

$$\mathcal{F}(T_1) = \mathcal{F}(T_2) = F, \quad \mathcal{F}(T_3) = H_2, \quad \mathcal{F}(T_4) = H_4, \quad \mathcal{F}(T_5) = H_3.$$

Автор считает, что все перечисленные выше результаты (леммы 1–5) являются новыми. Ослабление ассоциативности умножения приводит к появлению свойств конечного полуполя, являющихся аномальными в сравнении со свойствами конечного поля. Отметим, что изученное полуполе Хентзела – Руа содержит пять различных подполей одного и того же порядка 4 (свойство, невозможное для поля $GF(64)$). Кроме того, порядок мультипликативной лупы ненулевых элементов не делится на порядки элементов 5 и 6, а также на правые (левые) порядки 6, 12 и 15. Однако даже не являющееся ни лево-, ни правопримитивным полуполе W удовлетворяет условию однопорожденности лупы W^* .

Литература

1. *Wene G.P.* On the multiplicative structure of finite division rings // *Aequation Mathematicae*. 1991. № 41. С. 222-233.
2. *Rúa I.F.* Primitive and non-primitive finite semifields // *Commun. Algebra*. 2004. Вып. 32. № 2. С. 793-803.
3. *Hentzel I.R., Rúa I.F.* Primitivity of finite semifields with 64 and 81 elements // *Int. J. Algebra Comput.* 2007. Вып. 17. № 7. С. 1411-1429.
4. *Левчук В.М., Штуккерт П.К.* Строение квазиполей малых четных порядков // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2015. Вып. 21. № 3. С. 197-212.

On right-primitivity conjecture for finite semifield

Olga Vadimovna Kravtsova, PhD., Associate Professor, Siberian federal university

The author consider the algebraic properties of the semifield of order 64 that is one of two known counter-examples to G. Wene conjecture of left-primitivity for any finite semifield. The subfields, automorphisms and spectrum are described. It is proved that the multiplicative loop of non-zero elements of this semifield is singly-generated.

Keywords – semifield, spectrum of semifield, left-primitivity, automorphism.

УДК 539.37

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕДЛЕННОГО ДВИЖЕНИЯ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ В СХОДЯЩЕМСЯ КАНАЛЕ

Ольга Игоревна Кузоватова, к.ф.-м.н, доцент

Тел.: 8 391 206 2116, e-mail: oik17@yandex.ru

Сибирский федеральный университет

<http://www.sfu-kras.ru>

Для исследования локализации деформаций при движении сыпучей среды под действием собственного веса в сходящемся канале используются вариационные принципы теории предельного равновесия, установленные в рамках специальной математической модели материала, по-разному сопротивляющегося растяжению и сжатию. Получена оценка для коэффициента запаса.

Ключевые слова: вариационное неравенство, разнопрочная среда, локализация деформаций.



О.И. Кузватова

Многие природные и искусственные материалы разнопрочны, они имеют существенно различные прочностные свойства при растяжении и сжатии. Таким свойством обладают геоматериалы, к которым относятся материалы, составляющие внешнюю оболочку Земли: горные породы, сыпучие среды, сухие и водонасыщенные грунты и др.

Одной из фундаментальных задач геомеханики является задача о движении геоматериалов в сходящихся каналах. Анализ движения раздробленной горной породы и сыпучих сред в суживающихся каналах представляет интерес для ряда технологических процессов добычи полезных ископаемых (обрушение и выпуск из очистных блоков и камер, движение в рудоспусках), для хранения и переработки зерновых культур (выпуск из бункеров и силосов). Подобные процессы имеют место в естественных условиях при смещении горных пород и грунтов вокруг шахтных стволов и выработок, при формировании мульд сдвижения горных массивов над выработанным пространством и карстовыми пустотами и др. Приближенное (инженерное) решение задачи и результаты натурных экспериментов представлены в работах [1;2].

Цель настоящей работы – построить аналитическое решение задачи о движении сыпучей среды в сходящемся канале на основе оригинальной модели, учитывающей разнопрочность материала. С помощью вычислительного алгоритма на основе метода конечных элементов, провести численные расчеты задачи.

1. Математическая модель

Для описания напряженно-деформированного состояния сыпучей среды как разнопрочного материала, имеющего различные пределы прочности при растяжении и сжатии, будем использовать модель среды с пластическими связями [3;4]. Под действием сжимающих или растягивающих напряжений, меньших коэффициента сцепления (предела прочности связей), такая среда не деформируется. По мере достижения предела прочности деформация развивается в соответствии с теорией линейного упрочнения. Реологическая схема модели представлена на рис. 1.

Судя по этой схеме, справедливо аддитивное представление $\sigma = \sigma^c + \sigma^0 + \sigma^e$, здесь σ – тензор полных напряжений, σ^c – тензор напряжений в контакте, σ^0 – тензор сцепления, $\sigma^e = E : \varepsilon$ – тензор упругих напряжений, ε – тензор деформаций, E – симметричный

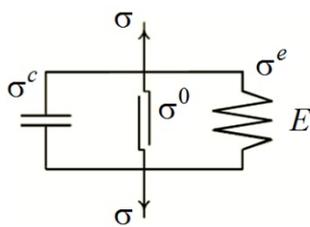


Рис. 1. Реологическая схема

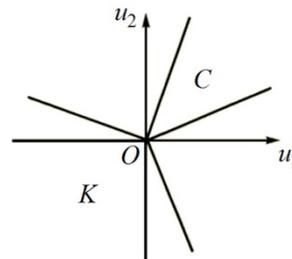


Рис. 2. Конусы деформаций C и напряжений K

положительно определенный тензор модулей упругости. Тензор σ^c подчиняется вариационному неравенству

$$\sigma^c : (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \leq 0, \quad \varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in C, \quad (1)$$

в котором C – конус допустимых деформаций (рис. 2), имеющий вид $C = \{\varepsilon \mid \kappa\gamma(\varepsilon) \leq \theta(\varepsilon)\}$, κ – параметр дилатансии, $\gamma(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon' : \varepsilon'}$ – интенсивность сдвига, $\varepsilon' = \varepsilon - \theta\delta/3$ – девиатор деформаций, $\theta(\varepsilon) = \varepsilon : \delta$ – деформация объема, δ – символ Кронекера.

С учетом введенных обозначений неравенство (1) принимает вид

$$(E : \varepsilon - \sigma + \sigma^0) : (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \geq 0, \quad \varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in C,$$

По определению проекции это означает, что

$$\varepsilon = \pi_C \left[E^{-1} (\sigma - \sigma^0) \right],$$

где π – оператор проекции на конус C по норме $|\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon : E : \varepsilon}$.

Рассмотрим элемент конструкции из разнопрочного материала, занимающий плоскую область Ω с границей $\partial\Omega = \Gamma$, состоящей из двух непересекающихся частей Γ_u и Γ_σ , на первой из которых отсутствуют перемещения, а на второй задан вектор распределенной нагрузки p . Справедливы уравнения равновесия в вариационной форме и граничные условия:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma + f)(\tilde{u} - u) d\Omega = 0, \tag{2}$$

$$u = \tilde{u} = 0 \text{ на } \Gamma_u, \quad \sigma \cdot n = p \text{ на } \Gamma_\sigma. \tag{3}$$

Задача (2) – (3) сводится к задаче о минимуме $\min_{\tilde{u} \in U_c} J(\tilde{u}) = J(u)$, где

$$J(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \varepsilon : E : \varepsilon + \varepsilon : \sigma^0 - f \cdot u \right) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} p \cdot u d\Gamma,$$

$$U_C = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Gamma_u} = 0, \quad \varepsilon(u) \in C \right\}.$$

Так как C – конус с вершиной в нуле, то $J(u) = \min_{\tilde{u} \in U_c} \min_{\lambda \geq 0} J(\lambda\tilde{u})$,

$$J(\lambda\tilde{u}) = \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda^2}{2} \varepsilon(\tilde{u}) : E : \varepsilon(\tilde{u}) + \lambda \varepsilon(\tilde{u}) : \sigma^0 - \lambda f \cdot \tilde{u} \right) d\Omega - \lambda \int_{\Gamma_\sigma} p \cdot \tilde{u} d\Gamma.$$

Непосредственное вычисление $\min_{\lambda \geq 0} J(\lambda\tilde{u})$ показывает, что

$$\lambda = - \frac{\left[\int_{\Omega} (\varepsilon(\tilde{u}) : \sigma^0 - f \cdot \tilde{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} p \cdot \tilde{u} d\Gamma \right]_+}{\int_{\Omega} \varepsilon(\tilde{u}) : E : \varepsilon(\tilde{u}) d\Omega}, \quad \text{где } z_+ = \begin{cases} z, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$J(u) = - \max_{\substack{\tilde{u} \in U_c \\ \tilde{u} \neq 0}} \frac{\left[\int_{\Omega} (\varepsilon(\tilde{u}) : \sigma^0 - f \cdot \tilde{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} p \cdot \tilde{u} d\Gamma \right]_+^2}{2 \int_{\Omega} \varepsilon(\tilde{u}) : E : \varepsilon(\tilde{u}) d\Omega}.$$

Отсюда можно показать, что поле перемещений тождественно равно нулю, в том и только том случае, если

$$\int_{\Omega} (\varepsilon(\tilde{u}) : \sigma^0 - f \cdot \tilde{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} p \cdot \tilde{u} d\Gamma \leq 0, \quad \forall \tilde{u} \in U_c. \quad (4)$$

Нагрузка (f, p) называется безопасной, если $u \equiv 0$. Пусть $p = 0$, $f = m \cdot f^0$, где m – параметр нагружения. Тогда из (4) получим, что нагрузка будет безопасной при изменении параметра m от нуля до предельного значения (коэффициента запаса)

$$m^* = \min_{\substack{\tilde{u} \in U_c \\ \tilde{u} \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} \varepsilon(\tilde{u}) : \sigma^0 d\Omega}{\left[\int_{\Omega} f \cdot \tilde{u} d\Omega \right]_+}. \quad (5)$$

Доказанное утверждение представляет собой формулировку кинематической теоремы о предельном равновесии, известной из теории пластичности [5].

2. Аналитическое решение

В качестве примера рассмотрим задачу о плоском течении под действием собственного веса сыпучей среды в сходящемся канале. Предположим, что $\alpha > \beta$ и рассмотрим два случая, представленных на рис. 3, 4.

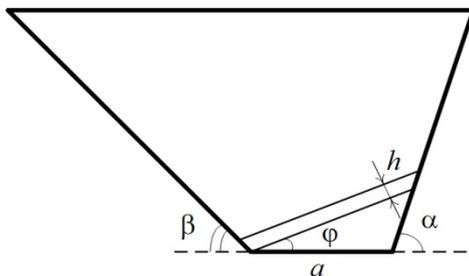


Рис. 3. Случай 1

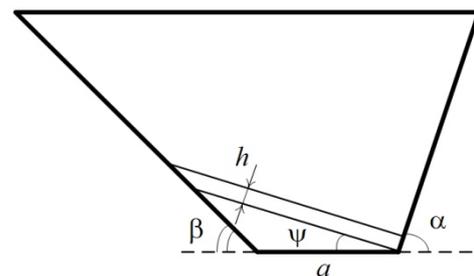


Рис. 4. Случай 2

Рассчитаем коэффициенты запаса m_1 и m_2 , выберем наименьшее значение, которое и будет коэффициентом запаса m^* в данной задаче.

Для случая 1 допустимое поле перемещений $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ описывает локализацию деформации простого сдвига с дилатансией в узкой линейной зоне толщины h , наклоненной под углом φ . В декартовой системе координат, связанной с этой зоной

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = -u_0 \cos(\alpha - \varphi), \\ \tilde{u}_2 = -u_0 \sin(\alpha - \varphi). \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_0 = \frac{u_0}{h} \cos(\alpha - \varphi), \\ \varepsilon_0 = \frac{u_0}{h} \sin(\alpha - \varphi). \end{cases}$$

Проведем расчеты интегралов, входящих в (5).

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\tilde{u}) : \sigma^0 d\Omega = \varepsilon_0 \sigma^0 S,$$

здесь $\sigma^0 = \tau_s / k$, τ_s – предел текучести, $S = hl$, $l = a(\cos \varphi + \sin \varphi \operatorname{ctg}(\alpha - \varphi))$.

“Выпадающая” треугольная область движется как твердое целое, следовательно,

$$\int_{\Omega} f^0 \cdot \tilde{u}_0 d\Omega = f^0 \cdot S_{\Delta},$$

здесь $f^0 = \rho g u_0 \sin \alpha$, $S_\Delta = \frac{1}{2} H l$, $H = a \sin \varphi$. Поэтому коэффициент запаса m_1 равен

$$m_1 = \frac{2\tau_s}{\kappa \rho g a} \min_{\substack{\tilde{u} \in U_C \\ \tilde{u} \neq 0}} \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha \sin \varphi} \quad (6)$$

Условие $\tilde{u} \in U_C$ принимает следующий вид: $\gamma_0 \leq v \varepsilon_0$, где $v = \sqrt{1/\kappa^2 - 4/3}$. Тогда

$$\frac{\varepsilon_0}{\gamma_0} = \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \geq \frac{1}{v} \quad \text{или} \quad \sin(\alpha - \varphi) \geq \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}}.$$

Выражение (6) достигает своего минимума при равенстве в последних выражениях.

Вычислив $\sin \varphi = \frac{v \sin \alpha - \cos \alpha}{\sqrt{v^2 + 1}}$, получим формулу для коэффициента запаса:

$$m_1 = \frac{2\tau_s}{\kappa \rho g a} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{(v \sin \alpha - \cos \alpha)}.$$

При рассмотрении случая 2, проводя аналогичные расчеты, можно получить следующую формулу для коэффициента запаса:

$$m_2 = \frac{2\tau_s}{\kappa \rho g a} \min_{\substack{\tilde{u} \in U_C \\ \tilde{u} \neq 0}} \frac{\sin(\beta - \psi)}{\sin \beta \sin \psi} \quad \text{и} \quad m_2 = \frac{2\tau_s}{\kappa \rho g a} \frac{1}{\sin \beta} \frac{1}{(v \sin \beta - \cos \beta)}.$$

Анализ показал, что неравенство $m_1 < m_2$ справедливо при $\beta < \alpha$. Таким образом, зона локализации направлена под углом

$$\varphi = \alpha - \arcsin \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}} \quad (7)$$

и соответствует рис. 3, [6].

Следует отметить, что в инженерном решении, которое получено в [4], прямолинейные зоны локализации деформаций задавались произвольным образом, исходя из механических соображений. В действительности оказывается, что их направления могут быть определены однозначно на основе вариационного принципа (5). Заметим, что решения с криволинейными зонами локализации деформаций ранее рассматривались в [7, 8].

3. Численное моделирование

Вычислительный алгоритм основан на конечно-элементной аппроксимации модели. Алгоритм приводит задачу определения поля перемещений в разнородной среде к решению последовательности статических задач линейной упругости с начальными напряжениями. Алгоритм не использует теорем об оценке предельной нагрузки. С его помощью предельные нагрузки можно определить только приближенно как нагрузки, превышение которых приводит к интенсивному деформированию материала, [8].

В качестве начального приближения в итерационном процессе используется решение упругой задачи. Идея алгоритма состоит в замене определяющих уравнений

$$\sigma = E : \varepsilon - \frac{1}{1 + \lambda} \pi(E : \varepsilon - \sigma_0),$$

где $\lambda = \text{const} \geq 0$, итерационной формулой ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\sigma^n = E : \varepsilon^n - \frac{1}{1 + \lambda} \pi(E : \varepsilon^{n-1} - \sigma_0).$$

Здесь π – оператор проекции на конус K по норме $|\sigma|_0 = \sqrt{\sigma : E^{-1} : \sigma}$, который действует следующим образом (k – модуль объемного сжатия, μ – модуль сдвига), [4]:

- если $\tau(s) \leq \kappa p(s)$, то $\sigma = s$;
- если $\tau(s) > \kappa p(s)$ и $\mu p(s) + \kappa k \tau(s) \leq 0$, то $\sigma = 0$;
- если $\tau(s) > \kappa p(s)$ и $\mu p(s) + \kappa k \tau(s) > 0$, то

$$\sigma = \frac{\kappa p(\sigma)}{\tau(\sigma)} [s + p(s) \cdot \delta] - p(\sigma) \cdot \delta, \quad p(\sigma) = \frac{\mu p(s) + \kappa k \tau(s)}{\mu + \kappa^2 k}.$$

Итерации продолжаются до тех пор пока норма разности двух последовательных решений не станет меньше наперед заданной точности вычислений.

Параметр внутреннего трения разнопрочной среды изменяется в пределах $0 < \kappa < \sqrt{3}/2$, расчеты проведены при $\kappa = 0,3$. Параметр регуляризации λ в расчетах полагался равным 0,0001. Дальнейшее его уменьшение нецелесообразно, так как это приводит к замедлению сходимости алгоритма. Точность вычислений в итерационном алгоритме $\varepsilon = 0,0001$. Численные эксперименты выполнены по программе, составленной на алгоритмическом языке Borland C++.

4. Результаты численных экспериментов

В данном параграфе рассмотрим графическую интерпретацию результатов вычислительных экспериментов для задачи о плоском течении под действием собственного веса сыпучей среды в сходящемся канале (рис. 3).

Обозначим через

$$f_{кр} = m^* \rho g = \frac{2\tau_s}{\kappa a \sin \alpha (v \sin \alpha - \cos \alpha)}. \quad (8)$$

Если $f < f_{кр}$, то локализации деформаций нет. Среда слишком легкая, чтобы продвигаться по каналу. Если $f > f_{кр}$, то среда движется. В этом случае должна быть видна зона проскальзывания.

На рис. 5 (а) представлено поперечное сечение симметричного сходящегося канала, параметры заданы следующие $\alpha = \beta = 63,43^\circ$, $a = 2$ м. На рис. 5 (б) конечно-элементная сетка образца включает в себя 859 узлов и 1596 элементов, характерный размер стороны треугольника 0,18 м при площади образца 16 м².

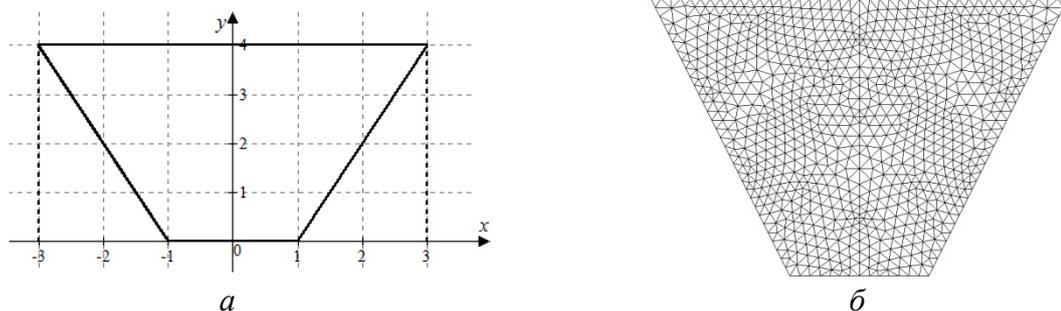


Рис. 5. Симметричная область

По формуле (8) рассчитано значение $f_{кр} = 0,08\tau_s$. По формуле (7) рассчитан наиболее вероятный угол выхода линейной зоны локализации деформаций $\varphi = 45,70^\circ$.

На рис. 6 (а) представлено поле интенсивности сдвига, полученное на основе классической теории упругости, на рис. 6 (б) – на основе модели разнопрочной среды с параметром внутреннего трения $\kappa = 0,3$, прямой черного цвета показано направление линии локализации деформаций под углом $\varphi = 45,70^\circ$.

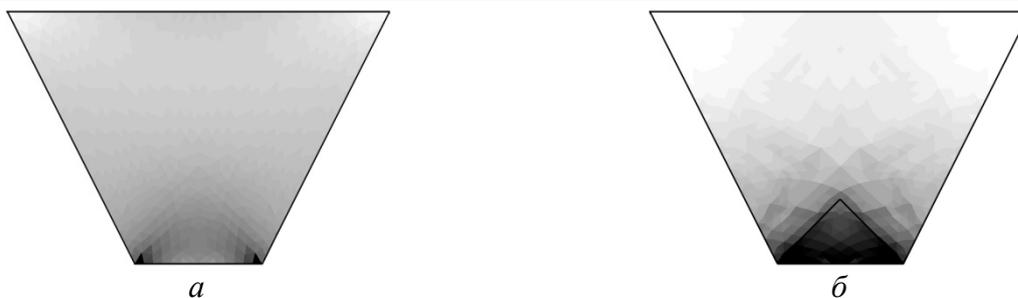


Рис. 6. Интенсивность деформации сдвига

На рис. 7 (а) представлено поперечное сечение несимметричного сходящегося канала, параметры заданы следующие $\alpha = 76,2^\circ$, $\beta = 35^\circ$, $a = 2$ м. На рис. 7 (б) конечно-элементная сетка образца включает в себя 1035 узлов и 1922 элемента, характерный размер стороны треугольника 0,18 м при площади образца 30,92 м².

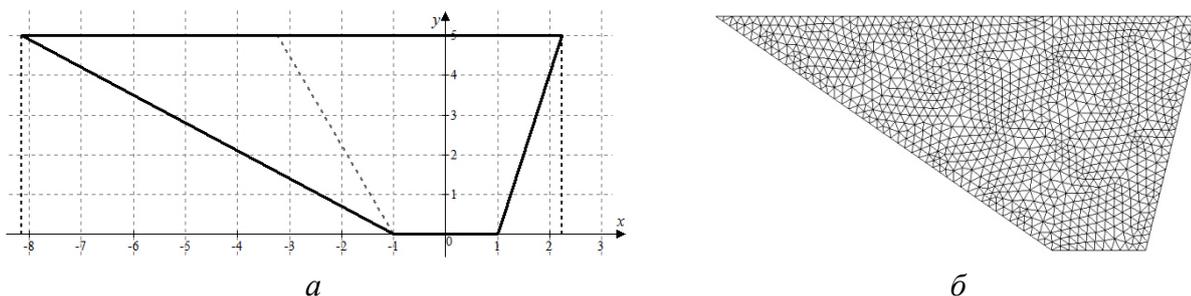


Рис. 7. Несимметричная область

По формуле (8) рассчитано значение $f_{кр} = 0,06\tau_s$. По формуле (7) рассчитан наиболее вероятный угол выхода линейной зоны локализации деформаций $\varphi = 58,49^\circ$.

На рис. 8 (а) представлено поле интенсивности сдвига, полученное на основе классической теории упругости, на рис. 8 (б) – на основе модели разнопрочной среды с параметром внутреннего трения $\kappa = 0,3$, прямой черного цвета показано направление локализации деформаций под углом $\varphi = 58,49^\circ$.



Рис. 8. Интенсивность деформации сдвига

Итак, вычислительные эксперименты задачи о движении сыпучей среды в сходящемся канале подтверждают наличие линейных зон локализации деформаций под углом φ , вычисляемого по формуле (8), и соответствуют рис. 3.

Заключение

Автор считает, что в данной работе новыми являются следующие положения и результаты:

1. На основе теоремы о предельной нагрузке при наличии массовых сил построено решение с линейной зоной локализации деформаций.

2. Разработан эффективный вычислительный алгоритм для исследования плоских квазистатических задач в рамках математической модели разнопрочной среды.

3. Проведены вычислительные эксперименты, моделирующие движение сыпучей среды в сходящемся канале, которые подтверждают наличие линейных зон локализации деформаций.

Литература

1. Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф. О расчете локализованных течений сыпучей среды в радиальных каналах // ФТПРПИ. 1990. № 1. С. 3-9.
2. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. Несимметрия пластического течения в сходящихся осесимметричных каналах // ДАН СССР. 1979. Т. 246. № 3. С. 572-574.
3. Мясников В.П., Садовский В.М. Вариационные принципы теории предельного равновесия разнопрочных сред // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 488-499.
4. Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: Физматлит. 2008. 368 с.
5. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Вып. 1. Сущность метода и его обоснование. М.: Стройиздат. 1949. 280 с.
6. Кузоватова О.И., Садовский В.М. О локализации деформаций при движении сыпучей среды в сходящемся канале // Численные методы задач теории упругости и пластичности: материалы XXIV Всерос. конф. (Омск, 2-4 июня 2015 г.) / Рос. фонд фундамент. исслед. [и др.]; [науч. ред. В.М. Фомин] Омск: Изд-во ОмГУ, 2015. С. 126-129.
7. Друккер Д., Прагер В. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование // Определяющие законы механики грунтов. Сер. "Новое в зарубежной науке". Вып. 2. М.: Мир, 1975. С. 166-177.
8. Кузоватова О.И., Садовский В.М. Моделирование локализации деформации в разнопрочной среде // Журнал СФУ: Математика и физика. 2008. Т. 1 № 3. С. 272-283.

Modeling of slow motion of a granular medium in converging channels

Olga Igorevna Kuzovatova, PhD, Associate Professor, Siberian federal university

The aim of this work is to find approximate analytical solution of the problem of loose medium motion in a converging channel, to develop computational algorithm based on the finite element method, and to carry out numerical calculations of the problem.

Keywords – variational inequality, materials with different strengths, strains localization.

УДК 517.956

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*Айнура Кудайбергеновна Курманбаева зав.каф., к.ф.-м.н., доцент,
E-mail: ainura1971@mail.ru*

*Кыргызский государственный технический университет им.И.Раззакова
<http://www.kstu.kg>*

В данной работе рассматриваются линейные обратные задачи для псевдо гиперболического уравнения. Доказываются соответствующие теоремы об однозначной разрешимости рассматриваемых обратных задач.

Ключевые слова: обратная задача, псевдогиперболическое уравнение, уравнение Вольтерра, условия переопределения