**Evaluation of influence that some functioning criteria bring on lon-based networks performance**

***Sergey Alexandrovich Dadenkov*** Assistant, Chair of Automatics and Telemechanics
***Efim Lyvovich Kon*** Professor, Candidate of Technical Sciences, Chair of Automatics and Telemechanics

Perm National Research Polytechnic University

*This paper proposes an approach to the quantitative evaluation of the functioning criteria for importance within the Lon-based network performance estimation. The main results of the proposed importance evaluation for the reviewed criteria, which were not investigated earlier in the proposed combination, are summed up in the recommendations that can be used within the development of adequate analytical and simulation models.*

*Keywords: analytical model, industrial control system, significant factor, performance, recommendations, protocol stack, LonWorks, LonTalk, predictive p-persistent CSMA.*

**УДК: 512**

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СБАЛАНСИРОВАННЫХ k-ЗНАЧНЫХ ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЙ И СИНТЕЗ ПОДСТАНОВОК НА ИХ ОСНОВЕ

***Владимир Глебович Никонов****, д-р.техн.наук, член президиума*
*Тел.: 8 (916) 676-29-28, e-mail: nikonovu@yandex.ru.*
*Российская академия естественных наук*
*http://www.raen.info*
***Данил Андреевич Сошин****, студент*
*Тел. 8 (916) 220-79-96, e-mail: danil_re@list.ru*
*Федеральное государственное унитарное предприятие «Научно-исследовательский институт «Квант» ФГУП НИИ КВАНТ*

*Предложен геометрический способ построения сбалансированных пороговых $k$ –значных функций. Разработан новый метод синтеза на их основе биективных отображений.*

*Ключевые слова: пороговая функция, сбалансированная функция, регулярная система, подстановка.*

В работе рассматривается геометрический метод построения $k$ –значных пороговых функций и подход к компактной реализации биективных отображений специального вида на основе построенных функций. Построение таких систем можно рассматривать как результат продолжения и развития исследований, начатых в работах В.Г. Никонова, А.В. Саранцева, Е.С.Сидорова [2; 3; 4], посвященных изучению регулярных систем однотипных булевых функций. Перенос на $k$ –значный случай генерации подстановок в пороговом базисе удалось осуществить для конкретного сравнительно узкого класса функций, но при этом для различных значений $k$ при размерности пространства $n = 3,4$.

В.Г. Никонов

Д.А. Сошин

Предлагаемый компактный способ реализации позволит сэкономить память и упростить реализацию подстановки в конкретной вычислительной среде.

Координатное отображение $F: \Omega_k^n \to \Omega_k^n$,

$$F(\vec{x}) = \left(f_1^k(\vec{x}), f_2^k(\vec{x}), \dots, f_n^k(\vec{x})\right), \tag{1}$$

где $\Omega_k = \{0,1,\dots,k-1\}$ и $f_i^k(\vec{x}) = f_i^k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - $k-$значные функции, называется *биективным*, а система функций $f_1^k(\vec{x}), f_2^k(\vec{x}), \dots, f_n^k(\vec{x})$ - *регулярной системой*, если $F$ – взаимо-однозначное отображение.

**Определение 1.** Функция $k-$значной логики $f^k: \Omega_k^n \to \Omega_k$ называется *пороговой*, если существуют вещественные наборы $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(b_0, b_1, \dots, b_k)$ такие, что для любого $\alpha \in \overline{0, k-1}$ выполняется условие

$$f^k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha \Leftrightarrow b_\alpha < x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n \le b_{\alpha+1}, \tag{2}$$

где вычисления линейной формы $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$ и сравнения производятся над полем действительных чисел.

**Определение 2.** *Слоем* $D_\alpha$ пороговой функции $f^k$ будем называть те, и только те точки множества $\Omega_k^n$, для которых функция $f^k$ принимает значение $\alpha$, $\alpha \in \overline{0, k-1}$.

В геометрическом смысле каждое неравенство $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n \le b_{\alpha+1}$ задает полупространство, лежащее по одну сторону от гиперплоскости $C_\alpha$, задаваемой равенством $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b_{\alpha+1}$, а слой $D_\alpha$ - множество целочисленных точек $n-$мерного куба со стороной длины $k-1$, расположенных между двумя соседними гиперплоскостями $C_{\alpha-1}$ и $C_\alpha$.

Прежде чем приступить к описанию метода построения сбалансированных пороговых функций, приведем класс сбалансированных пороговых функций, который в последующем определит основу метода.

**Теорема 1.** При $n \ge 3$, $k \ge 2$, $T = (n-1)(k-1) - 1$ функция $f_n^k(\vec{x}) = f^k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданная следующим образом

$$f_n^k(\vec{x}) = \begin{cases} 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + T x_n \le T, \\ \alpha \Leftrightarrow \alpha T \le x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + T x_n \le (\alpha+1)T, \alpha \in \overline{1, k-2}, \\ k-1 \quad \Leftrightarrow (k-1)T \le x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + T x_n \le kT + 1 \end{cases} \tag{3}$$

является сбалансированной пороговой.

Для описания метода построения сбалансированной пороговой функции введем понятия *среза* $S_\alpha -$ множества точек $\{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \alpha) \in \Omega_k^n\}$. Будем говорить, что гиперплоскость пересекает срез, если существуют две точки этого среза, лежащие по разные стороны от гиперплоскости.

Построение в теореме 1 пороговой равновероятной функции основывается на отсечении гиперплоскостями $C_{\alpha-1}$ и $C_\alpha$ в срезе $S_\alpha$ крайних точек, а именно точек $(0,0,\dots,0,\alpha)$ и $(k-1, k-1, \dots, k-1, \alpha)$, и добавлении крайних точек из срезов $S_{\alpha+1}$ и $S_{\alpha-1}$, т.е. $(0,0,\dots,0,\alpha+1)$ и $(k-1, k-1, \dots, k-1, \alpha-1)$, $\alpha \in \overline{1, k-2}$. Слой $D_0$ получен отделением гиперплоскостью $C_0$ точки $(k-1, k-1, \dots, k-1, 0)$ в срезе $S_0$ и добавлением точки $(0,0,\dots,0,1)$ в срезе $S_1$, слой $D_{k-1}$ - удалением точки $(0,0,\dots,0,k-1)$ и добавлением точки $(k-1, k-1, \dots, k-1, k-2)$ из соответствующих срезов. Согласно утверждению теоремы 1, данные слои за счет такой компенсации равномощны. При этом каждая гиперплоскость $C_\alpha$ пересекает только два среза $S_{\alpha-1}$ и $S_\alpha$, $\alpha \in \overline{1, k-1}$.

**Определение 3.** Пороговую функцию назовем $t-$*уровневой,* если для любого $\alpha \in \overline{0, k-1}$ множество $D_\alpha$ содержится в $t$ срезах, при этом $t$ - минимальное с таким свойством.

В частности, теорема 1 описывает 3-уровневую пороговую функцию при $k \ge 3$ и 2-уровневую при $k = 2$.

Опишем класс 3-уровневых сбалансированных пороговых функций, расширяя класс функций, заданный в теореме 1. Для этого рассмотрим семейство гиперплоскостей $С_\alpha$ в $n$ –мерном пространстве, каждая гиперплоскость которого будет проходить через соответствующий набор точек:

$$a^{(1)} = (\ \ r_h\ \ , k-1, k-1, k-1, \dots, k-1, k-1, \alpha);$$
$$a^{(2)} = (k-1,\ \ r_h\ \ , k-1, k-1, \dots, k-1, k-1, \alpha);$$
$$\dots$$
$$a^{(n-1)} = (k-1, k-1, k-1, k-1, \dots, k-1,\ \ r_h\ \ , \alpha);$$
$$a^{(n)} = (h-1, 0, \dots, 0, \alpha+1),$$

где $r_h = k-1-h$, $\alpha \in \overline{0, k-2}$.

Следующая теорема описывает пороговые сбалансированные функции, соответствующие данному семейству гиперплоскостей.

**Теорема 2.** Пусть $R_n = (k-1)(n-1) - 2h + 1$, $P_\alpha = (\alpha+1)R_n + h - 1$ для некоторых $k \geq 2$, $h \geq 1$, $n \geq 3$. Функция $f^k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданная следующим образом

$$f^k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad b_\alpha < x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n R_n \leq b_{\alpha+1}, \tag{4}$$

где $(b_0, b_1, \dots, b_k) = (P_{-2}, P_0, P_1, \dots, P_{k-2}, P_k)$, при $(k-1)(n-1) > 3h - 2$ является сбалансированной пороговой.

Заметим, что при $h = 1$ класс функций, описанный в теореме 2 совпадает с классом функций описанным в теореме 1.

Опишем еще один класс сбалансированных 3-уровневых функций, основанный не на отсечении точек среза, попавших в $(n-1)$-мерный симплекс, как было в теореме 2, а на отсечении многомерного ребра среза. Для этого зададим семейство гиперплоскостей, каждая гиперплоскость которого проходит через соответствующий набор точек:

$$a^{(1)} = (k-1,\ \ r_h\ \ , k-1, k-1, \dots, k-1, k-1, \alpha);$$
$$a^{(2)} = (\ \ 0\ \ ,\ \ r_h\ \ , k-1, k-1, \dots, k-1, k-1, \alpha);$$
$$a^{(3)} = (\ \ 0\ \ , k-1,\ \ r_h\ \ , k-1, \dots, k-1, k-1, \alpha);$$
$$\dots$$
$$a^{(n-1)} = (\ \ 0\ \ , k-1, k-1, k-1, \dots, k-1,\ \ r_h\ \ , \alpha);$$
$$a^{(n)} = (\ \ 0\ \ , h-1,\ \ 0\ \ ,\ \ 0\ \ , \dots,\ \ 0\ \ ,\ \ 0\ \ , \alpha+1),$$

где $r_h = k-1-h, \alpha \in \overline{0, k-2}$.

**Теорема 3.** Пусть $R_{n-1} = (k-1)(n-2) - 2h + 1$, $P'_\alpha = (\alpha+1)R_{n-1} + h - 1$ для некоторых $k \geq 2$, $h \geq 1$, $n \geq 3$. Функция $f^k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданная следующим образом

$$f^k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad b_\alpha < x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n R_{n-1} \leq b_{\alpha+1}, \tag{5}$$

где $(b_0, b_1, \dots, b_k) = (P'_{-2}, P'_0, P'_1, \dots, P'_{k-2}, P'_k)$, при $(k-1)(n-2) > 3h - 2$ является сбалансированной пороговой.

Построенные пороговые сбалансированные $k$ –значные функции будут взяты за основу при синтезе биективных отображений. Для построения регулярной системы используем операции, аналогичные преобразованиям однотипности в булевой области. Группой движения $G_n$ назовем группу, порожденную группами $S_n$ и $N_n$,

$$G_n = < S_n, N_n >, \tag{6}$$

где $S_n$ - группа подстановок на множестве $\overline{1, n}$, а $N_n = \{-1, 1\}$ - группа инвертирования переменных. Действие данных групп на $\Omega_k^n$ определяется следующим образом: для любого $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Omega_k^n$, для любых $s \in S_n$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in N_n$

$$s(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(a_{s^{-1}(1)}, a_{s^{-1}(2)}, \dots, a_{s^{-1}(n)}\right); \tag{7}$$

$$\beta(a_1, a_2, \dots, a_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n),\ \ u_i = \begin{cases} a_i, & \text{если} \beta_i = 1, \\ k-1-a_i, & \text{если} \beta_i = -1. \end{cases} \tag{8}$$

Обозначим через $f_{n,\beta,s}^k$ функцию, полученную из функции $f_n^k$, где $f_n^k$ одна из построенных функций, следующим образом

$$f_{n,\beta,s}^k = f_n^k(\beta s \vec{x}). \tag{9}$$

Произвольной системе $k$ –значных пороговых функций $f_1^k, f_2^k, \dots, f_n^k$ будем ставить в соответствие матрицу $C = (c_{i,j})$, где $c_{i,j}$- коэффициент линейной формы функции $f_i^k$ при переменной $x_j$ с учетом действия преобразования $\beta_j$. При поиске регулярных систем взяты системы вида $f^k_{n,\beta^{(1)},s^{(1)}}, f^k_{n,\beta^{(2)},s^{(2)}}, \dots, f^k_{n,\beta^{(n)},s^{(n)}}$.

Рассмотрим отображение множества $\Omega_k^n$ самого в себя по правилу

$$\pi\left[f^k_{n,\beta^{(1)},s^{(1)}}, f^k_{n,\beta^{(2)},s^{(2)}}, \dots, f^k_{n,\beta^{(n)},s^{(n)}}\right](x_1, x_2, \dots, x_n) = \tag{10}$$
$$= \left(f^k_{n,\beta^{(1)},s^{(1)}}(x_1, x_2, \dots, x_n), f^k_{n,\beta^{(2)},s^{(2)}}(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f^k_{n,\beta^{(n)},s^{(n)}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right).$$

Поиск регулярной системы осуществляется алгоритмическим способом, а именно, путем перебора функций $f^k_{n,\beta^{(i)},s^{(i)}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и проверки факта порождения подстановки.

Следующее утверждение играет важную роль при реализации алгоритмического способа поиска биекций.

**Теорема 4.** Пусть $k > 3$ и для некоторых $s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(n)} \in S_n$ в матрице $C$, отвечающей системе $f^k_{n,\beta^{(1)},s^{(1)}}, f^k_{n,\beta^{(2)},s^{(2)}}, \dots, f^k_{n,\beta^{(n)},s^{(n)}}$, полученной из одной из построенных функций (3), существует столбец $t \in \overline{1,n}$, имеющий в различных строках элементы вида

$$c_{i,t} = \beta_t^{(i)}T, \quad c_{j,t} = \beta_t^{(j)}T,$$

тогда для любых $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(n)} \in N_n$ отображение (10) не является биекцией, где $T$ определено в теореме 1.

Утверждение теоремы 4 справедливо для функций (4) и (5) с заменой $T$ на $R_n$ или $R_{n-1}$ соответственно.

Из данной теоремы следует, что для поиска регулярных систем вида $f^k_{n,\beta^{(1)},s^{(1)}}, f^k_{n,\beta^{(2)},s^{(2)}}, \dots, f^k_{n,\beta^{(n)},s^{(n)}}$ достаточно ограничиться системами вида

$$f^k_{n,\beta^{(1)},\theta}, f^k_{n,\beta^{(2)},s}, f^k_{n,\beta^{(2)},s^2}, \dots, f^k_{n,\beta^{(n)},s^{n-1}}, \tag{11}$$

где $\theta$ тождественная подстановка из $S_n$ и $s = (1,2, \dots, n)$. Действительно, перестановкой столбцов матрицы $C$, соответствующей некоторой системе $f^k_{n,\beta^{(1)},s^{(1)}}, f^k_{n,\beta^{(2)},s^{(2)}}, \dots, f^k_{n,\beta^{(n)},s^{(n)}}$, не удовлетворяющей условию теоремы 2, всегда можно получить матрицу, в частности для функций (4), вида

$$C' = \begin{pmatrix} \beta_1^{(1)} & \beta_2^{(1)} & \dots & \beta_{n-1}^{(1)} & \beta_n^{(1)}T \\ \beta_1^{(2)} & \beta_2^{(2)} & \dots & \beta_{n-1}^{(2)}T & \beta_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta_1^{(n-1)} & \beta_2^{(n-1)}T & \dots & \beta_{n-1}^{(n-1)} & \beta_n^{(n-1)} \\ \beta_1^{(n)}T & \beta_2^{(n)} & \dots & \beta_{n-1}^{(n)} & \beta_n^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

которой соответствует система (11). В то же время, перестановке столбцов произвольной матрицы, соответствующей некоторой системе пороговых функций, отвечает перестановка входного вектора $\vec{x}$, в соответствии с формулой

$$\pi\left[f^k_{n,\beta^{(1)},s^{(1)}s'}, f^k_{n,\beta^{(2)},s^{(2)}s'}, \dots, f^k_{n,\beta^{(n)},s^{(n)}s'}\right](x_1, x_2, \dots, x_n) =$$
$$= \pi\left[f^k_{n,\beta^{(1)},s^{(1)}}, f^k_{n,\beta^{(2)},s^{(2)}}, \dots, f^k_{n,\beta^{(n)},s^{(n)}}\right]\left(s'(x_1, x_2, \dots, x_n)\right).$$

Данный подход при поиске регулярных систем вида $f^k_{n,\beta^{(1)},s^{(1)}}, f^k_{n,\beta^{(2)},s^{(2)}}, \dots, f^k_{n,\beta^{(n)},s^{(n)}}$ сокращает перебор в $c$ раз, где

$$c = \frac{n^n}{n!} \sim \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}, \qquad \ln c \sim n.$$

На основе матрицы (12) для функций (3) с проверкой регулярности отображений на ЭВМ при $n = 4$, были получены следующие результаты:

a) при $k = 2$ получено 3328 биекций;

b) при каждом $k \in \overline{3,10}$ рассмотрены все варианты построения подстановок указанным способом и получено 768 биекций;

c) для одной выбранной матрицы построена подстановка для $k = 32$ степени $r = 2^{20} = 1048576$.

Проверка результатов полученных в теоремах 1,2,3 на ЭВМ для всех $k \in \overline{2,10}$, $n \in \overline{2,10}$ и для каждого целого $h$, удовлетворяющего условиям теоремы, дала положительный результат.

В заключение в качестве примера рассмотрим $k = 4$ и зафиксируем

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 8 & -1 \\ 1 & 8 & -1 & -1 \\ -8 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построенная подстановка, соответствующая матрице $C$, имеет цикловую структуру $(1^{44}, 4^5, 48^4)$ (см. [1]). Ниже приводится цикловая запись данной подстановки при условии, что каждому вектору $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \Omega_4^4$ поставлен в соответствие его лексикографический номер.

1 цикл длины 44:

(3,16,196,211,7,32,200,227,11,48,204,243,15,52,220,247,31,56,236,251,47,60,252,239,59,44, 248,223,55,28,244,207,51,12,240,203,35,8,224,199,19,4,208,195)

4 цикла длины 5:

(0,128,193,131,2) (1,64,192,194,67)(127,62,124, 253,255)(61,188,254,191,63)

48 циклов длины 4:

(6,80,197,147)(5,144,198,83)(9,160,202,99)(10,96,201,163)(13,176,206,115)(14,112,205,179) (17,132,210,71)(18,68,209,135)(20,212,215,23)(21,148,214,87)(22,84,213,151)(24,228,219,39) (25,164,218,103)(26,100,217,167)(27,36,216,231)(29,180,222,119)(30,116,221,183)(33,136,226,75) (34,72,225,139)(37,152,230,91)(38,88,229,155)(40,232,235,43)(41,168,234,107)(42,104,233,171) (45,184,238,123)(46,120,237,187)(49,140,242,79)(50,76,241,143)(53,156,246,95)(54,92,245,159) (57,172,250,111)(58,108,249,175)(65,129,130,66)(69,145,134,82)(70,81,133,146) (73,161,138,98) (74,97,137,162) (77,177,142,114)(78,113,141,178)(85,149,150,86)(89,165,154,102)(90,101,153,166) (93,181,158,118)(94,117,157,182)(105,169,170,106)(109,185,174,122)(110,121,173,186) (125,189,190,126).

**Литература**

1. *Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А.* Алгебра / – М.: Гелиос-АРВ. 2003. Т. 1, 2.

2. *Никонов В.Г., Саранцев А.В.* Методы компактной реализации биективных отображений, заданных регулярными системами однотипных булевых функций // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Прикладная и компьютерная математика. 2003. Т. 2. № 1. С. 94-105.

3. *Никонов В.Г., Саранцев А.В.* Построение и классификация регулярных систем однотипных функций // Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе: материалы XXXI Международной конференции. Т. 5 из Прил. 1. – М.: .Академия естествознания, 2004. С. 173-174.

4. *Никонов В.Г., Сидоров Е.С.* О способе построения взаимно однозначных отображений при помощи квазиадамаровых матриц // Вестник Московского государственного университета леса – Лесной вестник. 2009. №2 (65).

**The geometric method for constructing a balanced k-valued threshold functions and construction of substitutions based on them**

***Vladimir Glebovich Nikonov***, *PhD, Member of Presidium of Russian Academy of Natural Sciences*

***Danil Andreevich Soshin***, *student*

*Research Institute KVANT*

*The article deals with the geometric method for constructing balanced threshold k-valued functions. A new method of synthesis of bijective mappings on their basis is considered.*

*Keywords: threshold function, balanced function, regular system, substitution.*