\bar{x}(t) = x_0$ при $t = t_0$, $\bar{x}(t) = x^*(x_0, T - t_0)$ при $t = T$ и

$$I_0(\bar{u}, \bar{v}) = \max_{u \in U} \min_{v \in R(u)} I_0(u, v). \quad (2)$$

Рассмотрим текущую игру, начинающуюся из позиции $\bar{x}(t)$, $t \in [t_0, T]$. Предположим, что в момент t мы решили проверить, удовлетворяет ли выбранная точка $x^*(x_0, T - t_0)$ условию (2) для текущей задачи

$$I_0(\bar{u}^t, \bar{v}^t) = \max_{u^t \in U^t} \min_{v^t \in R(u^t)} I_0(u^t, v^t). \quad (3)$$

Пусть максимум в (3) достигается в точке $x^*(\bar{x}(t), T - t)$. Условие совпадения текущих точек, оптимальных по Штакельбергу, дает

$$x^*(x_0, T - t_0) = x^*(\bar{x}(t), T - t), t \in [t_0, T]. \quad (4)$$

Очевидно, что (4) имеет место крайне редко, т.к. множества $R(u^t)$ убывают по включению при $t \in [t_0, T]$ и $\min_{v^t \in R(u^t)} I_0(u^t, v^t)$, вообще говоря, убывает. А это означает, что выбор оптимальной по Штакельбергу точки из условия (2) не является динамически устойчивым.

Динамическая устойчивость и сильная динамическая устойчивость являются важными свойствами решений некооперативных дифференциальных игр и задач много-

критериального управления, поэтому оптимальность по Штакельбергу является неприемлемой в процессах, развивающихся во времени.

Литература

1. Петросян Л.А. Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками / Л.А. Петросян // Вестник Ленинградского университета. 1977. № 19. С. 46-52.
2. Еськова В.А. Сильная динамическая устойчивость ситуации K -равновесия в многошаговой неантагонистической игре на древовидном графе / В.А. Еськова // Вестник Кемеровского Государственного университета (серия математика). 2000. № 4. С. 260-266.
3. Еськова В.А. Сильная динамическая устойчивость K_ε -равновесия в некооперативных дифференциальных играх / В.А. Еськова // Инновационные недра Кузбасса. IT-техно-логии: сб. трудов VI Всероссийской научно-практической конференции. 2007. С. 298-301.

Stackelberg's optimum in multicriterial hierarchical tree game

Valentina Anatolyevna Es'kova, Candidate of Physics and Mathematics, Kemerovo State University, chair of higher mathematics

Two-level differential game is studied, where A_0 control centre is located at the first hierarchy level and B_1, \dots, B_m players are at the second one. The optimal game solution according to Stackelberg is constructed. And it is shown that it is not dynamically stable.

Keywords: Stackelberg's optimum, non-cooperative differential game, hierarchical differential games.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАНЖИРОВАНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ АЛЬТЕРНАТИВ (ЕЛЕСТРЕ) К ЗАДАЧЕ ВЫБОРА СТАРОСТЫ УЧЕБНОЙ ГРУППЫ

Гузель Шарипжановна Шкаберина, ст. преподаватель

Тел.: 266 0603, e-mail: z_guzel@mail.ru,

Елена Михайловна Товбис, к.т.н., доцент

Тел.: 265 3001, e-mail: sibstu2006@rambler.ru

Сибирский государственный технологический университет

www.kit-sibstu.ru

В статье рассматривается задача выбора старосты студенческой группы с точки зрения теории принятия решений. Предложен метод ранжирования многокритериальных альтернатив для ее решения. Рассмотрены и обобщены результаты применения метода на нескольких группах.

Ключевые слова: выбор, теория принятия решений, метод аналитической иерархии, обоснование, многокритериальность.

Введение

Устав высшего учебного заведения предусматривает назначение старосты в каждой учебной группе, включая как очную, так и заочную форму обучения. Выбор старосты группы – задача с первого взгляда простая. Однако неверное назначение может иметь плачевные для группы последствия – межличностные конфликты, снижение успеваемо-



Г.Ш. Шкаберина

сти, отстранение студентов от общественной жизни вуза и т.д. Таким образом, выбор старосты – задача ответственная, и такой выбор должен быть обоснованным.

С другой стороны выбор старосты – задача многокритериальная и слабоструктурированная, следовательно, для ее решения могут быть применены некоторые методы теории принятия решений.

В качестве обоснования выбора при принятии решения о назначении старосты в данной статье предлагается использовать метод ранжирования многокритериальных альтернатив (ELECTRE) [1].



Е.М. Товбис

1. Описание метода

Для применения данного метода необходимы следующие данные:

- перечень критериев $C_1...C_n$
- перечень альтернатив $A_1...A_m$

количественные оценки альтернатив по критериям a_{ij} , представленные в таблице 1.

Таблица 1

Количественные оценки альтернатив

Критерии	Альтернативы		
	A_1	...	A_m
C_1	a_{11}	...	a_{1m}
...
C_n	a_{n1}	...	a_{nm}

Основная цель метода - упорядочить альтернативы по степени их предпочтения.

- 1) Для каждого критерия эксперт устанавливает его вес w_i ;
- 2) Выдвигается гипотеза о превосходстве альтернативы A_1 над A_2 . Множество критериев разбивается на три подмножества, представленное на рисунке 1:

- Γ^+ - критерии, по которым A_1 предпочтительнее A_2 ,
- Γ^- - критерии, по которым A_2 предпочтительнее A_1 ,
- $\Gamma^=$ - критерии, по которым альтернативы A_1 и A_2 равнозначны.

- 3) Формируется таблица индексов согласия с выдвинутой гипотезой (таблица 2).
- 2). Индекс согласия $Z_{A_1A_2}$ определяет степень превосходства альтернативы A_1 над A_2 :

$$Z_{A_1A_2} = \frac{\sum_{i \in \Gamma^+} w_i}{\sum_{i=1}^m w_i} \tag{1}$$

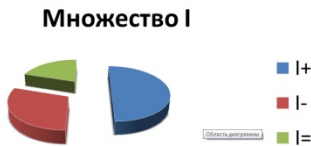


Рис. 1. Множество критериев

Таблица 2

Индексы согласия

	A_1	A_2	...	A_m
A_1	*	z_{12}	...	z_{1m}
A_2	z_{21}	*	...	z_{2m}
...
A_m	z_{m1}	z_{m2}	...	*

При этом индекс согласия находится в пределах $0 \leq Z_{A_1A_2} \leq 1$, либо $Z_{A_1A_2} = 1$, если Γ - пустое множество.

Формируется таблица индексов несогласия, определяющая степень отрицания гипотезы о превосходстве альтернативы A_1 над A_2 :

$$\bar{w}_{A_1A_2}(i) = \frac{|a_{i1} - a_{i2}|}{L_i}, i \in \Gamma^-, \tag{2}$$

где L – длина шкалы i -го критерия из множества Γ , заданная первоначально, либо определяется как разница между максимальной и минимальной количественной оцен-

кой каждого критерия. Окончательно индекс несогласия выбирается как максимальный из возможных и заносится в таблицу 3:

$$u_{A1A2} = \max_i \bar{u}_{A1A2}(i) \quad (3)$$

Таблица 3

Индексы несогласия

	A_1	A_2	...	A_m
A_1	*	u_{12}	...	u_{1m}
A_2	u_{21}	*	...	u_{2m}
...
A_m	u_{m1}	u_{m2}	...	*

4) Экспертом устанавливаются предельные значения индексов согласия и несогласия $z(1)$ и $u(1)$. Для каждой пары альтернатив проводится сравнение индексов с их предельными значениями: если $z_{A1A2} \geq z(1)$ и $u_{A1A2} \leq u(1)$, то альтернатива A_1 доминирует над A_2 .

5) Доминируемая альтернатива A_2 удаляется из рассматриваемых. Оставшиеся альтернативы образуют первое ядро недоминируемых альтернатив. Если же условие не выполняется, альтернативы объявляются несравнимыми либо эквивалентными. Ход формирования ядра представлен на рисунке 2.

6) Ослабляются требования к предпочтению альтернатив – уменьшается предельное значение индекса согласия до величины $z(2)$ и увеличивается предельное значение индекса несогласия до величины $u(2)$. В результате второй итерации формируется второе ядро недоминируемых альтернатив. Окончательное количество итераций определяется аналитиком. В последнее ядро входят наилучшие альтернативы, а последовательность ядер соответствует упорядочению альтернатив по предпочтению.



Рис.

2. Формирование ядра

2. Описание эксперимента.

Для участия в эксперименте привлечены студенты 2-4 курсов. Перед студентами поставлена цель – с помощью метода ELECTRE упорядочить студентов группы по степени их предпочтения на должность старосты группы. Критериями отбора и сравнения альтернатив каждого старосты были предложены следующие (посещаемость и желание не оговариваем):

- C_1 - успеваемость (учеба на «хорошо» и «отлично» по итогам сессии, текущая успеваемость);
- C_2 - коммуникабельность (умение находить общий язык с одногруппниками и преподавателями);
- C_3 - инициативность (активное участие в общественной жизни группы, факультета, университета);
- C_4 - организационная работа (информирование студентов и преподавателей, организация и проведение собраний, контроль за исполнением поручений, выданных группе).

Как в качестве экспертов, так и в качестве альтернатив выступали сами студенты. Список альтернатив для каждого эксперта формируется из списка студентов группы путём вычёркивания фамилии самого эксперта, таким образом, сами себя испытуемые оценивать не могли. Также студентам группы было предложено расставить веса по каждому критерию.

На примере одной из групп, обучающихся по сокращённой очной форме обучения, рассмотрим полученные расчёты. В качестве альтернатив предложено 17 фамилий

(ФИО1..ФИО17). Экспертами выступало 16 студентов, в ходе работы каждый студент заполнил одну таблицу вида № 1 и установил вес каждому критерию.

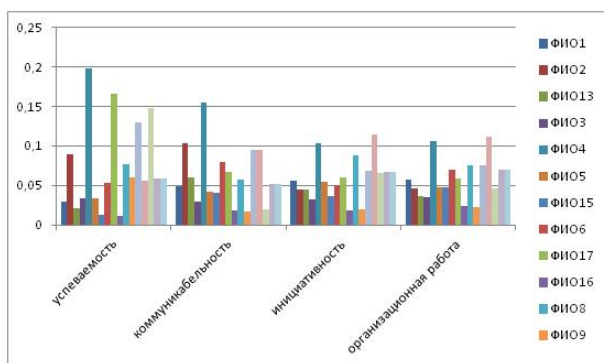


Рисунок 3 - Показатели экспертов по критериям

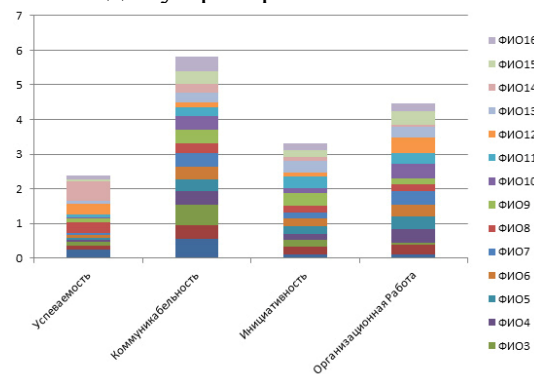


Рис.4. Приоритеты критериев учебной группы

Таблица 4

Количественные оценки экспертов

	ФИО1	ФИО2	ФИО13	ФИО3	ФИО4	ФИО5	ФИО15	ФИО6	ФИО17
успеваемость	0,029262	0,089396	0,020543	0,032839	0,198307	0,033277	0,012535	0,053577	0,165862
коммуникабельность	0,048337	0,103369	0,060026	0,029694	0,154467	0,04244	0,040138	0,079491	0,067514
инициативность	0,055994	0,045197	0,045036	0,03261	0,103151	0,054186	0,036895	0,050079	0,059555
организационная работа	0,057493	0,046166	0,035762	0,034764	0,105718	0,047543	0,04741	0,070287	0,058689
	ФИО16	ФИО8	ФИО9	ФИО10	ФИО11	ФИО12	ФИО7	ФИО14	
успеваемость	0,011458	0,077162	0,059448	0,130234	0,05585	0,147958	0,059174	0,059174	
коммуникабельность	0,017554	0,057345	0,017222	0,094441	0,094572	0,018882	0,051237	0,051237	
инициативность	0,017525	0,087784	0,019015	0,068785	0,114969	0,065602	0,067652	0,067652	
организационная работа	0,024153	0,075667	0,022657	0,075882	0,112283	0,046003	0,070169	0,070169	

В итоге по данной группе заполнено 16 таблиц вида № 1 и расставлены общие веса критериев учебной группы. Из рисунка 3 видно, что студенты данной группы выделяют в первую очередь коммуникабельность, для них очень важно налаживать контакты, быть способными к конструктивному и доброжелательному общению с другими людьми. И лишь на последнее место поставлена успеваемость. Таким образом вес критерия «Успеваемость» - 1, «Коммуникабельность» - 4, «Инициативность» - 2, «Организационная работа» - 3. В таблице 4 и рисунке 3 представлены общие данные экспертов при заполнении количественных оценок альтернатив по критериям.

Первоначально старостой группы был человек под фамилией ФИО14. Применение метода показало, что наилучшие альтернативы – это два человека под фамилиями ФИО4 и ФИО11. На втором месте один человек ФИО7. На третьем месте все оставшиеся фамилии, включая студента под фамилией ФИО14.

По данному методу выполнена программная реализация, пошаговое выполнение представлено на рисунках 5-8. Вводимыми параметрами является количество критериев и альтернатив. От эксперта требуется заполнить таблицу количественными оценками, веса и длину шкал критериев. Таблицы индексов согласия и несогласия заполняются автоматически. Далее, изменяя предельные значения индексов согласия и несогласия, формируются ядра. Альтернативы, которые формируют ядро, выделяются черным цветом.

Выводы

Метод ранжирования многокритериальных альтернатив с помощью автоматизированных средств применён в 7 группах среди 60 студентов и показал следующее:

1. В одной из групп староста, назначенный деканатом, не соответствует оптимальной альтернативе группы, в связи с чем, он был заменён на выбранную альтернативу.
2. Приоритетным критерием для опрошенных студентов является коммуникабельность, успеваемость же находится на втором месте, что показано на рисунке 4.

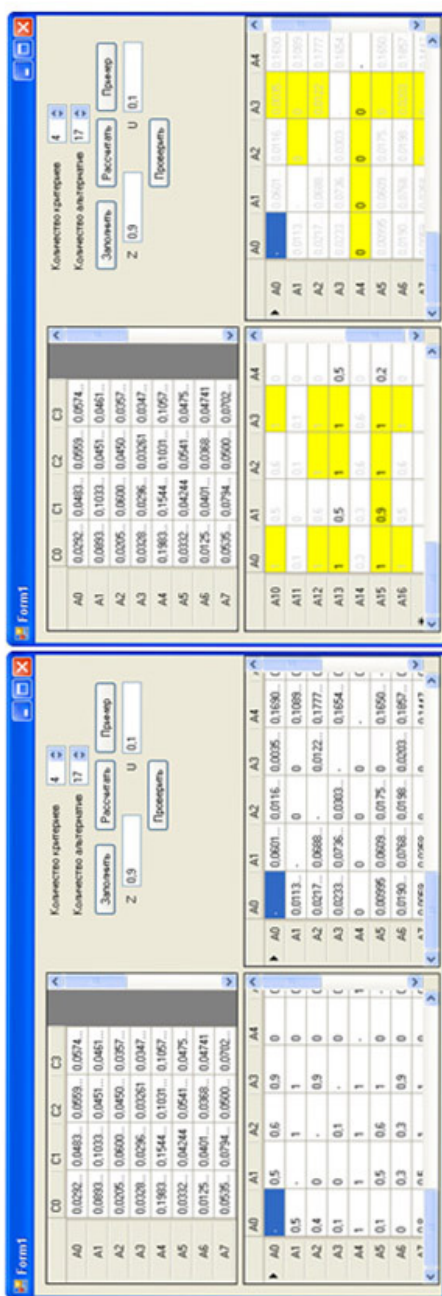


Рис.6. Формирование первого ядра



Рис.8 Формирование третьего ядра

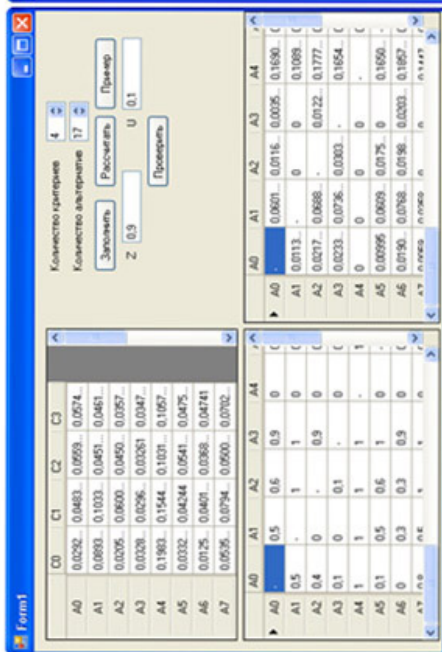


Рис.5. Заполнение и расчет данных

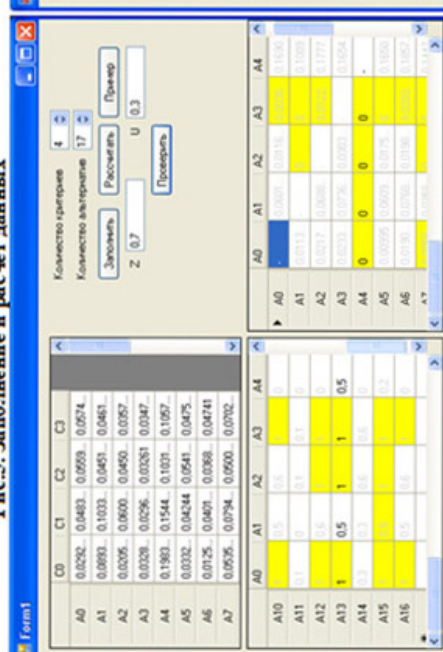


Рис.7. Формирование второго ядра

Литература

1. Черноморов Г.А. Теория принятия решений / Г.А. Черноморов. – Новочеркасск: Юж.-Рос. гос. Техн. ун-т, 2002. – 276 с.
2. Шкаберина Г.Ш. Теория принятия решений: учебное пособие / Е.М. Товбис, Г.Ш. Шкаберина. – Красноярск: СибГТУ, 2013. – 73 с.

ELECTRE technique of ranking multicriteria alternatives application to the problem of selecting elders training group

*Guzel' Sharipjanovna Shkaberina, teacher, Siberian state technological university
Elena Mihaylovna Tovbis, ph.d., docent, Siberian state technological university*

The article deals with the problem of choosing student group elders from the decision theory point of view. We propose an ELECTRE technique for solving this problem. Results of the application ELECTRE method on several groups reviewed and summarized.

Keywords: choice, decision theory, technique of ranking multicriteria alternatives, justification, multicriteriality.