Заключение

Использование алгебраического подхода на основе алгебры кортежей при моделировании рассуждений позволяет, помимо дедуктивного анализа, применять некоторые модели правдоподобных рассуждений, не нарушая при этом законы классической логики.

В настоящее время ведутся исследования в области применения алгебры кортежей для моделирования и анализа неопределённостей в рассуждениях.

Литература

1. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. – М.: Наука, 1983. – 360 с.

2. *Плоткин Б.И.* Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных. – М.: Наука, 1991. – 448 с.

3. *Кулик Б.А.* Логика естественных рассуждений. – СПб., 2001. – 128 с.

4. *Кулик Б.А., Зуенко А.А., Фридман А.Я.* Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний. – СПб.: изд-во Политехн. ун-та, 2010.– 235 с.

5. *Генцен Г.* Исследования логических выводов//Математическая теория логического вывода: сб. переводов. – М.: Наука, 1967. С. 9-74.

6. *Рассел С., Норвиг П.* Искусственный интеллект: современный подход. –2-е изд. / пер. с англ./ ред. К. А. Птицына. –М.: изд. дом «Вильямс», 2006. – 1408 с.

7. *Смаллиан Р.* Принцесса или тигр? – М.: Мир, 1985. – 221 с.

8. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику / пер. с англ. Ф.А. Кабакова / под ред. С.И. Адяна. – М.: Наука, 1971. – 320 с.

Algebraic methods to model reasoning

Boris Alexanrovich Kulik,Dr.Sci. (Math.), leading scientific researcher,
Institute of Problems in Mechanical Engineering of RAS

Alexander Anatol'evich Zuenko,Ph.D. (Tech.), scientific researcher

Alexander YakovlevichFridman,Dr.Sci. (Tech.), leading scientific researcher,
Institute for Informatics and Mathematical Modelling of Technological Processes of RAS

Boolean algebra is a widely known algebraic method in logic. This algebra is a counterpart of the propositional calculus. To model the predicate calculus, Lindenbaum-Tarski algebra, polyadic Halmos algebra and other algebras were proposed. However, these algebras are too abstract and complicated for algorithmization. In the given paper, we describe our n-tuple algebra that can be thought of as a generalization of mathematical theory of relations.

Keywords: n-tuple algebra, logical inference, defeasible reasoning, collisions

УДК 735.29

О ВЛИЯНИИ ШКАЛЫ НА РЕЗУЛЬТАТЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА В МЕТОДОЛОГИИ АНР Т. СААТИ

Никита Сергеевич Бескорсый*, аспирант*
Тел.: 903 922 5020, e-mail: besn1989@gmail.com
Борис Васильевич Олейников*, канд. филос. н., доц.,*
доц. базовой кафедры вычислительных и информационных технологий
Тел.: (902)990-25-97, e-mail: oleynik48@mail.ru
Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирский Федеральный Университет
http://www.sfu-kras.ru

В статье рассмотреновлияния шкалы на результаты многокритериального выбора в методологии АНР (AnalyticHierarchyProcess) Томаса Саати. Рассматриваются вопросы перехода к различным шкалам при решении прямой и обратной задач Саати. Исследуются результаты таких переходов на примере решения задачи проверки классификации.

Ключевые слова: многокритериальный выбора, AHP, AnalyticHierarchyProcess, МАИ, метод анализа иерархий, шкала отношений, шкала порядка, ранжирование, Саати.

Analytic Hierarchy Process (AHP, в русскоязычной литературе названный Методом Анализа Иерархий – МАИ [1]) был предложен американским математиком Томасом Саати в начале 1970х годов для анализа политических ситуаций, в которых невозможно использовать математическое описание проблем выбора решения [1] [2].


Н.С. Бескорсый

МАИ активно используется на практике. Является основным методом решения многих задач многокритериального выбора, основывающимся на попарном сравнении. Около ста китайских университетов предлагают курсы по основам МАИ, и многие соискатели научных степеней выбирают МАИ в качестве объекта научных и диссертационных исследований. Опубликовано более 900 научных статей по данной тематике [3]. Периодически проводится Международный симпозиум, посвященный МАИ (International Symposium on Analytic Hierarchy Process, ISAHP), на котором встречаются как учёные, так и практики, работающие с МАИ. Последний симпозиум проходил в 2013 году в Куала-Лумпур, Малазия. Следующий запланирован на июнь 2014 года в Вашингтон, США [3].


Б.В. Олейников

Существует ряд пакетов программного обеспечения реализующего AHP. Среди них можно выделить наиболее популярные – Super Decisions, Expert Choice, MPRIORITY, Император [4].

С другой стороны метод подвергается критике, в частности в статьях [5] и [6] под сомнения ставится корректность AHP и обозначается актуальность исследования и модернизации метода. Статья [5] указывает на проблему метода, заключающуюся в том, что удалив из задачи хотя бы один объект сравнения, мы можем изменить итоговый порядок ранжирования объектов. В статье [6] приводится контрпример и показывается, что в методе для оценивания степени предпочтений альтернатив ошибочно используются шкалы отношений, не связанные друг с другом и приоритетами критериев.

В предыдущих работах авторов [4, 7-8] кроме метода AHP, описанного Саати для решения прямой (классической) задачи (нахождение весов объектов исходя из весов критериев и данных о попарном сравнении объектов по каждому критерию), рассматривался и метод решения, так называемой, обратной задачи Саати – задачи нахождения весов критериев исходя из весов объектов и данных о их попарном сравнении относительно каждого критерия. Данная работа ставит целью исследование влияния шкал на результаты решения прямой (классический метод AHP) и обратной задач Саати.

Решение задачи многокритериального выбора в рамках методологии AHP Саати основывается на построении иерархии взаимодействия объект-критерий. Отправными данными для решения задачи AHP являются множество объектов $\Upsilon = \{\upsilon_1, \upsilon_2, \dots, \upsilon_n\}$, множество критериев (признаков) $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$, представленных в некоторой таблице «объект-критерий», а также множества предпочтений («весов») критериев и множества оценок объектов относительно каждого критерия $\omega_i = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{in}\}$, где $i = 1 \dots m$ [1-2]. Эти множества могут быть получены либо путем прямых вычислений (в случае наличия данных измеренных по шкале равных отношений), либо путем экспертных оценок (в случае измеренных данных по порядковой шкале), с наложением определённых требований на оценки.

В работах [4, 7-8], исследовались прямая и обратная задача многокритериального выбора в рамках методологии AHP (прямая и обратная задача Саати). В частности, был предложен метод решения обратной задачи Саати с помощью решения матричного уравнения:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U},$$

где $\mathbf{V}$ – вектор весов критериев, $\mathbf{A}$ – матрица из доминирующих собственных векторов матриц попарного сравнения объектов, $\mathbf{U}$ – вектор весов объектов [1, 2, 4, 7].

В рамках апробации разработанного метода было решено несколько задач, из которых наибольший интерес вызывает задача об определении доминирующих показателей, влияющих на детское ожирение с последующим ранжированием детей на основе полученных весов критериев [4, 7]. Решение этой задачи выявило ряд неоднозначных мест алгоритма. Наиболее важные из них – появление отрицательных весов критериев при решении обратной задачи Саати и использование исходных показателей объектов по критериям, лежащих на безразмерной порядковой шкале. В данной работе основное внимание уделяется второй проблеме.

Рассматриваемая задача состояла в выявлении влияния ряда медицинских показателей (72 критерия) на степень детского ожирения на примере 265 обследованных детей, разделённых на 4 группы (группа N – дети с нормальными показателями, группа I – дети с 1 степенью ожирения, группа II – дети с 2 степенью ожирения, группа III – группа с 3 степенью). Исходные данные были предоставлены Красноярским государственным медицинским университетом имени профессора В. Ф. Войно-Ясенецкого (автор исследования Т.А.Костарева). Сопутствующее исследование состояло в проверке корректности распределения детей по группам с помощью АНР [4, 7].

Для решения задачи были предприняты следующие шаги:

1. Подготовлена усреднённая таблица для групп детей разной степени ожирения (с отличающимися весами групп). Для этого была составлена таблица $\mathbf{R}$ объект-критерий, где в качестве объектов выступали группы детей (4 объекта). В качестве усредненных числовых показателей φ_{ik} по каждому из 72 критериев β_i для каждой из 4-х групп было использовано среднее арифметическое значениеω_{ij} по всем входящим в -ую группу детям.

$$\varphi_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^{265}\omega_{ij}}{265}, \text{ где } k \text{ – номер группы.}$$

2. Решая обратную задачу, по таблице $\mathbf{R}$ и известным весам объектов (индекс ожирения группы) был найден вектор весов критериев $\mathbf{V}$. В качестве проверки полученного результата была решена прямая задача Саати для этих же критериев и объектов. Веса объектов совпали с исходными данными.

3. Проверена правильность исходного отнесения детей к группам ожирения. Для этого все четыре исходные таблицы соответствующие группам детей, страдающими ожирением разной тяжести, были объединены в одну. На основе полученной таблице размера 265 на 72 и вектора $\mathbf{V}$ была решена прямая задача Саати по нахождению весов объектов соответствующих каждому ребенку.

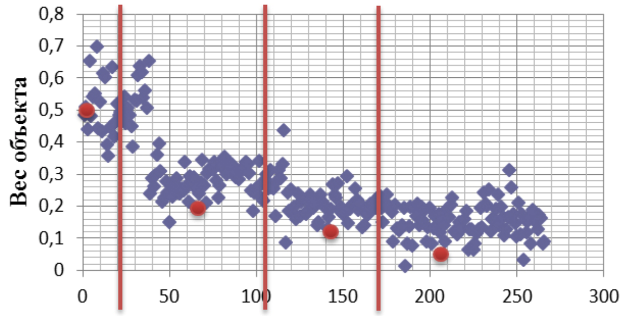
4. Проведено сравнение полученной классификации детей с исходными данными.

Основная проблема была связана с тем, что показатели объектов по разным критериям принадлежали различным диапазонам значений. Отсюда их прямое использование в задаче не является корректным. Так по ряду критериев диапазоны их значений были не очень велики (от 1 до 2), в то время как по другим критериям разброс их значений был достаточно велик (от 500 до 1500). При этом для первых разница в значении критерия на 0,1 могла быть важнее, чем разница на 100 для вторых. Такие различия могут повлечь значительные искажения при использовании АНР (в частности, это повлияет на построение матриц попарного сравнения и последующего построения матрицы $\mathbf{A}$ [1-2]).

В качестве критерия качества решения задачи примем адекватность размещения объектов по группам при повторном ранжировании, а так же дисперсию весов D внутри каждой из групп. Адекватность размещения характеризуется соответствием расстояний между центроидами группС и невозможностью перенести объект в другую группу или выделить новую группу объектов (исходя из поученных весов).

При решении задачи с использованием исходных значений критериев по объектам, в условиях их измерения по шкале отношений, было получено ранжирование объектов [4], представленное в виде некоторой диаграммы, отражающей распределение совокупности точек на плоскости, см. рис. 1.

На этом рисунке (и на последующих) по вертикали отображается вес объекта u_j, а по горизонтали его порядковый номер j согласно исходным данным.



Номер объекта

Рис. 1

Жирными вертикальными линиями обозначены границы групп, на которые изначально были разбиты объекты (дети в соответствии со степенью ожирения).

Красными точками обозначены центроиды групп.

Из рисунка видно, что вес объектов в одной группе колеблется в достаточно больших пределах и для некоторых объектов их вес более характерен для другой группы. Если объекты группы N чётко выделяются на диаграмме, то границы между группами I и II видны уже хуже. Выделить группу III ещё сложнее.

В табл. 1 указаны значения центроидов и дисперсий для каждой группы.

Из таблицы видно, что значение центроидов находится на разных расстояниях между собой, что, наряду с высокой дисперсией у группы N и группы III, обуславливает частую возможность переноса объекта в другую группу – 21 % объектов могут быть перенесены в другую группу. Так же странной кажется высокая дисперсия в группе N – группе объектами, показатели которых близкими к медицинским нормам.

Таблица 1

Группа	Центроид	Дисперсия
Группа N	0.5225	0.0054
Группа I	0.2841	0.0027
Группа II	0.202	0.0018
Группа III	0.1477	0.0037

Альтернативой использованию значений, полученных при измерении шкале отношений, является перевод их в ограниченную порядковую шкалу Ord_l, где индекс iопределяет количество допустимых значений шкалы порядка. Такое преобразование позволит избежать ошибок, вызванных разницей в плотности значений по разным критерием.

Для начала будем использовать порядковую шкалу со значениями от 1 до 9 (далее Ord_9). Этой шкалой чаще всего предлагает пользоваться Т. Саати в своих работах [1,2], а так же ею пользуются его ближайшие коллеги [9]. Шкалы, начинающиеся с 0, использовать нельзя, так как это делает невозможным последующее попарное сравнение.

Метод приведения значений к шкале Ord_9 состоит в следующем. По каждому критериюβ_iисходя из исходных данных группы N строится область R_i – область, в которую попадают все значения группы N по критерию β_i. Предпочтительным является выбор области R_i экспертами, как области предпочтительных значений по критерию β_i.

Значение s_{ij} в шале Ord_9 ищется следующим образом:

$$s_{ij} = l - \left\lfloor l \frac{|\omega_{ij} - r_i|}{|max_i - r_i|} \right\rfloor, \text{ если } max_i = \omega_{ij}, \text{ то } s_{ij} = l,$$

где l – максимальное значение в выбранной шкале (в нашем случае 9), ω_{ij} – исходное значение показателя объекта v_j по критерию β_i, r_i – центр области R_i, max_i – максимально удаленное отr_i значение из $\omega_i = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{in}\}$, операция $\lfloor \quad \rfloor$ – округление с низу.

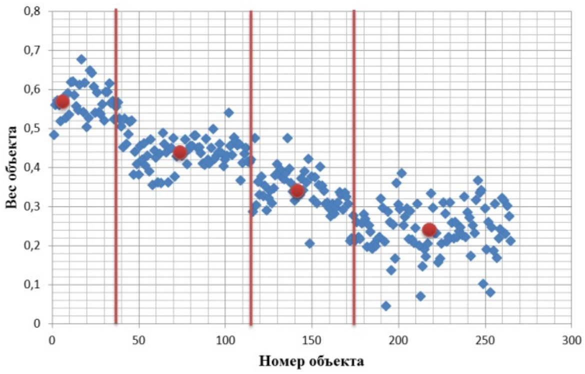


Рис. 2

Ранжирование весов, полученное при решении задачи с помощью данного метода перехода к ограниченной шкале порядка, представлено на рис. 2.

Значения дисперсий и центроидов для различных групп полученных при использовании шкалы Ord_9 представлены в табл. 2.

Из полученных данных видно, что использование значений приведенных к ограниченной шкале дает более предпочтительный результат классификации. Во-первых, снизились дисперсии для всех групп кроме группы II – для нее дисперсия увеличилась, но не значительно.

Центроиды групп I, II и III теперь расположены на приблизительно равном расстоянии (приблизительно около 0.1), а центроид группы N удалён на большее расстояние, что вместе со снижением дисперсий улучшило чёткость размещения объектов по группам. При использовании шкалы от 1 до 9 только 12 % объектов имеют тенденцию к перенесению в другую группу. Улучшить данный подход возможно было бы путем использования заданных экспертами нормальных областей R_i.

Таблица 2

Группа	**Центроид**	**Дисперсия**
Группа N	0.57	0.0017
Группа I	0.4402	0.0015
Группа II	0.3433	0.0022
Группа III	0.2408	0.0039

Однако для данной задачи мы ими не располагаем.

Можно высказать предположение, что повлиять на адекватность размещения объектов по группам возможно и изменением порядковой шкалы (в частности, изменением числа ее значений). Для проверки этого предположения построим диаграммы распределения весов, используя шкалу Ord_{18} (шаг шкалы станет в два раза меньше) и Ord_5 (шаг шкалы станет больше почти в два раза). Распределение весов для Ord_{18} представлено на рис. 3, для Ord_5на рис. 4.

Распределение на рис. 3 слабо отличается от распределения на рис. 2. В табл. 3 указаны значения дисперсий и центроидов для Ord_{18}.

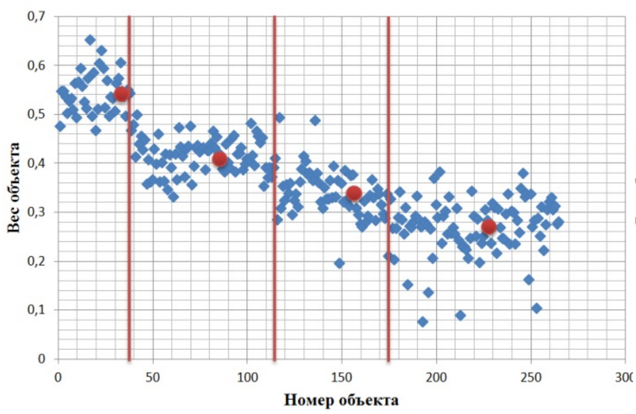


Рис. 3

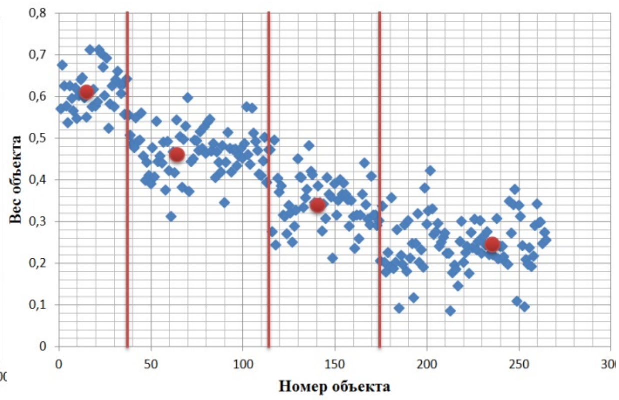


Рис. 4

Значения дисперсий для первых двух групп отличается не более чем на 0.0002. Дисперсия группы III уменьшилась на 0.0007, однако центроиды стали располагаться ближе друг к другу, что стало причиной увеличения процента объектов возможных для переноса до 14 %.Из этого можно сделать вывод, что увеличивать шкалу не имеет смысла.

Таблица 3

Группа	Центроид	Дисперсия
Группа N	0.5431	0.0017
Группа I	0.4144	0.0013
Группа II	0.3412	0.0023
Группа III	0.2709	0.0032

Таблица 4

Группа	Центроид	Дисперсия
Группа N	0.6112	0.0023
Группа I	0.4663	0.0028
Группа II	0.3455	0.0035
Группа III	0.2460	0.004

Диаграмма на рис. 4уже значительнее отличается от диаграммы на рис. 2. В табл. 4 указаны значения дисперсий и центроидов для Ord_5.

Значительное увеличение дисперсии по всем группам значительно адекватность размещения объектов по группам. При этом для Ord_5 19,5 % объектов могут быть перенесены в другие группы.

Для выяснения вопроса о связи отрицательных весов критериев, которые появляются при обращении (или псевдообращении Мура-Пенроуза) [10], переходной матрицы (квадратной или прямоугольной) и размерностью порядковой шкалы был рассмотрен переход к значению sv_i на ограниченной порядковой шкале для критерия β_i по следующему алгоритму:

$$sv_i = l - l\left\lfloor\frac{v_i - min_i}{max_i - min_i}\right\rfloor, \text{ если } max_i = v_i, \text{ то } sv_i = l,$$

где l – максимальное значение в выбранной шкале (в нашем случае 9), v_i – вес критерия β_i, min_i и max_i – минимальный и максимальный вес критерия из множества $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$, операция $\lfloor \quad \rfloor$ – округление с низу.

Для проверки использовалась шкала Ord_9. Полученное ранжирование, показанное на рис. 5, показывает несостоятельность такого предположения.

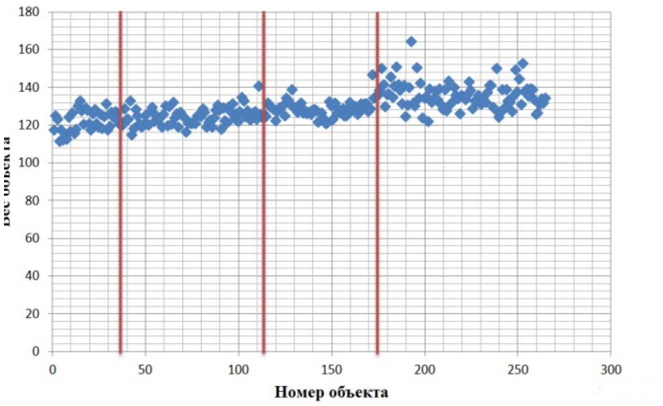


Рис. 5

На диаграмме отсутствует какое-либо распределение по группам и по сравнению с предыдущими результатами полностью изменено ранжирование объектов. При использовании других шкал (Ord_{18} и Ord_5) результат получился похожий. Таким образом, нельзя интерпретировать отрицательные веса критериев, полученные при решении обратной задачи Саати, с помощью перевода их в какую-либо ограниченную порядковую шкалу.

В результате проведённого исследования можно заключить, что при решении как прямой, так и обратной задачи Саати с помощью AHP следует переводить исходные значения показателей объектов по критериям, измеренные по шкале отношений, в значения представленные некоторой ограниченной шкалой порядка. Большое увеличение шкалы не способно сильно улучшить результат, в то время как большое уменьшение способно его ухудшить. Перевод отрицательных весов критериев в шкалированые значения не является корректным в случае их дальнейшего использования для решения других задач. Появление и интерпретация отрицательных весов критериев при решении обратной задачи Саати связано с вычислением обратной (псевдообратной) матрицы собственных значений и требует дальнейшего исследования.

Кроме этого, как показали численные эксперименты, изменение размерности шкалы способно увеличить дисперсию или сместить центроиды групп, а также, хотя и незначительно, изменить порядок объектов отсортированных по весу. Все эти замечания, вместе с недостатками, отмеченными в работах [5] и [6], дают основание для внимательного и критического отношения к методу AHP при решении практических задач, дальнейшего изучению этого метода и его модернизации.

Литература

1. *Саати Т.* Принятие ращений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.

2. *Саати Т.* Взаимодействия в иерархических системах // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 1. С. 68–84.

3. ISAHP. – Pittsburgh, Pennsylvania, USA: Crative Decisions Foundation, 2013. URL: http: //www.isahp.org (дата обращения 15.12.2013).

4. *Бескорсый Н.С., Олейников Б.В.* Решение обратной задачи многокритериального выбора в методологии метода анализа иерархий // ФАМЭБ’2013: труды XII междунар. конф. – Красноярск: СФУ НИИППБ, 2013. С. 80-82.

5. *Михалевич М.В.* Замечания в дискуссии Дж. Дайера и Т. Саати // Кибернетика и системный анализ. 1994. № 1. С. 97-102.

6. *Подвинский В.В., Подвинская О.В.* О некорректности метода анализа иерархий // Проблемы управления. 2011. № 1. С. 8-13.

7. *Олейников Б.В., Бескорсый Н.С.* Решение прямой и обратной задачи многокритериального выбора в методологии метода анализа иерархий // Новые информационные технологии и менеджмент качества: доклады X междунар. науч. конф. – Белек, 2013. URL: http://conference.informika.ru/ (дата обращения 15.12.2013).

8. *Бескорсый Н.С.* Применение метода анализа иерархий // Молодёжь и наука: сборник материалов IX Всероссийской научно-технической конф. студентов, аспирантов и молодых учёных с международным участием, посвящённой 385-летию со дня основания г. Красноярска. – Красноярск, 2013. URL: http://conf.sfu-kras.ru/sites/mn2013/thesis/s063/s063-001.pdf (дата обращения 15.12.2013).

9. *Saaty R.W.* Decision making in complex environments. The Analytic Hierarchy Process (AHP) for Decision Making and The Analytic Network Process (ANP) for Decision Making with Dependence and Feedback. – Pittsburgh, PA, USA: Creative Decisions Foundation, 2003. – 114 с.

10. *Стренг Г.* Линейная алгебра и её применения. – М.: Мир, 1980. – 456 с.

About influence of scale on result of complex decisions in methodology AHP by T. Saaty

Boris Vasilevich Oleynikov,PhD of Philosophy, Docent,Docent ofBase Department of Computing and Information Technology,Siberian Federal University

Nikita Sergeevich Beskorsyi, Postgraduate, Siberian Federal University

Thi sarticle demonstrates theinfluence of scale on results of complex decisions in methodology Analytic Hierarchy Process (AHP) by Tomas L. Saaty. Investigate questions of transitions to different scales for solving direct and inverse Saaty problems. The results of transitions are demonstrated for solving problem of verify classification.

Keywords: complex decisions, AHP, Analytic Hierarchy Process, scale, ordinal scale, ranking, Saaty