УДК 517. 946

ОБРАТНАЯ ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА С НЕИЗВЕСТНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Галина Ивановна Шабанова
Старший преподаватель кафедры Высшей математики
Тел: 8 913 142 7307, e-mail: gal_schabanowa2014@yandex.ru
Сибирский Автомобильно-Дорожный Институт (СибАДИ)
E-mail: kaf_vm.sibadi.org

Исследуется обратная одномерная задача с неизвестным источником и неизвестным переменным коэффициентом в волновом уравнении по двум известным решениям прямой задачи в фиксированных точках плоскости. Методом интегральных преобразований задача редуцируется к обратной задаче Штурма-Лиувилля. Доказаны теоремы единственности.

Ключевые слова: интегральные преобразования, оператор, билинейная система интегральных уравнений, теоремы единственности.

Обратные задачи математической физики представляют интерес для многих областей знания: геофизики, сейсмики, акустики, радиолокации, медицины. Различны постановки и методы решения обратных задач. Актуальны задачи определения переменных коэффициентов дифференциального уравнения в частных производных. Широкий класс обратных задач составляют задачи интерпретации данных наблюдений, в которых по результатам измерений полей требуется определить источники поля или элементы распределения среды [1,с.52-60].

Г.И. Шабанова

Исследуемая задача редуцируется к обратной задаче Штурма-Лиувилля. Методом интегральных преобразований исходная постановка сводится к спектральной, и решается система нелинейных интегральных уравнений, содержащая неизвестные функции. Свойства искомых функций предполагаются заданными.

Решением обратных задач, взаимосвязанных со спектральной теорией дифференциальных операторов, занимались М.М. Лаврентьев, В.Г. Яхно, К.Г. Резницкая [2], А.С. Алексеев [3], М.М. Лаврентьев и К.Г. Резницкая [4]. Наиболее близкие по постановке задачи опубликованы в [2]. Наиболее близкие к теме исследования задачи решены В.Г. Романовым [5, с.70-85] и авторами монографии [2].

Цель работы – конструктивное построение решения задачи; описание классов функций, в которых восстанавливаются решения; доказательство теорем единственности.

Исследуемая задача имеет прикладное значение, являясь модельной для интерпретации данных сейсморазведки и электроразведки. Построенные алгоритмы могут быть полезными при численном решении обратных задач в указанных классах функций. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории обратных задач.

Постановка задачи

Пусть в области $-\infty < x, y < \infty,\ z \geq 0,\ t > 0$ задано волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - q(z)U(x,y,z,t). \qquad (1)$$

Обобщенная функция $U(x,y,z,t) = 0$ при $t < 0$ и удовлетворяет уравнению (1), начальным данным

$$U(x,y,z,t)\Big|_{t=+0} = 0, \qquad (2)$$

$$U_t'(x,y,z,t)\Big|_{t=+0}=0, \qquad (3)$$

и граничному условию

$$U_z'(x,y,z,t)\Big|_{z=0}=\delta(t)\cdot f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\delta(t)\cdot f(\rho). \qquad (4)$$

$\delta(t)-$ дельта-функция функция Дирака с носителем в точке $t=t_0$, $\delta(t)=\lim_{t_0\to+0}\delta(t-\ t_0)$. $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=f(\rho)-$ неизвестная вещественная, финитная функция, положительно определенная и n раз дифференцируемая на интервале $(0,\varepsilon)\ni\rho$. $f(\rho)=0$ при $\rho\geq\varepsilon$. $f(\rho)$ удовлетворяет условиям Дирихле. Будем считать, что совокупность функций $f(\rho)$ с указанными свойствами составляет класс $\boldsymbol{\Phi}$.

$U(x,y,z,t)$ –обобщенное решение граничной задачи (1)-(4) –принадлежит классу $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ [2, с.36].

По информации о решении прямой задачи в двух фиксированных точках плоскости $z=0$, таких, что $\sqrt{(x^j)^2+(y^j)^2}=\rho^j$, $j=0,1$,

$$U\left(x^j,y^j,0,t\right)=\varphi^j(t),\ j=0,1, \qquad (5)$$

требуется определить неизвестный потенциал $q(z)$ в классе функций $\boldsymbol{Q_M^a}$ и

неизвестный источник $f(\rho)$ в классе функций $\boldsymbol{\Phi}$.

Класс функций $\boldsymbol{Q_M^a}$ $[6,\ \text{с}.63-64]$ содержит все функции $q(z)$, обладающие свойствами:

1. $q(z)\in C^1[0,\infty)\cap L_1[0,\infty)$, $\|q(z)\|_{L_{1[0,\infty)}}\leq M$.

2. $q(z)$ имеет абсолютный минимум $\underset{абс.}{q_{min}}=q(b^*)=m<0$.

3. При больших значениях $y\geq b^*$ $q(z)$ принимает отрицательные значения и монотонно стремится к нулю: $q(z)=o\left(-\frac{1}{z^2}\right)$, $z\to\infty$.

4. Последовательность элементов $q_n(z)=\begin{cases}q(z), если\ \ z\in[0,b_n],\\ 0, если\ \ z\in(b_n,\infty)\end{cases}$ линейного нормированного пространства $L_1[0,\infty)$ сходится в $L_1[0,\infty)$ к элементу этого пространства $q(z)$ по норме: $\lim_{n\to\infty}\|q_n(z)-q(z)\|_{L_{1[0,\infty)}}=0$.

5. $q(z)$ –целая функция, такая, что $q(0)=A>0$.

Решение прямой задачи

Решение прямой задачи проведем методом интегральных преобразований, изложенным в $[2,\text{с}.26-34]$. К задаче (1)-(4) применим двумерное преобразование Фурье по переменным x и y. Введем обозначение

$$W_1(p,s,z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ipx+isy}\ U(x,y,z,t)dxdy. \qquad (6)$$

Получим вспомогательную задачу в виде

$$\frac{\partial^2W_1}{\partial t^2}=-(p^2+s^2)W_1(p,s,z,t)+\frac{\partial^2W_1}{\partial z^2}-q(z)W_1(p,s,z,t), \qquad (7)$$

$$W_1(p,s,z,t)\Big|_{t=+0}=0, \qquad (8)$$

$$[W_1]_t'(p,s,z,t)\Big|_{t=+0}=0, \qquad (9)$$

$$[W_1]'_z(p,s,z,t)\Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}\delta(t)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx+isy} f(x,y)dxdy = \delta(t)A(p,s), \quad (10)$$

где $A(p,s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx+isy} f(x,y)dxdy.$ (11)

К задаче (7)-(10) применим преобразование Лапласа по переменной t

$$W_2(p,s,z,r) = \int_0^{\infty} e^{-rt}\, W_1(p,s,z,t)dt. \quad (12)$$

Получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(p^2+s^2+r^2)W_2(p,s,z,r) = \frac{\partial^2 W_2}{\partial z^2} - q(z)W_2(p,s,z,r) \quad (13)$$

с начальным условием

$$[W_2]'_z(p,s,z,r)\Big|_{z=0} = A(p,s). \quad (14)$$

Задача (13)-(14) сведется к функциональному уравнению, если использовать обобщенное преобразование Фурье

$$W_3(p,s,\lambda,r) = \int_0^{\infty} \varphi(z,\lambda)\, W_2(p,s,z,r)dz$$

по системе собственных функций $\varphi(z,\lambda)$ оператора Штурма-Лиувилля.

$$W_3(p,s,\lambda,r) = -\frac{1}{p^2+s^2+r^2+\lambda}\cdot A(p,s).$$

Выполним обратные преобразования.

$$W_2(p,s,z,r) = -A(p,s)\int_0^{\infty}\frac{1}{p^2+s^2+r^2+\lambda}\varphi(z,\lambda)d\sigma(\lambda) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-rt}\{-A(p,s)\int_0^{\infty}\varphi(z,\lambda)\frac{1}{\sqrt{p^2+s^2+\lambda)}}\sin\left(t\sqrt{p^2+s^2+\lambda)}\right)d\sigma(\lambda)\}\,dt. \quad (15)$$

Сравним различные виды изображения $W_2(p,s,z,r)$ – (12) и (15). По теореме Лерха две функции, имеющие одинаковые преобразования Лапласа, совпадают для всех $t>0$, где обе функции непрерывны. Преобразование Лапласа единственно для каждой функции $W_1(p,s,z,t)$, имеющей такое преобразование. Поэтому

$$W_1(p,s,z,t) = -A(p,s)\int_0^{\infty}\varphi(z,\lambda)\frac{\sin\left(t\sqrt{p^2+s^2+\lambda)}\right)}{\sqrt{p^2+s^2+\lambda)}}d\sigma(\lambda).$$

Обращение двумерного преобразования Фурье (4) и использование интегрального представления (11) $A(p,s)$ дает решение прямой задачи:

$$U(x,y,z,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx-isy}A(p,s)\left\{\int_0^{\infty}\varphi(z,\lambda)\frac{\sin\left(t\,\sqrt{p^2+s^2+\lambda)}\right)}{\sqrt{p^2+s^2+\lambda)}}d\sigma(\lambda)\right\}dpds$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\cdot\int_0^{\infty}\varphi(z,\lambda)\cdot[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x},\tilde{y})\cdot\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(\tilde{x}-x)}\cdot\pi J_0(\sqrt{p^2+\lambda}\,\sqrt{t^2-(y-\tilde{y})^2})\cdot$$

$$\theta(t^2-(y-\tilde{y})^2)dp\}d\tilde{x}d\tilde{y}]d\sigma(\lambda) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\varphi(z,\lambda)\cdot[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x},\tilde{y})\cdot 2\pi$$

$$\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-(x-\tilde{x})^2-(y-\tilde{y})^2}\right)}{\sqrt{t^2-(x-\tilde{x})^2-(y-\tilde{y})^2}}\theta(t^2-(x-\tilde{x})^2-(y-\tilde{y})^2)d\tilde{x}d\tilde{y}]d\sigma(\lambda).$$

После замены переменных $x-\tilde{x}=X$, $y-\tilde{y}=Y$ запишем решение прямой задачи $U(x,y,z,t)$ в виде свертки неизвестного источника $f(x,y)$ и фундаментального решения задачи с известным источником $\delta(t)\delta(x,y)$.

$$U(x,y,z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \varphi(z,\lambda)\left\{f(x,y)*\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-x^2-y^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}\theta(t^2-x^2-y^2)\right\}\cdot d\sigma(\lambda)=$$
$$=$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \varphi(z,\lambda)[\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x-X,y-Y)\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-X^2-Y^2}\right)}{\sqrt{t^2-X^2-Y^2}}\theta\left(t^2-X^2-Y^2\right)dXdY]d\sigma(\lambda).$$

Решение обратной задачи. Вывод рекуррентной формулы. Теоремы единственности

В плоскости $z=0$ положим $x^0=0,\ y^0=0$ и $(x^1)^2+(y^1)^2=(\rho^1)^2$.

Рассмотрим решение прямой задачи (3)-(5) в двух фиксированных точках плоскости $z=0$. $\varphi^j(t)=U\left(x^j,y^j,0,t\right)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^\infty d\sigma(\lambda)\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f\left(x^j-X,y^j-Y\right)\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-X^2-Y^2}\right)}{\sqrt{t^2-X^2-Y^2}}\cdot$

$$\theta\left(t^2-X^2-Y^2\right)dXdY,\ j=0,1. \qquad (16)$$

Перейдем к полярным координатам по формулам $x=\rho cos\vartheta,\ y=\rho sin\vartheta$. Систему интегральных уравнений (16) запишем в новых символах:

$$\begin{cases}\varphi^0(t)=\int_0^\infty d\sigma(\lambda)\int_{-\infty}^\infty f(\rho)\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-\rho^2}\right)}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\theta(t^2-\rho^2)\rho d\rho,\\ \varphi^1(t)=\int_0^\infty d\sigma(\lambda)\int_{-\infty}^\infty f(\rho^1-\rho)\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-\rho^2}\right)}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\theta(t^2-\rho^2)\rho d\rho.\end{cases} \qquad (17)$$

К полученной системе применим преобразование Фурье по переменной t с параметром α. В преобразованиях, приведенных ниже, используем известную формулу $\int_0^\infty e^{it\alpha}\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-\rho^2}\right)}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\theta(t^2-\rho^2)dt=i\pi signa\alpha J_0(\rho\sqrt{\alpha^2-\lambda})\cdot\theta(\alpha^2-\lambda)$;
и формулы, связывающие сферические и цилиндрические функции[3].

Введем обозначение $\Phi^0(\alpha)=\int_0^\infty e^{it\alpha}\varphi^0(t)dt$.

$$\int_0^\infty e^{it\alpha}\varphi^0(t)dt=\int_0^\infty d\sigma(\lambda)\int_0^\infty \rho f(\rho)\{\int_0^\infty e^{it\alpha}\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2-\rho^2}\right)}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\theta(t^2-\rho^2)dt\}d\rho=$$
$$\int_0^\infty\left[\frac{2}{\pi}d\sqrt{\lambda}+d\sigma_1(\lambda)\right]\int_0^\infty \rho f(\rho)\{i\pi signa\alpha J_0(\rho\sqrt{\alpha^2-\lambda})\cdot\theta(\alpha^2-\lambda)\}d\rho=$$
$$2isigna\alpha\int_0^\infty \rho f(\rho)\{\int_0^\infty J_0\left(\rho\sqrt{\alpha^2-\lambda}\right)\cdot\theta(\alpha^2-\lambda)d\sqrt{\lambda}\right\}d\rho+$$
$$i\pi signa\alpha\int_0^\infty \rho f(\rho)\{\int_0^\infty J_0\left(\rho\sqrt{\alpha^2-\lambda}\right)\cdot\theta(\alpha^2-\lambda)d\sigma_1(\lambda)\}d\rho=$$
$$2isigna\alpha\int_0^\infty f(\rho)\sin(\rho|\alpha|)\,d\rho$$
$$+\,i\pi signa\alpha\int_0^\infty \rho f(\rho)\{\int_0^\infty J_0\,(\rho\sqrt{\alpha^2-\lambda})\cdot\theta(\alpha^2-\lambda)d\sigma_1(\lambda)\}\,d\rho.$$

Аналогично запишем преобразование Фурье второго уравнения системы (17). Заметим, что для всех $\alpha>0$ справедливо равенство $signa\alpha\sin(\rho|\alpha|)=\sin(\rho\alpha)$.

$$\Phi^1(\alpha)=\int_0^\infty e^{it\alpha}\varphi^1(t)dt=2i\int_0^\infty f(\rho_1-\rho)\sin(\rho\alpha)\,d\rho+$$

[3] Г.Корн и Т.Корн. Справочник по математике. М.: Наука, 1970.-720с.

$$i\pi signa \int_0^\infty \rho f(\rho^1 - \rho)\{\int_0^\infty J_0\,(\rho\sqrt{\alpha^2-\lambda})\cdot\theta(\alpha^2-\lambda)d\sigma_1(\lambda)\}\,d\rho.$$

Обозначим ядро интегральных уравнений через $K(\rho,\alpha)$ и выполним замену переменных $\sqrt{\alpha^2-\lambda}=\nu,\ \alpha^2-\nu^2=\lambda,\ d\lambda=-2\nu d\nu.$ Тогда

$$K(\rho,\alpha) = -\frac{1}{2} signa \int_0^\infty J_0\left(\rho\sqrt{\alpha^2-\lambda}\right)$$

$$\cdot\,\theta(\alpha^2-\lambda)d\sigma_1(\lambda) signa \int_{-\alpha}^{\alpha} J_0(\rho\nu)\sigma_1'(\alpha^2-\nu^2)\nu d\nu.$$

Решение обратной задачи с неизвестным источником как функцией расстояния сводится к решению билинейной системы интегральных уравнений

$$\begin{cases} \Phi^0(\alpha) = 2i\int_0^\infty f(\rho)\sin(\rho\alpha)\,d\rho - 2\pi i\int_0^\infty \rho f(\rho)K(\rho,\alpha)d\rho, \\ \Phi^1(\alpha) = 2i\int_0^\infty f\left(\rho^1-\rho\right)\sin(\rho\alpha)\,d\rho - 2\pi i\int_0^\infty \rho f\left(\rho^1-\rho\right)K(\rho,\alpha)\,d\rho, \end{cases} \quad (18)$$

содержащей искомые функции $f(\rho)$ и $\sigma_1'(\alpha^2-\nu^2)$. Как известно, [7, с.354], по спектральной функции $\sigma(\lambda)\in\boldsymbol{\sigma^a}$ неизвестный потенциал $q(z)$ однозначно восстанавливается в классе функций $\boldsymbol{Q_M^a}$.

Класс функций $\boldsymbol{\sigma^a}$ [6, с. 65] составляют спектральные функции, для которых

1. $\sigma(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\sigma_{nn}(\lambda)$ в основном, т.е. в точках непрерывности $\sigma(\lambda)$.
2. $\sigma(\lambda)$ имеет вид $\sigma(\lambda) = \begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}+\sigma_1(\lambda), \text{если } \lambda\ge 0, \\ 0, \text{если } \lambda<0.\end{cases}$
3. $\sigma(\lambda)\in C(\lambda\ge 0)\cap C^1(\lambda>0)$; $\sigma_1(s),\ s=\sqrt{\lambda}$, монотонно убывает на интервале $(0,\infty)$.
4. $\sigma_1(s)$ абсолютно непрерывна.
5. $\sigma_1'(\lambda)$ –целая функция в интервале $[0,\infty)$. $\sigma_1'(0) = \lim_{s\to 0+}\sigma_1'(s) = -\frac{2}{\pi}$.

Отметим свойства ядра $K(\rho,\alpha)$.

1. $\lim_{\alpha\to 0} K(\rho,\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} signa \int_{-\alpha}^{\alpha} J_0(\rho\nu)\sigma_1'(\alpha^2-\nu^2)\nu d\nu = 0.$
2. $K(\rho,\alpha)$ непрерывно по совокупности аргументов.
3. $K(\rho,\alpha)$ непрерывно дифференцируемо.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial K(\rho,\alpha)}{\partial\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} signa \int_{-\alpha}^{\alpha} J_0(\rho\nu)\sigma_1''(\alpha^2-\nu^2)2\alpha\nu d\nu + 2\alpha J_0(\rho\alpha)\sigma_1'(0) = 0,$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial^2 K(\rho,\alpha)}{\partial\alpha^2} = \lim_{\alpha\to 0}\{signa \int_{-\alpha}^{\alpha} J_0(\rho\nu)[\sigma_1'''(\alpha^2-\nu^2)(2\alpha)^2 + \sigma_1''(\alpha^2-\nu^2)2]\nu d\nu +$$

$$(2\alpha)^2 J_0(\rho\alpha)\sigma_1''(0) + 2\left[J_0(\rho\alpha) + \alpha\frac{\partial J_0(\rho,\alpha)}{\partial\alpha}\right]\sigma_1'(0)\} = 2\sigma_1'(0).$$

При дифференцировании ядра $K(\rho,\alpha)$ по параметру α и вычислении

предельных значений производных четного и нечетного порядка при $\alpha\to 0$, выявляются закономерности:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial^{2n-1}K(\rho,\alpha)}{\partial\alpha^{2n-1}}=0,\ \ n=1,2,\dots,\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial^{2n}K(\rho,\alpha)}{\partial\alpha^{2n}}=$$

$$(2n-1)!!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^k}{[2(n-k)-1]!!}\left.\frac{\partial^{2(n-k)}J_0(\rho\alpha)}{\partial\alpha^{2(n-k)}}\right|_{\alpha\,=\,0}\sigma_1^{(k)}(0)+2^{2n}(2n-1)!!\,\sigma_1^{(n)}(0)$$

$$=(2n-1)!!\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{[2(n-k)]!\,\rho^{2(n-k)}}{2^{2n-3k}[2(n-k)-1]!!\,(n-k)!\,\Gamma(n-k+1)}\sigma_1^{(k)}(0)+$$

$$+2^{2n}(2n-1)!!\,\sigma_1^{(n)}(0),\ \ n\ge 2.$$

Поскольку $\sigma_1'(\lambda)$ является целой на полупрямой $\lambda\ge 0$, выведем рекуррентную формулу для вычисления коэффициентов ряда Тейлора $\sigma_1'(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sigma_1^{(n+1)}(0)\lambda^n$.

Для этого выразим $f(\rho)$ из первого уравнения системы (18), предварительно умножив его почленно на $i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$$-i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Phi^0(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(\rho)\sin(\rho\alpha)\,d\rho-\sqrt{2\pi}\int_0^{\infty}\rho f(\rho)K(\rho,\alpha)d\rho.$$

Обращение синус-преобразования Фурье функции $f(\rho)$ дает представление $f(\rho)$ в виде

$f(\rho)=$

$$-\frac{i}{\pi}\int_0^{\infty}\Phi^0(\alpha)\sin(\rho\alpha)d\alpha+2\int_0^{\infty}\sin(\rho\alpha)\int_0^{\infty}\hat\rho f(\hat\rho)K(\hat\rho,\alpha)d\hat\rho d\alpha=-i\widehat{\Phi}^0(\rho)+\Omega(\rho),\quad (19)$$

где $\widehat{\Phi}^0(\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Phi^0(\alpha)\sin(\rho\alpha)\,d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sin(\rho\alpha)\int_0^{\infty}e^{it\alpha}\varphi^0(t)dtd\alpha$ –известная функция, $\Omega(\rho)=\Omega_{[f,\sigma_1']}=2\int_0^{\infty}\sin(\rho\alpha)\int_0^{\infty}\hat\rho f(\hat\rho)K(\hat\rho,\alpha)d\hat\rho d\alpha$ –синус-преобразование билинейной квадратичной формы, содержащей неизвестные $f(\rho)$ и $\sigma_1'(\lambda)$.

Аналогично (19) выразим функцию

$$f(\rho^1-\rho)=-i\widehat{\Phi}^0(\rho^1-\rho)+\Omega(\rho^1-\rho)\qquad (19')$$

и подставим ее во второе уравнение системы (18). Получим $\Phi^1(\alpha)=$

$$2i\int_0^{\infty}\{-i\widehat{\Phi}^0(\rho^1-\rho)+\Omega(\rho^1-\rho)\}\sin(\rho\alpha)\,d\rho-2\pi i\int_0^{\infty}\rho\{-i\widehat{\Phi}^0(\rho^1-\rho)+\Omega(\rho^1-\rho)\}\cdot$$

$$K(\rho,\alpha)\,d\rho=2\int_0^{\infty}\widehat{\Phi}^0(\rho^1-\rho)\sin(\rho\alpha)\,d\rho+2i\int_0^{\infty}\Omega(\rho^1-\rho)\sin(\rho\alpha)\,d\rho-$$

$$-2\pi i\int_0^{\infty}\rho\{-i\widehat{\Phi}^0(\rho^1-\rho)+\Omega(\rho^1-\rho)\}K(\rho,\alpha)\,d\rho\qquad (20)$$

Введем обозначение $\overline{\Phi}^0(\rho^1,\alpha)=\int_0^{\infty}\widehat{\Phi}^0(\rho^1-\rho)\sin(\rho\alpha)\,d\rho$ и перепишем равенство (18) в виде $-\frac{i}{2}\Phi^1(\alpha)+i\overline{\Phi}^0(\rho^1,\alpha)=$

$$\int_0^{\infty}\Omega(\rho^1-\rho)\sin(\rho\alpha)\,d\rho+\pi\int_0^{\infty}\rho\{i\widehat{\Phi}^0(\rho^1-\rho)-\Omega(\rho^1-\rho)\}K(\rho,\alpha)\,d\rho.\quad (21)$$

Продифференцируем по α полученное равенство (21) $2n$ раз и, положив $\alpha = 0$, при $n = 1$ получим момент квадратичной формы $M_{\Omega}^{(1)}$ первого порядка:

$$M_{\Omega}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial\alpha}[-\frac{i}{2}\Phi^1(\alpha) + i\overline{\Phi}^0(\rho^1,\alpha)]\Big|_{\alpha=0} = \int_o^{\infty}\rho\,\Omega(\rho^1-\rho)d\rho. \qquad (22)$$

При $n = 2$ получим

$\sigma_1'(0) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}[-\frac{i}{2}\Phi^1(\alpha)+i\overline{\Phi}^0(\rho^1,\alpha)]\,|_{\alpha=0}}{\int_0^{\infty}\rho\{i\widehat{\Phi}^0(\rho^1-\rho)-\Omega(\rho^1-\rho)\}d\rho}$ или, с учетом вычисленного момента (22), выразим $\sigma_1'(0)$ через интегральные преобразования заданной информации

$$\sigma_1'(0) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}[-\frac{i}{2}\Phi^1(\alpha)+i\overline{\Phi}^0(\rho^1,\alpha)]\Big|_{\alpha=0}}{\int_0^{\infty}\rho\{i\widehat{\Phi}^0(\rho^1-\rho)\}d\rho - M_{\Omega}^{(1)}} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}[-\frac{i}{2}\Phi^1(\alpha)+i\overline{\Phi}^0(\rho^1,\alpha)]\Big|_{\alpha=0}}{\int_0^{\infty}\rho\{i\widehat{\Phi}^0(\rho^1-\rho)\}d\rho - \frac{\partial}{\partial\alpha}[-\frac{i}{2}\Phi^1(\alpha)+i\overline{\Phi}^0(\rho^1,\alpha)]\Big|_{\alpha=0}}.$$

Производная $(2n-1)$ порядка разности известных интегральных преобразований информации о решении прямой задачи $[-\frac{i}{2}\Phi^1(\alpha)+i\overline{\Phi}^0(\rho^1,\alpha)]$, вычисленная при $\alpha = 0$, позволяет получить момент квадратичной формы $M_{\Omega}^{(2n-1)}$ $(n = 1,2,\ldots.)$

$$M_{\Omega}^{(2n-1)} = \int_0^{\infty}\rho^{2n-1}\Omega(\rho^1-\rho)\,d\rho =$$

$$(-1)^{n+1}\frac{\partial^{(2n-1)}}{\partial\alpha^{(2n-1)}}\left[-\frac{i}{2}\Phi^1(\alpha)+i\overline{\Phi}^0(\rho^1,\alpha)\right]\Big|_{\alpha=0}.$$

Производная порядка $2n$ разности $[-\frac{i}{2}\Phi^1(\alpha)+i\overline{\Phi}^0(\rho^1,\alpha)]$ при нулевом значении параметра α однозначно определяет коэффициенты разложения $\sigma_1^{(n+1)}(0)$ спектральной функции $\sigma_1'(\lambda)$ в ряд Тейлора.

$$\frac{\partial^{(2n)}}{\partial\alpha^{(2n)}}[-\frac{i}{2}\Phi^1(\alpha)+i\overline{\Phi}^0(\rho^1,\alpha)] = \pi\int_0^{\infty}\rho\{i\widehat{\Phi}^0(\rho^1-\rho)-\Omega(\rho^1-\rho)\}[\frac{\partial^{(2n)}}{\partial\alpha^{(2n)}}K(\rho,\alpha)]\,d\rho.$$

$$\frac{\partial^{(2n)}}{\partial\alpha^{(2n)}}\left[-\frac{i}{2}\Phi^1(\alpha)+i\overline{\Phi}^0(\rho^1,\alpha)\right]\Big|_{\alpha=0} =$$

$$\pi\int_0^{\infty}\rho\{i\widehat{\Phi}^0(\rho^1-\rho)-\Omega(\rho^1-\rho)\}[(2n-1)!!\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{[2(n-k)]!}{2^{2n-3k}[2(n-k)-1]!!}\cdot$$

$$\cdot\frac{\rho^{2(n-k)}}{(n-k)!\,\Gamma(n-k+1)}\sigma_1^{(k)}(0) + 2^{2n}(2n-1)!!\,\sigma_1^{(n)}(0)]d\rho, \qquad n \geq 2.$$

$$\sigma_1^{(n)}(0) = \frac{\frac{\partial^{(2n)}}{\partial\alpha^{(2n)}}\left[-\frac{i}{2}\Phi^1(\alpha)+i\overline{\Phi}^0(\rho^1,\alpha)\right]\Big|_{\alpha=0}}{\pi 2^{2n}(2n-1)!!\int_0^{\infty}\rho\{i\widehat{\Phi}^0(\rho^1-\rho)-\Omega(\rho^1-\rho)\}d\rho} -$$

$$\frac{\pi(2n-1)!!\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}\cdot\frac{[2(n-k)]!}{2^{2n-3k}[2(n-k)-1]!!}\cdot\frac{\sigma_1^{(k)}(0)}{(n-k)!\,\Gamma(n-k+1)}}{\pi 2^{2n}(2n-1)!!\int_0^{\infty}\rho\{i\widehat{\Phi}^0(\rho^1-\rho)-\Omega(\rho^1-\rho)\}d\rho}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\infty}\rho^{2(n-k)+1}\cdot\{i\widehat{\Phi}^0(\rho^1-\rho)-\Omega(\rho^1-\rho)\}d\rho.$$

Теорема 1 (единственности). Спектральная функция оператора Штурма-Лиувилля $\sigma(\lambda)$ единственна в классе функций $\boldsymbol{\sigma^a}$ и выражается через интегральные преобразования заданной информации (5) о решении прямой задачи (1)-(4).

Теорема 2 (единственности). Неизвестный потенциал $q(z)$ одномерной обратной задачи (1)-(5) однозначно восстанавливается в классе функций $\boldsymbol{Q_M^a}$.

При дифференцировании первого уравнения системы (18) , полагая $\alpha = 0$, получаем нечетные моменты функции $f(\rho)$:

$$M_f^{(2n-1)} = \int_0^\infty \rho^{2n-1} f(\rho)\, d\rho = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{\partial^{(2n-1)}}{\partial \alpha^{(2n-1)}} \left[\Phi^0(\alpha)\right]\Big|_{\alpha=0}, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Теорема 3 (единственности). Моменты $f(\rho)$ единственным образом определяют неизвестный источник $f(\rho) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ в граничном условии (4) обратной задачи (1)-(5) в классе функций Φ.

Новизна работы заключается в том, что решена новая, ранее не исследованная задача; опробирован метод восстановления источника и потенциала в специальных классах функций, впервые примененный в работе [8, с.28-30]; доказаны теоремы единственности.

Изучены классы функций, которые можно восстановить данным методом. Между классами функций $\boldsymbol{Q_M^a}$ и $\boldsymbol{\sigma^a}$ установлено взаимно однозначное соответствие [6, с.66].

Литература

1. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. Издательство «Наука», Москва. 1980.-288с.

2. *Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Издательство «Наука», Сибирское отделение, 1982. 88с.

3. *Алексеев А.С.* Некоторые обратные задачи распространения волн // Известия АН СССР, сер.геофизическая, 1962. № 11. с. 1514-1531.

4. *Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г.* Обратная задача с неизвестным источником.- В кн. Единственность, устойчивость и методы решения обратных и некорректных задач. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1980, с.53-63.

5. *Романов В.Г.* Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск, «Наука». 1972.-164с.

6. *Schabanowa G.I.* The study of the inverse Sturm-Liouville problem in the singular case. Austrian Journal of Technical and Natural Sciences, May-June 2015, -164p.

7. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. Известия АН СССР, сер. Математическая,1951, т. 15, №4.

8. *Шабанова Г.И.* Обратная одномерная задача в линеаризованной и точной постановках. В сб. III Всесибирский конгресс женщин-математиков. Красноярск. 2004.-215с.

Return the one-dimensional problem with an unknown source

Galina I. Schabanowa, *Department of mathematics, senior lecturer, Russia, Siberian Automobile and highway Institute (SibADI)*

Investigated the one-dimensional inverse problem with an unknown source and an unknown variable coefficient two known solutions at fixed points in the plane. Inverse problem using the method of integral transforms is reduced to inverse problem of Sturm-Liouville problem. The uniqueness theorems are proved.

Keywords: integral transforms, operator, bilinear system of integral equations, uniqueness theorems.