The numerical algorithm of implementation of thermo-mechanical model of the dynamics of Elastic-plastic material

Christina Sergeevna Svobodina, graduate student
ICM SB RAS

In this paper a range of questions are considered related to the construction and numerical implementation of a mathematical model of elastic-plastic deformation of materials under intense external disturbances. A simplified thermodynamically correct model of elastically compressible plastic medium is proposed. Based on the method of splitting into physical processes and spatial variables efficient numerical algorithm is constructed for geometrically linear version of the model.

Key words: elasticity, plasticity, thermodynamics, finite strains, shock wave, splitting method.

УДК 517.54: 517.862

ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ В НОРМИРОВАННЫХПРОСТРАНСТВАХ (q,ρ) – ФОРМ

***Ольга Алексеевна Сергеева**, к.ф.-м.н., доцент*
Тел.: 8 904 3755223, e-mail: Okoin@yandex.ru
Кемеровский государственный университет, кафедра математического анализа
http://www.math.kemsu.ru/kma

В статье приведен обзор основных результатов, полученных в теории мультипликативных автоморфных форм ($(q,\rho)-$форм) на компактной римановой поверхности, со ссылками на опубликованные работы, где можно найти их подробные доказательства. В качестве демонстрации техники работы с такими формами, последние теоремы о вложении в пространствах $(q,\rho)-$форм приводятся с доказательством.

Ключевые слова: Интегральные операторы, билинейные спаривания, характеры, мульт ипликативные автоморфные формы, двойственность, ряд Пуанкаре.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, № 12-01-31256 мол_а.

Введение

В работах [1]–[7] было начато изучение нормированных пространств мультипликативных автоморфных форм. В этих пространствах были введены нормы, билинейные спаривания, функционалы и операторы, действующие на мультипликативных автоморфных формах ($(q,\rho)-$формах). Классические результаты теории однозначных автоморфных форм были получены в работах Л. Берса, И. Кра [8] и соответствовали случаю тривиального характера $\rho = 1$.


О.А. Сергеева

Отличительной чертой более общего мультипликативного случая является наличие нетривиального характера $\rho \neq 1$ в задании всех изучаемых здесь объектов [9], [10]. Характер проявляет себя как дополнительный сомножитель в условии инвариантности автоморфных форм относительно группы конформных преобразований комплексной плоскости $\overline{C}$, униформизирующей в плоской области $D \subset \overline{C}$ компактную риманову поверхность рода $h \geq 2$. С появлением этого дополнительного компонента, определяющего мультипликативный случай, сразу возникает необходимость в соответствующем изменении основных элементов функционального анализа в пространствах автоморфных форм. Кроме того, появляется новое важное понятие мультипликативно двойственных форм (их произведение — однозначная форма).

Всё это порождает новое направление в теории автоморфных форм. Некоторые классические операторы получают обобщение на мультипликативный случай. При этом появляются и новые возможности. Так, например, введённые здесь операторы двойственности не только, подобно своему классическому предшественнику – оператору Берса, осуществляют отражение области определения голоморфных форм относительно квазиокружности, но и устанавливают связь между двойственными пространствами этих форм, что расширяет область их приложения. Специально для мультипликативно двойственных форм вводится симметричный вариант билинейного спаривания, который непосредственно может быть также использован в теории однозначных функций и дифференциалов.

Цель данной статьи – сделать обзор основных полученных результатов при изучении пространств мультипликативных автоморфных форм. Приводятся свойства операторов и функционалов, устанавливающих связь между пространствами:

1) измеримых и голоморфных $(q,\rho)-$форм;
2) двойственных $(q,\rho)-$форм;
3) форм для тривиальной группы $G=id$ и мультипликативных форм для произвольной группы G, изоморфной фуксовой группе первого рода;
4) $(q,\rho)-$форм для специальных классов характеров;
5) $(q,\rho)-$форм для различных порядков суммирования;
6) $(q,\rho)-$форм для различных порядков автоморфности;
7) голоморфных $(q,\rho)-$интегралов Эйхлера и голоморфных $(q,\rho)-$форм.

С доказательством, демонстрирующим технику работы с мультипликативными автоморфными формами, рассмотрим теоремы вложения для пространств $(q,\rho)-$форм.

п. 1. Нормы и билинейные спаривания в пространствах $(q,\rho)-$форм

Пусть $D\subset\overline{C}-$ открытое множество, конформно эквивалентное единичному кругу Δ; $G-$ конечнопорожденная разрывная группа конформных преобразований D на себя такая, что $D/G=F-$ компактная риманова поверхность рода $h\geq 2$; $Hom(G,C^*)-$ группа характеров ρ из G в $C^*=C\setminus\{0\}$ с операцией умножения.

Определение 1. *Измеримой (голоморфной) мультипликативной автоморфной формой порядка автоморфности q с характером ρ на F (или кратко $(q,\rho)-$формой) называется однозначная измеримая(голоморфная) функция φ на D с условием*

$$\varphi(Az)A'(z)^q=\rho(A)\varphi(z)\,,A\in G,\ \ z\in D\,,D/G=F\,.$$

В частности, форма f нулевого порядка автоморфности с характером ρ на D называется *мультипликативной функцией для* ρ. Если f_1 – мультипликативная функция для ρ_1 без нулей и полюсов на D, то характер ρ_1 называется *несущественным*, а сама такая функция f_1 называется *мультипликативной единицей для* ρ_1 [9-10].

Определение 2. *$(q,\rho)-$форма и $(q,\dfrac{1}{\rho})-$форма являются $\rho-$двойственными, а $(q_1,\rho)-$форма и $(q_2,\rho)-$форма — $q-$двойственными формами для $q=q_1+q_2$. Формы одновременно $q-$ и $\rho-$двойственные называются $(q,\rho)-$двойственными формами.*

Для целого $q \geq 2$, вещественного $p \geq 1$ и характера $\rho \in Hom(G, C^*)$ $(q,\rho)-$формы φ на D, для которых

$$\|\varphi\|_0^p = \|\varphi\|_{q,\rho,p,G}^p = \iint_{D/G} \lambda(z)^{2-pq} \left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p \left|dz \wedge d\bar{z}\right| < \infty, \tag{1}$$

образуют банахово пространство $L_{q,\rho}^p(D,G)$ [1]. Здесь $f_1 -$ мультипликативная единица для несущественной составляющей ρ_1 характера ρ в разложении Фаркаша-Кра [9], [10], $\lambda(z)-$ коэффициент метрики Пуанкаре [8]. При любом p голоморфные формы в $L_{q,\rho}^p(D,G)$ образуют замкнутое подпространство $A_{q,\rho}^p(D,G)$.

Зафиксируем обобщенный коэффициент Бельтрами ν_q класса *C(D)* для *q*[8], т. е. непрерывную на D функцию ν_q со свойствами:

1) $\nu_q(Az)A'(z)^{1-q}\overline{A'(z)} = \nu_q(z), z \in D,\ A \in G$,

2) $\left|\nu_q(z)\right| \leq K \cdot \lambda(z)^{2-q}$ почти всюду на C.

Тогда на множестве $(q,\rho)-$форм, интегрируемых со степенью *p,* можно также задать другую норму по правилу:

$$\|\varphi\|_1^p = \iint_{D/G} \lambda(z)^{2(1-p)} \left|\frac{\nu_q(z)\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p \left|dz \wedge d\bar{z}\right| < \infty. \tag{2}$$

Используя свойства ν_q, нетрудно установить оценку:

$$\|\varphi\|_1 \leq K \cdot \|\varphi\|_0,$$

где K — константа из оценки обобщенного коэффициента Бельтрами ν_q: $\left|\nu_q\right| \leq K \cdot \lambda^{2-q}$.

В отличие от нормы (1), при дополнительных условиях на нули функции ν_q [4], норма (2) может быть также использована для мероморфных $(q,\rho)-$форм, интегрируемых со степенью *p*.

Формы ψ, для которых $\|\psi\|_{q,\rho,\infty} = \sup\limits_{z\in D}\left\{\lambda(z)^{-q}\left|\frac{\psi(z)}{f_1(z)}\right|\right\} < \infty$, образуют банахово пространство $L_{q,\rho}^\infty(D,G)$ ограниченных $(q,\rho)-$форм [1].

Если $G = id$, то в обозначениях рассмотренных выше пространств символ G будем опускать [6].

Для форм $\varphi_1 \in L_{q,\rho}^p(D,G)$ и $\varphi_2 \in L_{q,\rho}^{p'}(D,G)$, с условием $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, определено билинейное спаривание [1], [2], [3]:

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{q,\rho,D,G} = \frac{i}{2} \iint_{D/G} \lambda(z)^{2-2q} \frac{\varphi_1(z)\overline{\varphi_2(z)}}{\left|f_1(z)\right|^2} dz \wedge d\bar{z}, \tag{3}$$

которое работает только с $(q,\rho)-$формами, имеющими общий порядок q и общий характер ρ.

Для случая $(q,\rho)-$двойственных форм $\varphi \in L_{q_1,\rho}^p(D,G)$ и $\psi \in L_{q_2,\frac{1}{\rho}}^{p'}(D,G)$ вводится другое билинейное спаривание [2], [3]:

$$\left\langle \varphi,\psi \right\rangle_{q_1,q_2,D,G} = \frac{i}{2}\iint\limits_{D/G} \mu_q(z)\varphi(z)\psi(z)dz\wedge d\bar{z}\,, \quad (4)$$

где μ_q — фиксированный обобщенный коэффициент Бельтрами класса $C(D)$ для $q = q_1 + q_2$, $2 \le q \in N$.

Билинейное спаривание (4) симметрично и непосредственно может быть также использовано в теории мультипликативных мероморфных [4] и однозначных автоморфных форм.

Теорема 1 [1].*Пусть* $\rho = \rho_1$ *— несущественный,* $1 \le p < \infty$ *и* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Тогда билинейное спаривание (3) задаёт антилинейный топологический изоморфизм между* $A^{p'}_{q,\rho_1}(D,G)$ *и пространством, сопряжённым к* $A^{p}_{q,\rho_1}(D,G)$. *Кроме того, если* $\psi \in A^{p'}_{q,\rho_1}(D,G)$ *и линейный функционал* l *на* $A^{p}_{q,\rho_1}(D,G)$ *соответствуют друг другу при этом изоморфизме, то верноненеравенство* $c_q^{-1}\|\psi\|_{q,\rho_1,p',G} \le \|l\| \le \|\psi\|_{q,\rho_1,p',G}$, *где* $\|l\|$ *— норма линейного функционала* l, *а* $c_q = \frac{2q-1}{q-1}$.

Лемма 1 [4]. *Пусть* ν_{q_1} *и* ν_{q_2} *— два обобщенных коэффициента Бельтрами для* q_1 *и* q_2 *соответственно. Тогда*

$$\mu_q(z) = \frac{\nu_{q_1}(z)\cdot\nu_{q_2}(z)}{\lambda(z)^2}, \quad z \in D\,, (5)$$

тоже обобщенный коэффициент Бельтрами для $q = q_1 + q_2$ *на D. Кроме того, таким способом можно получить любой обобщенный коэффициент Бельтрами для* $q = q_1 + q_2$.

Теорема 2 [4]. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\rho \in Hom(G, C^*)$ *и* $A = (a_1 \cdots a_s)$ *— целый дивизор на D. Тогда симметричное билинейное спаривание (4) задаёт линейное соответствие между пространством* $\Omega^{p}_{q_1,\rho}(D,G;A)$ *— мероморфных* $(q_1,\rho)-$*форм, кратных дивизору A на D и интегрируемых со степенью p, и пространством* $\left(\Omega^{p'}_{q_2,\frac{1}{\rho}}\left(D,G;\frac{1}{A}\right)\right)^*$, *сопряженным к* $\Omega^{p'}_{q_2,\frac{1}{\rho}}\left(D,G;\frac{1}{A}\right)$.

Кроме того, для голоморфной $\varphi \in A^{p}_{q_1,\rho}(D,G;A)$, *кратной дивизору A, и мероморфной* $\psi \in \Omega^{p'}_{q_2,\frac{1}{\rho}}\left(D,G;\left(\frac{1}{A}\right)\right)$ $(q,\rho)-$*двойственных форм справедлива оценка*

$$\left|\left\langle \varphi,\psi \right\rangle_{q_1,q_2,D,G}\right| \le \frac{K_1}{2}\|\varphi\|_o \cdot \|\psi\|_1,$$

где коэффициенты Бельтрами $\mu_{q_1+q_2}$ *и* ν_{q_1} *(в задании билинейного спаривания (4) и нормы (2) в пространстве мероморфных* $(q,\rho)-$*форм соответственно) связаны формулой (5), причём* $\nu_{q_2}(a_i) = 0$, *для всех* $a_i \in D$, $i = 1,\ldots,s$, *а* K_1 *– константа из оценки* ν_{q_1}.

п. 2. Оператор проектирования $\beta_{q,\rho}$ измеримых $(q,\rho)-$ форм на голоморфные

Измеримые и голоморфные $(q,\rho)-$формы связаны друг с другом с помощью оператора $\beta_{q,\rho}$, заданного по формуле:

$$\left(\beta_{q,\rho}\varphi\right)(z)=\iint\limits_D \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{\left|f_1(\zeta)\right|^2}K_{q,\rho_1}(z,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta\wedge d\overline{\zeta},$$

для всех $z\in D$, при которых интеграл абсолютно сходится. Здесь ρ_1 — несущественная составляющая характера ρ в разложении Фаркаша-Кра [9], [10]; $K_{q,\rho_1}(z,\zeta)=\dfrac{(2q-1)\pi^{q-1}i}{2}k_D(z,\zeta)^q f_1(z)\overline{f_1(\zeta)}$, где $k_D(z,\zeta)$ — кернфункция Бергмана, определённая формулой $k_\Delta(z,\zeta)=\left[\pi(1-z\overline{\zeta})^2\right]^{-1}$ для $(z,\zeta)\in\Delta\times\Delta$ и требованием конформной инвариантности выражения $k_D(z,\zeta)dz\wedge d\overline{\zeta}$.

Теорема 3 [6]**.** *Для целого $q\geq 2$ оператор $\beta_{q,\rho}$ является ограниченным линейным отображением пространства $L^p_{q,\rho}(D,G)$ в $A^p_{q,\rho}(D,G)$, $1\leq p\leq\infty$, обладающим свойствами:*

1) норма $\left\|\beta_{q,\rho}\right\|\leq c_q$, где $c_q=\dfrac{2q-1}{q-1}$;

2) для всех $\varphi\in L^p_{q,\rho}(D,G)$, $\psi\in L^{p'}_{q,\rho}(D,G)$, где $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, выполняется свойство

самосопряжённости оператора $\beta_{q,\rho}$:

$$\left(\beta_{q,\rho}\varphi,\psi\right)_{q,\rho,D,G}=\left(\varphi,\beta_{q,\rho}\psi\right)_{q,\rho,D,G};$$

3) для несущественного характера $\rho=\rho_1$ и $\varphi\in A^p_{q,\rho_1}(D,G)$ верно $\beta_{q,\rho_1}\varphi=\varphi$.

п. 3. Операторы двойственности $(q,\rho)-$форм

Пусть c— квазиокружность в $\overline{C}$, $D_1=Intc$, $D_2=Extc$; $\lambda(z)|dz|$ — метрика Пуанкаре, заданная в $D_1\cup D_2$; G — отмеченная конечнопорожденная квазифуксова группа первого рода дробно-линейных преобразований $\overline{C}$ с инвариантной кривой c такая, что D_1/G — компактная риманова поверхность рода $h\geq 2$.

Для $\varphi\in A^p_{q_1,\rho}(D_1,G)$ определены операторы двойственности:

$$\left(\mathrm{B}^{\hom}_c\varphi\right)(z)=\frac{i}{2}\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-2q_1}}{(\zeta-z)^{2q_1}}\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\overline{f_1(\zeta)}f_1(z)}d\zeta\wedge d\overline{\zeta},\quad z\in D_2,$$

$$\left(\mathrm{B}^{ord}_c\varphi\right)(z)=\frac{i}{2}\iint\limits_{D_1}\frac{\mu_q(\zeta)}{(\zeta-z)^{2q_2}}\frac{\varphi(\zeta)f_1(z)}{f_1(\zeta)}d\zeta\wedge d\overline{\zeta},\quad q=q_1+q_2,\quad z\in D_2.$$

Кроме обращения области определения формы относительно квазиокружности c, эти два оператора устанавливают связь между пространствами двойственных голоморфных $(q,\rho)-$форм. Оператор $\mathrm{B}^{\hom}_c$ обращает характер формы, сохраняя её порядок: $\mathrm{B}^{\hom}_c\varphi\in A^p_{q_1,\frac{1}{\rho}}(D_2,G)$. Оператор B^{ord}_c, наоборот, — q-двойственно изменяет порядок формы и не влияет при этом на её характер: $\mathrm{B}^{ord}_c\varphi\in A^p_{q_2,\rho}(D_2,G)$, $q=q_1+q_2$.

Обозначим $k_q=\dfrac{4^{2(q-1)}2\pi}{q}$ — константу для целого $q\geq 2$.

Теорема 4 [2, 3]. *Для произвольного характера $\rho\in Hom(G,C^*)$ интегральный оператор двойственности $\mathrm{B}^{\hom}_c$ является непрерывным антилинейным отображением* *между пространствами $\rho-$двойственных форм:* $\mathrm{B}_c^{\hom}: A^p_{q,\rho}(D_1,G)\to A^p_{q,\frac{1}{\rho}}(D_2,G)$, $p\in R, 1\le p<\infty$, *с нормой* $\left\|\mathrm{B}_c^{\hom}\right\|\le k_q$.

Кроме того, для любых голоморфных $\rho-$двойственных форм $\varphi\in A^p_{q,\rho}(D_1,G)$ *и* $\psi\in A^{p'}_{q,\frac{1}{\rho}}(D_2,G)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, *верно*

$$\left(B_c^{\hom}\varphi,\psi\right)_{q,\frac{1}{\rho},D_2,G}=\overline{\left(\varphi,B_{-c}^{\hom}\psi\right)}_{q,\rho,D_1,G}. \tag{6}$$

Теорема 5 [2, 3]. *Для произвольного характера $\rho\in Hom(G,C^*)$ интегральный оператор двойственности B_c^{ord} является непрерывным линейным отображением из $A^p_{q_1,\rho}(D_1,G)$ в $A^p_{q_2,\rho}(D_2,G)$, $p\in R, 1\le p<\infty$, с нормой $\left\|\mathrm{B}_c^{ord}\right\|\le Kk_{q_2}$ (где K — константа из оценки обобщенного коэффициента Бельтрами: $\left|\mu_q\right|\le K\lambda^{2-q}$ для $q=q_1+q_2$).*

Кроме того, для любых голоморфных $\rho-$двойственных форм $\varphi\in A^p_{q_1,\rho}(D_1,G)$ и $\psi\in A^{p'}_{q_1,\frac{1}{\rho}}(D_2,G)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, верно

$$\left\langle B_c^{ord}\varphi,\psi\right\rangle_{q_2,q_1,D_2,G}=\left\langle\varphi,B_{-c}^{ord}\psi\right\rangle_{q_1,q_2,D_1,G}. \tag{7}$$

Формулы (6) и (7) устанавливают свойство «самосопряжённости» операторов $\mathrm{B}_c^{\hom}$ и B_c^{ord} относительно билинейных спариваний (3) и (4) соответственно в $\rho-$двойственных пространствах. Следующая теорема показывает сопряжённость операторов двойственности $\mathrm{B}_c^{\hom}$ и B_c^{ord} друг с другом в q-двойственных пространствах мультипликативных голоморфных автоморфных форм и устанавливает связь между билинейными спариваниями (3) и (4) в этих пространствах.

Теорема 6 [5, 7]. *Для произвольного характера $\rho\in Hom(G,C^*)$ и q-двойственных голоморфных форм $\varphi\in A^p_{q_1,\rho}(D_1,G)$ и $\psi\in A^{p'}_{q_2,\rho}(D_2,G)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, справедливо равенство:*

$$\left(B_c^{ord}\varphi,\psi\right)_{q_2,\rho,D_2,G}=\left\langle\varphi,B_{-c}^{\hom}\psi\right\rangle_{q_1,q_2,D_1,G}. \tag{8}$$

п. 4. Мультипликативный ряд Пуанкаре

Для функции φ, голоморфной на D, определим мультипликативный ряд Пуанкаре ($\rho-$ряд Пуанкаре) по формуле

$$\left(\Theta_{q,\rho}\varphi\right)(z)=\sum_{A\in G}\frac{\varphi(Az)A'(z)^q}{\rho(A)}$$

для всех z, для которых правая часть сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах множества D.

Теорема 7 [6]. *Для целого $q\ge 2$ $\Theta_{q,\rho}$ является непрерывным линейным отображением пространства $A^1_{q,\rho}(D)$ в $A^1_{q,\rho}(D,G)$ с нормой $\left\|\Theta_{q,\rho}\right\|\le 1$, а в случае несущественного характера $\rho=\rho_1$ отображение $\Theta_{q,\rho}$ будет даже сюръективно. Кроме того, для любого $\psi\in A^p_{q,\rho_1}(D,G)$, где ρ_1 — несущественный характер, $1\le p\le\infty$, существует такое $\varphi\in A^p_{q,\rho_1}(D)$, что $\psi=\Theta_{q,\rho_1}\varphi$ и $\|\varphi\|_{q,\rho_1,p}\le c_q\cdot\|\psi\|_{q,\rho_1,p,G}$, $c_q=\frac{2q-1}{q-1}$.*

Используя теоремы о линейном функционале, заданном билинейным спариванием (3), об операторе проектирования $\beta_{q,\rho}$ и о сопряжённости (8) операторов двойственности $B_c^{\hom}$ и B_c^{ord} друг с другом, доказана:

Теорема 8 [7]. *Для целого* $q \ge 2$ *и несущественного характера* $\rho = \rho_1$ *интегральные операторы двойственности* $B_c^{\hom}$ *и* B_c^{ord} *«коммутируют» с линейным отображением*

$\Theta_{q,\rho_1,D_i} : A^1_{q,\rho_1}(D_i) \to A^1_{q,\rho_1}(D_i, G)$, *определяющим ряд Пуанкаре на* D_i, *а именно:*

1. $\left(B_c^{\hom} \circ \Theta_{q,\rho_1,D_1}\right)\varphi = \left(\Theta_{q,\frac{1}{\rho_1},D_2} \circ B_c^{\hom}\right)\varphi \in A^1_{q,\frac{1}{\rho_1}}(D_2, G)$ *для всех* $\varphi \in A^1_{q,\rho_1}(D_1)$;
2. $\left(B_c^{ord} \circ \Theta_{q_1,\rho_1,D_1}\right)\varphi = \left(\Theta_{q_2,\rho_1,D_2} \circ B_c^{ord}\right)\varphi \in A^1_{q_2,\rho_1}(D_2, G)$ *для всех* $\varphi \in A^1_{q_1,\rho_1}(D_1)$,

$q_1 + q_2 = q \ge 2$.

п. 5. Вложения в пространствах (q,ρ) – форм по порядку суммирования

Теорема 9. *Для целого* $q \ge 1$, *произвольного характера* $\rho \in Hom(G, C^*)$ *и* $p \ge 1$ *имеют место непрерывные вложения*

$$A^\infty_{q,\rho}(D,G) \subset A^p_{q,\rho}(D,G) \subset A^1_{q,\rho}(D,G).$$

Доказательство. Пусть ω — локально-конечная фундаментальная область группы Gв D. Тогда её площадь $S(\omega)$ ограничена:

$$0 < S(\omega) = 2\iint_\omega \lambda(z)^2 \left|dz \wedge d\bar{z}\right| < \infty.$$

Возьмём $\varphi \in A^\infty_{q,\rho}(D,G)$ и $1 \le p < \infty$. Тогда $\|\varphi\|_{q,\rho,\infty} < \infty$ и имеем

$$\|\varphi\|^p_{q,\rho,p,G} = \iint_\omega \lambda(z)^{2-pq} \left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p \left|dz \wedge d\bar{z}\right| \le \sup_{z\in D}\left\{\lambda(z)^{-qp}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p\right\} \iint_\omega \lambda(z)^2 \left|dz \wedge d\bar{z}\right| =$$

$$= \left(\sup_{z\in D}\left\{\lambda(z)^{-q}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|\right\}\right)^p \iint_\omega \lambda(z)^2\left|dz \wedge d\bar{z}\right| = \|\varphi\|^p_{q,\rho,\infty}\,\frac{S(\omega)}{2} < \infty.$$

Следовательно, $\varphi \in A^p_{q,\rho}(D,G)$, а значит $A^\infty_{q,\rho}(D,G) \subset A^p_{q,\rho}(D,G)$. Непрерывность вложения также следует из оценки $\|\varphi\|_{q,\rho,p,G} \le \|\varphi\|_{q,\rho,\infty} \cdot \sqrt[p]{\frac{S(\omega)}{2}}$.

Возьмём теперь $\varphi \in A^p_{q,\rho}(D,G)$, где $1 < p < \infty$. Тогда $\|\varphi\|_{q,\rho,p,G} < \infty$ и, используя неравенство Гёльдера, получаем оценки:

$$\|\varphi\|_{q,\rho,1,G} = \iint_\omega \lambda(z)^{2-q}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|\left|dz \wedge d\bar{z}\right| = \iint_\omega \lambda(z)^2\left(\lambda(z)^{-q}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|\right)\left|dz \wedge d\bar{z}\right| \le$$

$$\le \left(\iint_\omega \lambda(z)^2 \lambda(z)^{-qp}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p \left|dz \wedge d\bar{z}\right|\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\iint_\omega \lambda(z)^2\left|dz \wedge d\bar{z}\right|\right)^{\frac{p-1}{p}} = \|\varphi\|_{q,\rho,p,G} \cdot \left(\frac{S(\omega)}{2}\right)^{\frac{p-1}{p}} < \infty.$$

Из последнего заключаем, что φ также принадлежит пространству $A^1_{q,\rho}(D,G)$ и вложение $A^p_{q,\rho}(D,G) \subset A^1_{q,\rho}(D,G)$ непрерывно.Теорема 9 доказана.

п. 6. Вложения в пространствах $(q,\rho)-$форм по порядку автоморфности

Здесь ограничимся частным случаем, когда $D=\Delta=\{z\in C:|z|<1\}$ — единичный диск (это необходимо, чтобы воспользоваться специальной оценкой Δ).

Теорема 10. *Для любого* $t>\dfrac{1}{p}$, *где* $1\le p<\infty$ *и любого характера* $\rho\in Hom(G,C^*)$ *имеет место непрерывное вложение*

$$A^p_{q,\rho}(\Delta,G)\subset A^p_{q+t,\rho}(\Delta).$$

Доказательство. Рассмотрим $k(z,\zeta)$ — кернфункцию Бергмана, определенную формулой $k(z,\zeta)=\left[\pi\left(1-z\overline{\zeta}\right)^2\right]^{-1}$, $z\in\Delta$, $\zeta\in\Delta$, и требованием конформной инвариантности выражения $k(z,\zeta)dz\wedge d\overline{\zeta}$. При заданных*p*и *t*докажем следующее тождество с участием этой функции:

$$\frac{2}{\pi^{pt-1}(pt-1)}\lambda(z)^{pt}=\iint\limits_{\Delta}\lambda(\zeta)^{2-pt}\left|k(z,\zeta)\right|^{pt}\left|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right|,\quad z\in\Delta, \tag{9}$$

или, равносильно,

$$\frac{2\pi}{pt-1}\lambda(z)^{pt}=\iint\limits_{\Delta}\lambda(\zeta)^{2-pt}\left|1-z\overline{\zeta}\right|^{-2pt}\left|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right|,\quad z\in\Delta.$$

Для этого воспользуемся заменой переменной $\zeta=\zeta(w)=\dfrac{w+z}{1+\overline{z}w}$, где z— фиксирована изΔ, а w — новая переменная. Тогда

$$\left|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right|=\frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{\left(1+z\overline{w}\right)^2\left(1+\overline{z}w\right)^2}\left|dw\wedge d\overline{w}\right|=\left|\frac{1-|z|^2}{(1+\overline{z}w)^2}\right|^2\left|dw\wedge d\overline{w}\right|;$$

$$\lambda(\zeta)^{2-pt}=\left(1-|\zeta|^2\right)^{pt-2}=\left(1-\left(\frac{w+z}{1+\overline{z}w}\right)\left(\frac{\overline{w}+\overline{z}}{1+z\overline{w}}\right)\right)^{pt-2}=\left(\frac{1+|z|^2|w|^2-|z|^2-|w|^2}{\left|1+\overline{z}w\right|^2}\right)^{pt-2};$$

$$\left|1-\overline{z}\zeta\right|^{-2pt}=\left[\left(1-\frac{\overline{z}w+|z|^2}{1+\overline{z}w}\right)\left(1-\frac{z\overline{w}+|z|^2}{1+z\overline{w}}\right)\right]^{-pt}=\left|\frac{1-|z|^2}{1+\overline{z}w}\right|^{-2pt}.$$

Отсюда получаем

$$\iint\limits_{\Delta}\lambda(\zeta)^{2-pt}\left|1-\overline{z}\zeta\right|^{-2pt}\left|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right|=\iint\limits_{\Delta}\left(\frac{1+|z|^2|w|^2-|z|^2-|w|^2}{\left|1+\overline{z}w\right|^2}\right)^{pt-2}\left|\frac{1-|z|^2}{1+\overline{z}w}\right|^{-2pt}\frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{\left|1+\overline{z}w\right|^4}\left|dw\wedge d\overline{w}\right|=$$

$$=\iint\limits_{\Delta}\left|1+\overline{z}w\right|^{-2(pt-2)+2pt-4}\left(\frac{1+|z|^2|w|^2-|z|^2-|w|^2}{\left(1-|z|^2\right)^2}\right)^{pt}\left(\frac{1+|z|^2|w|^2-|z|^2-|w|^2}{1-|z|^2}\right)^{-2}\left|dw\wedge d\overline{w}\right|=$$

$$=\iint\limits_{\Delta}\frac{\left(1-|w|^2\right)^{pt-2}}{\left(1-|z|^2\right)^{pt}}\left|dw\wedge d\overline{w}\right|=\lambda(z)^{pt}\iint\limits_{\Delta}\left(1-|w|^2\right)^{pt-2}\left|dw\wedge d\overline{w}\right|=$$

$$=2\pi\lambda(z)^{pt}\int\limits_0^1\left(1-r^2\right)^{pt-2}2rdr=\frac{2\pi}{pt-1}\lambda(z)^{pt},$$

и тождество (9) доказано.

Пусть теперь $\varphi \in A^p_{q,\rho}(\Delta, G)$, ω — локально-конечная фундаментальная область группы G в Δ. Используя (9), получаем

$$\frac{2}{\pi^{pt-1}(pt-1)}\|\varphi\|^p_{q,\rho,p,G} = \frac{2}{\pi^{pt-1}(pt-1)}\iint\limits_{\omega}\lambda(z)^{2-pt}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p |dz\wedge d\bar{z}| =$$

$$= \frac{2}{\pi^{pt-1}(pt-1)}\iint\limits_{\omega}\lambda(z)^{2-p(q+t)}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p \lambda(z)^{pt}|dz\wedge d\bar{z}| =$$

$$= \iint\limits_{\omega}\lambda(z)^{2-p(q+t)}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p \left(\iint\limits_{\Delta}\lambda(\zeta)^{2-pt}|k(z,\zeta)|^{pt}|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|\right)|dz\wedge d\bar{z}|.$$

Последовательно применяя свойства конформной инвариантности функций $\lambda(\zeta)$, $k(z,\zeta)$ и теорему Фубини, получаем равенства:

$$\frac{2}{\pi^{pt-1}(pt-1)}\|\varphi\|^p_{q,\rho,p,G} =$$

$$= \iint\limits_{\omega}\lambda(z)^{2-p(q+t)}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p \left(\sum_{A\in G}\iint\limits_{A^{-1}(\omega)}\frac{\lambda(A\zeta)^{2-pt}}{|A'(\zeta)|^{pt-2}}|k(Az,A\zeta)|^{pt}|A'(z)|^{pt}|A'(\zeta)|^{pt}|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|\right)|dz\wedge d\bar{z}| =$$

$$= \sum_{A\in G}\iint\limits_{\omega}\lambda(z)^{2-p(q+t)}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p \left(\iint\limits_{\omega}\lambda(\zeta)^{2-pt}|k(Az,\zeta)|^{pt}|A'(z)|^{pt}|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|\right)|dz\wedge d\bar{z}| =$$

$$= \sum_{A\in G}\iint\limits_{\omega}\lambda(\zeta)^{2-pt}\left(\iint\limits_{\omega}\lambda(z)^{2-p(q+t)}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p |k(Az,\zeta)|^{pt}|A'(z)|^{pt}|dz\wedge d\bar{z}|\right)|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}| =$$

$$= \iint\limits_{\omega}\lambda(\zeta)^{2-pt}\left(\sum_{A\in G}\iint\limits_{\omega}\frac{\lambda(Az)^{2-p(q+t)}}{|A'(z)|^{p(q+t)-2}}\frac{|\varphi(Az)|^p|A'(z)|^{pq}|\rho_1(A)|^{-p}}{|f_1(Az)|^p|\rho_1(A)|^{-p}}|k(Az,\zeta)|^{pt}|A'(z)|^{pt}|dz\wedge d\bar{z}|\right)|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}| =$$

$$= \iint\limits_{\omega}\lambda(\zeta)^{2-pt}\left(\iint\limits_{\Delta}\lambda(z)^{2-p(q+t)}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p |k(z,\zeta)|^{pt}|dz\wedge d\bar{z}|\right)|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|.$$

Так как для любых $z\in\Delta$ и $\zeta\in\Delta$ верна оценка

$$\pi|k(z,\zeta)| = \frac{1}{|1-z\bar{\zeta}|^2} \geq \frac{1}{(1+|z||\zeta|)^2} \geq \frac{1}{4},$$

то последнее выражение можно оценить снизу и, следовательно:

$$\frac{2\|\varphi\|^p_{q,\rho,p,G}}{\pi^{pt-1}(pt-1)} \geq \frac{1}{(4\pi)^{pt}}\iint\limits_{\omega}\lambda(\zeta)^{2-pt}|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|\iint\limits_{\Delta}\lambda(z)^{2-p(q+t)}\left|\frac{\varphi(z)}{f_1(z)}\right|^p|dz\wedge d\bar{z}| = \frac{\delta\|\varphi\|^p_{q+t,\rho,p}}{(4\pi)^{pt}},$$

где $\delta = \iint\limits_{\omega}\lambda(\zeta)^{2-pt}|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|$, причем $0<\delta<\frac{S(\omega)}{2}<\infty$, так как $0<\lambda(\zeta)^{-pt}<1$ для $\zeta\in\omega$ и $S(\omega) = 2\iint\limits_{\omega}\lambda(\zeta)^2|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|$ — площадь локально-конечной фундаментальной области ω. Следовательно, доказана оценка

$$\|\varphi\|^p_{q+t,\rho,p} \leq \frac{2^{2pt+1}\pi}{(pt-1)\delta}\|\varphi\|^p_{q,\rho,p,G}. \qquad (10)$$

Заметим также, что когда $G = id$, условие автоморфности формы тривиально, поэтому новый порядок $q+t$формы φ фактически участвует только в задании нормы в пространстве $A^p_{q+t,\rho}(\Delta)$. Таким образом, имеет место вложение $J : A^p_{q,\rho}(\Delta, G) \subset A^p_{q+t,\rho}(\Delta)$. При этом оператор вложения *J*, действующий из $A^p_{q,\rho}(\Delta, G)$ в $A^p_{q+t,\rho}(\Delta)$ по формуле $J\varphi = \varphi$, очевидно, является линейным, а также в силу (10) непрерывным.Теорема 10 доказана.

п. 7. Вложение в пространство голоморфных $(q,\rho)-$интегралов Эйхлера

Пусть G— группа дробно-линейных преобразований A открытого множества $D \subset \overline{C}$ вида $A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $a,b,c,d \in C$, $z \in D$ и $ad - bc = 1$. Для любых $A \in G$ и целого *q*определим оператор, действующий на функциях $f : A(D) \to \overline{C}$ по формуле

$$\left(A^*_{q,\rho} f\right)(z) = \frac{f(Az)A'(z)^q}{\rho(A)}, \ \rho \in Hom(G, C^*).$$

Тогда условие автоморфности $(q,\rho)-$формы φ будет иметь вид

$$A^*_{q,\rho}\varphi = \varphi, \text{ для любого } A \in G. \tag{11}$$

Множество голоморфных форм, удовлетворяющих (11), будем обозначать $A_{q,\rho}(D, G)$. Зафиксируем целое $q \geq 1$.

Определение 3. *Мультипликативная голоморфная функция F на D для характера ρ называется голоморфным $(q,\rho)-$интегралом Эйхлера на D относительно группы G, если существует форма $\varphi \in A_{q,\rho}(D, G)$ такая, что $\varphi = \dfrac{\partial^{2q-1}F}{\partial z^{2q-1}}$.*

Лемма 2. *Для оператора дифференцирования $\dfrac{\partial^{2q-1}}{\partial z^{2q-1}}$ и любого дробно-линейного отображения $A \in G$ справедливо равенство*

$$\frac{\partial^{2q-1}}{\partial z^{2q-1}} \circ A^*_{1-q,\rho} = A^*_{q,\rho} \circ \frac{\partial^{2q-1}}{\partial z^{2q-1}}. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть f— мероморфная или голоморфная мультипликативная функция для характера ρ на *D*. Покажем, что обе части равенства (12) переводят *f* в одну и ту же функцию. Это достаточно будет показать для голоморфных функций f на *D*.

Заметим, что прямым вычислением для любого дробно-линейного преобразования $A \in G$ устанавливается тождество

$$\left(A\zeta - Az\right)^2 = (\zeta - z)^2 A'(\zeta)A'(z). \tag{13}$$

Пусть z_0 произвольная точка из *D*,а $c \subset D$ — маленькая окружность с центром в z_0, ориентированная по часовой стрелке. Тогда из интегральной формулы Коши получаем

$$\left(A^*_{q,\rho} \circ \frac{\partial^{2q-1}}{\partial z^{2q-1}}\right)(f)(z_0) = \left(A^*_{q,\rho}\left(f^{(2q-1)}\right)\right)(z_0) = \frac{f^{(2q-1)}\left(A(z_0)\right)A'(z_0)^q}{\rho(A)} =$$

$$= \left(\frac{(2q-1)!}{2\pi i}\int\limits_{A(c)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - Az_0)^{2q}} d\zeta\right)\frac{A'(z_0)^q}{\rho(A)}.$$

Сделав замену в полученном интеграле, для любой точки $\zeta \in A(c)$ найдем точку $\zeta_1 \in c$ такую, что $\zeta = A(\zeta_1)$. Применяя тождество (13), приходим к равенствам

$$\left(A^*_{q,\rho}\circ\frac{\partial^{2q-1}}{\partial z^{2q-1}}\right)(f)(z_0)=\left(\frac{(2q-1)!}{2\pi i}\int\limits_{A(c)}\frac{f(A\zeta_1)}{(A\zeta_1-Az_0)^{2q}}d(A\zeta_1)\right)\frac{A'(z_0)^q}{\rho(A)}=$$

$$\left(\frac{(2q-1)!}{2\pi i}\int\limits_{c}\frac{f(A\zeta_1)A'(\zeta_1)^{1-q}}{\rho(A)(\zeta_1-z_0)^{2q}}d\zeta_1\right)=\left(\frac{(2q-1)!}{2\pi i}\int\limits_{c}\frac{\left(A^*_{1-q,\rho}f\right)(\zeta_1)}{(\zeta_1-z_0)^{2q}}d\zeta_1\right)=$$

$$=\left(A^*_{1-q,\rho}f\right)^{(2q-1)}(z_0)=\left(\frac{\partial^{2q-1}}{\partial z^{2q-1}}\circ A^*_{1-q,\rho}\right)(f)(z_0).$$

Лемма 2 доказана.

Пусть Π_{2q-2} — векторное пространство полиномов от одного комплексного переменного z степени $\le 2q-2$.

Лемма 3. *Для голоморфной функции F на D производная* $\dfrac{\partial^{2q-1}F}{\partial z^{2q-1}}\in A_{q,\rho}(D,G)$ *тогда и только тогда, когда для каждого $A\in G$ (2q-1)–я производная по z функции* $\Phi(z)=\left(A^*_{1-q,\rho}F\right)(z)-F(z)$ *равна нулю, то есть функция $\Phi(z)$ принадлежит Π_{2q-2}.*

Доказательство. Обозначим $\dfrac{\partial^{2q-1}F}{\partial z^{2q-1}}=\varphi$ и найдем искомую производную, используя лемму 2:

$$\frac{\partial^{2q-1}}{\partial z^{2q-1}}(\Phi(z))=\frac{\partial^{2q-1}}{\partial z^{2q-1}}\left(\left(A^*_{1-q,\rho}F\right)(z)-F(z)\right)=\left(\frac{\partial^{2q-1}}{\partial z^{2q-1}}\circ A^*_{1-q,\rho}\right)(F)(z)-\frac{\partial^{2q-1}(F(z))}{\partial z^{2q-1}}=$$

$$=\left(A^*_{q,\rho}\circ\frac{\partial^{2q-1}}{\partial z^{2q-1}}\right)(F)(z)-\varphi(z)=\left(A^*_{q,\rho}\left(\frac{\partial^{2q-1}F}{\partial z^{2q-1}}\right)\right)(z)-\varphi(z)=\left(A^*_{q,\rho}\varphi\right)(z)-\varphi(z).$$

Очевидно, что найденная производная равна нулю тогда и только тогда, когда выполняется условие автоморфности (11) формы φ, а значит, $\varphi\in A_{q,\rho}(D,G)$.

Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 заключаем, что F будет $(q,\rho)-$интегралом Эйхлера тогда и только тогда, когда

$$P_A=A^*_{1-q,\rho}F-F\in\Pi_{2q-2}\quad \text{для любого}\quad A\in G. \tag{14}$$

Пространство $(q,\rho)-$интегралов Эйхлера будем обозначать $\Im_{q,\rho}(D,G)$. Из рассмотренных лемм и определения 3 следует, что линейный оператор *(2q-1)*–кратного дифференцирования $\dfrac{\partial^{2q-1}}{\partial z^{2q-1}}$ переводит $(q,\rho)-$интегралы Эйхлерав автоморфные формы порядка qдля характера ρ. Таким образом, получено следствие:

Следствие. *Для целого $q\ge 1$ и характера $\rho\in Hom(G,C^*)$ имеем линейное отображение*

$$\frac{\partial^{2q-1}}{\partial z^{2q-1}}:\Im_{q,\rho}(D,G)\to A_{q,\rho}(D,G).$$

Докажем следующую теорему вложения:

Теорема 11. *Для целого $q\ge 1$ и характера $\rho\in Hom(G,C^*)$ имеет место вложение*

$$A_{1-q,\rho}(D,G)\subset\Im_{q,\rho}(D,G).$$

Доказательство. Если $F \in A_{1-q,\rho}(D,G)$, то $P_A = A^*_{1-q,\rho}F - F = 0$ для всех $A \in G$. Таким образом, элементы из $A_{1-q,\rho}(D,G)$ представляют $(q,\rho)-$интегралы Эйхлера с нулевым полиномом P_A в (14).Теорема 11 доказана.

Литература.

1. *Сергеева О.А.* Банаховы пространства мультипликативных автоморфных форм // Вестник НГУ. 2005. Т. 5. Вып. 4. С. 45-63.
2. *Сергеева О.А.* Модифицированные операторы Берса и двойственность голоморфных мультипликативных автоморфных форм // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50. № 4. С. 902-914.
3. *Сергеева О.А.* Билинейные спаривания для голоморфных $(q,\rho)-$форм // Журнал СФУ. 2011. Т. 4. № 1. С. 128-139.
4. *Сергеева О.А.* Интегральный оператор Берса в нормированных пространствах мероморфных $(q,\rho)-$форм // Вестник КемГУ. 2011. № 3/1 (47). С. 216-223.
5. *Сергеева О.А.* Сопряженность операторов Берса в двойственных пространствах мультипликативных автоморфных форм // Международная школа-семинар «Ломоносовские чтения на Алтае»: сб. науч. статей. 2012. Ч. 1. С. 353-359.
6. *Сергеева О.А.* Интегральный оператор проектирования и ряд Пуанкаре для голоморфных $(q,\rho)-$форм // Вестник КемГУ. 2013. №2 (54). С. 91-97.
7. *Сергеева О.А.* Ряд Пуанкаре и операторы двойственности для мультипликативных автоморфных форм // Вестник НГУ. 2013. № 3. С. 103-112.
8. *Кра И.* Автоморфные формы и клейновы группы. – М.: Мир, 1975. – 296 с.
9. *Farkas H.M., Kra I.* Riemann Surfaces // Graduate Texts in Mathematics.– Springer-Verlag, 1992. № 71. –366 p.
10. *Чуешев В.В.* Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. – Кемерово: КемГУ, 2003. Ч. 2. –248 с.

The operators and functionals in the normedspaces $(q,\rho)-$forms

Olga Alexeevna Sergeeva, Candidate of Physics and Mathematics
Kemerovo State University, chair of Mathematical Analysis

In article is provided a review of the main results received in the theory of multiplicative automorphic forms ($(q,\rho)-$forms) on a compact Riemann surface with links to the published works where it is possible to find their detailed proofs. The embedding theorems in spaces of $(q,\rho)-$forms are provided with the proof for demonstration of technique of work with such forms.

Keywords: the integral operators, bilinear pairings, characters, multiplicative automorphic forms, duality, series Poincare.

УДК 330.43. 330.34

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОРРЕЛЯЦИОННОЙ АДАПТОМЕТРИИ ДЛЯ АНАЛИЗА ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

***Елена Валентиновна Смирнова**, д.ф.-м.н., проф.*
Тел.: 963 1908807, e-mail: seleval2008@yandex.ru
***Никита Олегович Богданов**, аспирант*
Тел.: 913 1706226, e-mail: 9131706226@mail.ru
Сибирский федеральный университет
http://www.sfu-kras.ru