дата обращения: 08.02.2016).

2. *Бек М.А., Бек Н.Н., Бузулукова Е.В. и др* Методология исследования сетевых форм организации бизнеса: коллект. моногр. /. / под науч. ред. М.Ю. Шерешевой; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2014. 446 с.

3. *Куснер Ю.С., Царёв И.Г.* Принципы движения экономической системы. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2008. 200 с.

4. *Клиначёв Н.В.* Теория систем автоматического регулирования. Челябинск. 2009. URL: http://www.model.exponenta/ru/ndbg.html (дата обращения: 04.02.2016).

5. *Дулесов А.С., Курынова И.А*. Упрощённая математическая модель регионального потребительского рынка одного товара // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 4. URL: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=6595 (дата обращения: 04.02.2016).

Modelling of the exchange processes in trade systems

Irina Anatoljevna Gimanova*, Khakas State University named after N.F.Katanov*

In this work the question of modeling of stream processes between participants in trade-commerce systems is considered. The model of the description processes of an exchange between economic agents of a network in the local markets taking into account factors of supply and demand is developed.

Keywords: theory of active systems, modeling, mathematical models of social and economic processes, trade-commerce network.

УДК 519.248

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛА СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ СТРАХОВОМ ПОЛЕ

Диана Дамировна Даммер*, к. ф.-м. н, доцент*

Тел.: 8 913 803 69 65, e-mail: di.dammer@yandex.ru

Томский государственный университет

www.tsu.ru

Настоящая работа посвящена исследованию модели страховой компании с ограниченным страховым полем в виде системы массового обслуживания с неограниченным количеством обслуживающих приборов. С помощью метода характеристических функций получено двумерное распределение числа застрахованных в компании рисков и числа требований на выплату страховых сумм.

Ключевые слова: математическая модель, страховая компания, страховые выплаты, система массового обслуживания, характеристическая функция.

Моделям социально-экономических систем и их исследованию в настоящее время уделяется достаточно большое внимание. Как правило, во всех работах, посвященных исследованию математических моделей страховых компаний, находятся такие характеристики работы компании: математические ожидания числа рисков, капитала, также вероятность разорения и др. Так, в работе [1] исследуется классическая модель страховой компании, в [2] рассматривается модель с учетом расходов на рекламу, в [3] исследуется модель с возможностью перестраховки некоторых рисков компании. В перечисленных работах исследуется процесс числа застрахованных в компании рисков при условии неограниченного и ограниченного страхового поля, процесс же выплат страховых сумм никаким образом не учитывается. В работе [4] получено распределение

Д.Д. Даммер

числа требований на выплату страховых сумм с произвольной величиной продолжительности договора, в [5] методом асимптотического анализа найдено двумерное распределение числа требований на страховые выплаты и числа застрахованных в компании рисков, в [6] исследуется тот же двумерный процесс с учетом неявной рекламы. В последних трех работах исследования проводились в условиях неограниченного страхового поля. В данной работе исследуется двумерный процесс числа застрахованных рисков и числа требований на выплату страховых сумм при условии ограниченного страхового поля.

1. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим модель страховой компании с ограниченным страховым полем в виде системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов (рисунок).

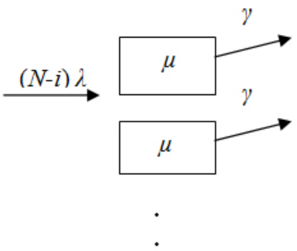

Рисунок. Представление модели страховой компании в виде бесконечнолинейной системы массового обслуживания

Пусть N – максимально возможное число потенциальных рисков. За бесконечно малый промежуток времени каждый из N потенциальных рисков компании с вероятностью $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ может застраховаться. Риск не может быть застрахован повторно, если срок действующего договора не истек. Обозначим $i(t)$ – число застрахованных в компании рисков в момент времени t. Тогда поток рисков, приходящих в компанию, будет пуассоновским с параметром $(N - i(t))\lambda$. Срок действия договора страхования соответствует длительности обслуживания заявки на приборе. Каждый риск, находящийся в компании, на протяжении длительности действия договора независимо от других рисков генерирует с интенсивностью γ требование на выплату страховых сумм. И эти требования образуют простейший поток событий. Естественно считать, что требование риска на выплату определяется наступлением страхового случая. Величину продолжительности договора страхования для каждого риска, находящегося в компании, будем считать случайной величиной, распределённой по экспоненциальному закону с параметром μ.

Введем обозначения: $n(t)$ – число требований на выплату страховой суммы за интервал времени $[0,t]$, $P(i,n,t) = P\{i(t) = i,\ n(t) = n\}$ – вероятность того, что в момент времени t в компании находится i застрахованных рисков, и число требований на выплату страхованных сумм к этому же моменту составило n. Задача состоит в том, чтобы найти двумерное распределение процессов $i(t)$ и $n(t)$.

2. Распределение числа застрахованных рисков и числа требований на страховые выплаты

Используя $\Delta(t)$ метод, составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова [7] для распределения вероятностей $P(i,n,t)$. Сначала запишем допредельные равенства:

$$P(i,n,t+\Delta t) = P(i,n,t)(1-(N-i)\lambda\Delta t - i\mu\Delta t - i\gamma\Delta t) +$$

$$+ P(i-1,n,t)(N-(i-1))\lambda\Delta t + P(i+1,n,t)(i+1)\mu\Delta t + P(i,n-1,t)\,i\gamma\Delta t + o(\Delta t),$$

Перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$, получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial P(i,n,t)}{\partial t} = -P(i,n,t)(N\lambda + i\mu + i\gamma - i\lambda) + P(i-1,n,t)(N\lambda - (i-1)\lambda) +$$

$$+ P(i+1,n,t)(i+1)\mu + P(i,n-1,t)\,i\gamma\,. \tag{1}$$

Для решения системы (1) определим характеристическую функцию

$$H(u,z,t)=\sum_{i,n=0}^{\infty} e^{iuj}e^{nzj}P(i,n,t),$$

где j – мнимая единица. И далее будет решаться задача определения вида этой функции.

Из системы (1) с учетом свойств характеристических функций получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка относительно функции $H(u,z,t)$:

$$\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial t}+j\left[\lambda-\lambda e^{ju}+\mu e^{-ju}+\gamma e^{jz}-\mu-\gamma\right]\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial u}=N\lambda\left(e^{ju}-1\right)H(u,z,t). \qquad (2)$$

Решение дифференциального уравнения (2) определяется решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристических кривых [8]:

$$\frac{dt}{1}=\frac{du}{-j(-\lambda+\mu+\gamma+\lambda e^{ju}-\mu e^{-ju}-\gamma e^{jz})}=\frac{dH(u,z,t)}{H(u,z,t)N\lambda(e^{ju}-1)}.$$

Найдем два первых интеграла системы. Сначала рассмотрим уравнение:

$$dt=\frac{du}{j(-\lambda(e^{ju}-1)+\mu(e^{-ju}-1)-\gamma(1-e^{jz}))}.$$

Сделаем замену переменных: $e^{ju}-1=v$. Тогда

$$dt=\frac{dv}{\lambda(v-v_1)(v-v_2)}, \qquad (3)$$

где

$$v_{1,2}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\gamma}{\lambda}\left(1-e^{jz}\right)\right)\pm\frac{\sqrt{D}}{2}, \qquad (4)$$

$$D=\left(1+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\gamma}{\lambda}\left(1-e^{jz}\right)\right)^2-4\frac{\gamma}{\lambda}\left(1-e^{jz}\right)>0.$$

Решение уравнения (3) будет иметь вид

$$t=\frac{1}{\lambda(v_2-v_1)}\ln\left(\frac{v-v_2}{v-v_1}\right)-\ln\left(\tilde{C}_1\right),$$

что и будет определять наш первый интеграл. Запишем выражение для константы $\tilde{C}_1$:

$$\tilde{C}_1=e^{-t}\left(\frac{v-v_2}{v-v_1}\right)^{\frac{1}{\lambda(v_2-v_1)}}.$$

Обозначим $C_1=\tilde{C}_1^{\lambda(v_2-v_1)}$, тогда

$$C_1=e^{\lambda(v_1-v_2)t}\left(\frac{v-v_2}{v-v_1}\right). \qquad (5)$$

Другой первый интеграл найдем из уравнения:

$$\frac{dH(u,z,t)}{N\lambda H(u,z,t)(e^{ju}-1)}=\frac{du}{j(-\lambda(e^{ju}-1)+\mu(e^{-ju}-1)-\gamma(1-e^{jz}))}. \qquad (6)$$

В уравнении (6) сделаем аналогичную замену переменных $e^{ju}-1=v$. Определим функцию $H_1(v,z,t)=H(u,z,t)$, тогда с учетом (3) можем записать

$$\frac{dH_1(v,z,t)}{H_1(v,z,t)}=\frac{N\lambda v dv}{\lambda(v-v_1(z))(v-v_2(z))}\ . \tag{7}$$

В последнем уравнении указана зависимость корней v_1 и v_2 от z. Решение этого уравнения будет иметь вид:

$$H_1(v,z,t)=C_2\left[\frac{(v-v_2(z))^{v_2(z)}}{(v-v_1(z))^{v_1(z)}}\right]^{-\frac{N}{(v_1(z)-v_2(z))}}. \tag{8}$$

Введем произвольную дифференцируемую функцию $\varphi(C_1)=C_2$, где C_1 определяется выражением (5). Тогда общее решение уравнения (6) запишем в виде:

$$H_1(v,z,t)=\varphi\left[e^{\lambda(v_1(z)-v_2(z))t}\left(\frac{v-v_2(z)}{v-v_1(z)}\right)\right]\left[\frac{(v-v_2(z))^{v_2(z)}}{(v-v_1(z))^{v_1(z)}}\right]^{-\frac{N}{(v_1(z)-v_2(z))}}. \tag{9}$$

Частное решение определим с помощью начальных условий. Запишем значение функции $H(u,z,t)$ при $t=0$. Имеем

$$H(u,z,0)=\sum_{i,n=0}^{\infty}e^{iuj}e^{nzj}P(i,n,0)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P(i),$$

так как в начальный момент требований на выплату страховых сумм не было, и следовательно

$$P(i,n,0)=\begin{cases}P(i), & n=0;\\ 0, & n>0.\end{cases}$$

Обозначим $G(u)=H(u,z,0)$. Тогда, дифференциальное уравнение относительно функции $G(u)$, с учетом условия $G(0)=1$, будет иметь решение

$$G(u)=\left(\frac{1+\frac{\lambda}{\mu}}{1+e^{ju}\frac{\lambda}{\mu}}\right)^{-N}. \tag{10}$$

Теперь, учитывая (10), выражение (9) можем записать в виде:

$$\left(\frac{1+\frac{\lambda}{\mu}}{1+(v+1)\frac{\lambda}{\mu}}\right)^{-N}=\varphi\left[\left(\frac{v-v_2(z)}{v-v_1(z)}\right)\right]\left[\frac{(v-v_2(z))^{v_2(z)}}{(v-v_1(z))^{v_1(z)}}\right]^{-\frac{N}{(v_1(z)-v_2(z))}}.$$

Введем обозначения: $x=\dfrac{v-v_1(z)}{v-v_2(z)}$, тогда

$$\varphi(x)=\left[\frac{\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)(v_2(z)-v_1(z))}{(1-x)+\frac{\lambda}{\mu}\left[v_2(z)+1-x(1+v_1(z))\right]}\right]^{-N}x^{-\frac{Nv_2(z)}{(v_2(z)-v_1(z))}},$$

где учтено, что $v=\dfrac{v_2(z)-xv_1(z)}{1-x}$.

Таким образом, переходя от переменной v к переменной u, можем записать выражение для характеристической функции $H(u,z,t)$ в виде:

$$H(u,z,t) = e^{N\lambda v_2(z)t}\left[\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)(v_1(z)-v_2(z))\right]^{-N} \times$$
$$\times\left\{\left(v_1(z)-e^{ju}+1\right)\left[1+\frac{\lambda}{\mu}(1+v_2(z))\right]-\right. \tag{11}$$
$$\left.-\left(v_2(z)-e^{ju}+1\right)e^{-\lambda(v_2(z)-v_1(z))t}\left[1+\frac{\lambda}{\mu}(1+v_2(z))\right]\right\}^N,$$

где $v_1(z)$ и $v_2(z)$ определяются выражениями (4).

3. Характеристики числа застрахованных рисков и числа требований на выплату страховых сумм

Найдем выражения для математических ожиданий и дисперсий числа $i(t)$ рисков и числа $n(t)$ требований на страховые выплаты. Имеем:

$$\frac{1}{j}\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial u}\bigg|_{\substack{u=0\\z=0}} = M\{i(t)\} = \frac{N\lambda}{\mu+\lambda}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{j}\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial z}\bigg|_{\substack{u=0\\z=0}} = M\{n(t)\} = \frac{N\lambda}{\mu+\lambda}\gamma t. \tag{13}$$

Для дисперсий получены выражения:

$$D\{i(t)\} = \frac{N\lambda\mu}{(\mu+\lambda)^2}, \tag{14}$$

$$D\{n(t)\} = 2\frac{N\lambda\mu\gamma^2}{(\mu+\lambda)^3}t + \frac{N\lambda\gamma}{\mu+\lambda}t - 2\frac{N\lambda\mu\gamma^2}{(\mu+\lambda)^4}\left(1-e^{-(\mu+\lambda)t}\right). \tag{15}$$

Формулы (12) и (14) совпадают с результатом, полученным в работе (1), где исследуется одномерный процесс числа застрахованных в компании рисков при ограниченном страховом поле.

Найдем коэффициент корреляции процессов $i(t)$ и $n(t)$. Имея выражение для функции $H(u,z,t)$, можем найти смешанный момент первого порядка по формуле:

$$\frac{1}{j^2}\frac{\partial^2 H(u,z,t)}{\partial u\partial z}\bigg|_{\substack{u=0\\z=0}} = M\{i(t)n(t)\}. \tag{16}$$

С помощью выражений (12) – (16) запишем выражение для коэффициента корреляции процессов $i(t)$ и $n(t)$:

$$\rho_{in}(t) = \frac{\sqrt{\mu\gamma}\left(1-e^{-(\mu+\lambda)t}\right)}{\sqrt{2\mu\gamma(\mu+\lambda)t+(\mu+\lambda)^3t-2\mu\gamma\left(1-e^{-(\mu+\lambda)t}\right)}}.$$

Заключение

Автор считает, что в данной работе новыми являются следующие результаты: построена математическая модель страховой компании с ограниченным страховым полем в виде системы массового обслуживания, найдено распределение двумерного процесса числа застрахованных в компании рисков и числа требований на выплату страховых сумм, найдены выражения для характеристик исследуемых процессов, а также выражение для коэффициента корреляции. Показано, что полученные результаты являются обобщением частных случаев.

Литература

1. *Глухова Е.В., Змеев О.А., Лившиц К.И.* Математические модели страхования. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. 180 с.

2. *Ахмедова Д.Д., Терпугов А.Ф.* Математическая модель страховой компании с учетом расходов на рекламу // Известия вузов, Физика. 2001. № 1. С. 25-29.

3. *Глухова, Е В., Капустин Е.В.* Расчет вероятности разорения страховой компании с учетом перестраховки // Изв. вузов, Физика. 2000. № 4. С. 3-9.

4.*Назаров А.А., Даммер Д.Д.* Исследование числа требований на страховые выплаты в компании с произвольной величиной продолжительности договора // Вестник Томского государственного университета. 2011. № 2 (15). С. 24-32.

5. *Даммер Д.Д., Назаров А.А.* Исследование математической модели страховой компании в виде бесконечнолинейной системы массового обслуживания методом асимптотического анализа: материалы VII Ферганской конференции Предельные теоремы и их приложения г.Наманган. 2015. С. 191-196.

6. *Dammer D.D.* Research of mathematical model of insurance company in the form of queuing system with unlimited number of devices considering implicit advertising // Information Technologies and Mathematical Modeling. Springer, 2015. Vol. 564. P. 163-175.

7. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2005. 228 с.

8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва: Наука, 1969. 424 с.

Research of process of insurance payments with limited insurance coverage

Dammer Diana Damirovna, *PhD, Associate Professor*

This paper is devoted to the research of the model of insurance company with a limited insurance coverage in the form of queueing system with an unlimited number of servers. Using method of characteristic functions we got two-dimensional probability distribution of a number of risks that are insured in the company and a number of demands for insurance payment.

Keywords – mathematical model, insurance company, insurance payments, queueing system, characteristic function.

УДК 51.7+551.2+316.4

О МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ГЕОСОЦИАЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Анна Андреевна Долгая*, научный сотрудник*
Тел. 8 962 216 08 58, E-mail: adolgaya@kscnet.ru
Институт вулканологии и сейсмологии ДВО РАН
www.kscnet.ru/ivs
Кирилл Александрович Фереферов*, магистрант*
Тел. 8 914 020 36 93, E-mail: tabris23@yandex.ru
Дальневосточный федеральный университет
www.dvfu.ru