УДК 519.816

ПОСТРОЕНИЕ ОБЪЯСНЯЮЩИХ ЦЕПОЧЕК НАИМЕНЬШЕЙ ДЛИНЫ ПРИ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПО ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЯХ С ПОРЯДКОВОЙ ШКАЛОЙ

Андрей Павлович Нелюбин*, аспирант ИМАШ РАН*
Тел.: 8(905)554-12-55, *e-mail:nelubin@gmail.com*
Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН
http://www.imash.ru

В статье представлен новый алгоритм сравнения вариантов решений многокритериальной задачи методами теории важности критериев для случая, когда все критерии упорядочены по важности и имеют общую порядковую шкалу. В отличие от известных алгоритмов, представленный алгоритм строит объясняющие цепочки наименьшей длины. Экспериментально получены точные значения максимальных длин цепочек при небольшом числе критериев и градаций шкалы.

Ключевые слова: многокритериальные задачи принятия решений, теория важности критериев, порядковая шкала, объясняющие цепочки.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-31160).

А.П. Нелюбин

Математическая теория важности критериев была создана и продолжает развиваться в России (см. историю и библиографию в [1, 2]). Она опирается на строгие определения понятий «один критерий важнее другого» и «критерии равноважны». Такая качественная (нечисловая) информация о важности критериев позволяет корректно сравнивать варианты решений многокритериальной задачи по предпочтительности. Процедура сравнения вариантов разбивается на последовательность элементарных операций, выполняемых в соответствии с базовыми определениями теории. Предъявление этой последовательности может служить в качестве обоснования (подтверждения) результата сравнения рассматриваемых вариантов, т.е. объяснения, почему один вариант лучше другого или почему они одинаковы по предпочтительности. Поэтому такие последовательности получили название «объясняющие цепочки».

Сложность построения объясняющих цепочек заключается в том, что для одних и тех же сравниваемых вариантов может существовать множество различных цепочек. Среди них наибольший практический интерес представляют цепочки наименьшей длины (содержащие наименьшее число операций). Первый алгоритм построения объясняющих цепочек был описан в [3]. В работе [4] был предложен более эффективный алгоритм построения объясняющих цепочек, а также получена оценка сверху длины цепочки в зависимости от числа критериев.

В настоящей статье представлена модификация алгоритма из [4], строящая объясняющие цепочки наименьшей возможной длины. С помощью нового алгоритма экспериментально получены точные значения максимальных длин цепочек в зависимости от числа критериев (до 10) и числа градаций шкалы критериев (до 9).

1. Математическая модель и сведения из теории важности критериев

Дальнейшее изложение опирается на следующую математическую модель ситуации принятия индивидуального решения в условиях определенности:

$\mathbb{M} = <\tau, X, K, Z, \Re>$,

где τ – тип постановки задачи (выбрать один или несколько лучших вариантов, упорядочить все варианты по предпочтительности, и т.д.); X – множество вариантов (альтернатив); $K = (K_1, \ldots, K_m)$ – векторный критерий, состоящий из $m \geq 2$ частных критериев K_i; Z – область значений векторного критерия; $\Re$ – модель предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР).

Под *критерием* K_i понимается функция с областью определения X и областью значений (множеством оценок) Z_i. Далее полагается, что все критерии однородны или приведены к таковым. Это означает, что критерии имеют общую шкалу и, в частности, у них общая область значений $Z_0 = \{1, \ldots, k, \ldots, q\}$, где $q \geq 2$. *Шкала критериев* Z_0 полагается всего лишь порядковой, т.е. номера k градаций шкалы отражают только упорядоченность их по предпочтению: чем номер градации больше, тем она предпочтительнее.

Таким образом, каждый вариант x из X характеризуется m числами – значениями $K_i(x)$ всех критериев, образующими *векторную оценку* этого варианта $y = K(x) = (K_1(x), \ldots, K_m(x))$. Поэтому сравнение вариантов по предпочтительности сводится к сопоставлению их векторных оценок. Векторные оценки из множества $Z = Z_0^m$ могут соответствовать вариантам из X или быть гипотетическими.

Предпочтения ЛПР моделируются на Z при помощи отношения нестрогого предпочтения R: запись yRz означает, что векторная оценка y не менее предпочтительна, чем z. Отношение R является (частичным) квазипорядком (т.е. оно рефлексивно и транзитивно) и порождает на Z отношения безразличия I и (строгого) предпочтения P:

$yIz \Leftrightarrow yRz \wedge zRy; \quad yPz \Leftrightarrow yRz \wedge \neg zRy.$

Так как предпочтения ЛПР возрастают вдоль шкалы критериев Z_0, то на множестве векторных оценок Z определено отношение Парето R^0:

$yR^0z \Leftrightarrow y_i \geq z_i, \ i = 1, \ldots, m.$

Получить решение многокритериальной задачи в требуемой постановке τ только при помощи отношения Парето, как правило, не удается, и поэтому его требуется расширить, привлекая дополнительную информацию о предпочтениях ЛПР. Далее в роли такой информации выступают сведения об относительной важности критериев.

Приведем необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории качественной важности критериев [3]. Обозначим через y^{ij} векторную оценку, полученную из векторной оценки $y = (y_1, \ldots, y_m)$ перестановкой ее компонент y_i и y_j.

Определение 1. Критерии K_i и K_j *равноважны*, или одинаково важны (такое сообщение обозначается $i \sim j$), когда векторные оценки y и y^{ij} одинаковы по предпочтительности.

Определение 2. Критерий K_i *важнее* критерия K_j (такое сообщение обозначается $i \succ j$), когда векторная оценка y, в которой $y_i > y_j$, предпочтительнее, чем y^{ij}.

Пусть Ω – качественная информация о важности критериев, т.е. совокупность сообщений вида $i \sim j$ и $i \succ j$. Согласно определениям 1 и 2, сообщение $i \sim j$ задает на множестве Z отношение безразличия $I^{i\sim j}$, а сообщение $i \succ j$ – отношение предпочтения $P^{i\succ j}$, определяемые следующим образом:

$yI^{i\sim j}z \Leftrightarrow \ (z = y^{ij}, y_i \neq y_j), \quad yP^{i\succ j}z \Leftrightarrow \ (z = y^{ij}, y_i > y_j).$

Отношение R^{Ω}, порождаемое на Z качественной информацией о важности критериев Ω, определяется как наименьшее транзитивное отношение, содержащее отношение Парето R^0 и отношения R^{ω} для всех сообщений $\omega \in \Omega$:

$$R^{\Omega} = TrCl[(\bigcup_{\omega\in\Omega} R^{\omega}) \bigcup R^0],$$

где TrCl – символ операции транзитивного замыкания бинарного отношения, $R^{\omega} = I^{i\sim j}$, если $\omega = i \sim j$, и $R^{\omega} = P^{i\succ j}$, если $\omega = i \succ j$. Согласно этому определению, $yR^{\Omega}z$ верно тогда и только тогда, когда существует цепочка вида:

$$yR^{\omega^1}u^1, \ u^1R^{\omega^2}u^2, \ldots, u^LR^{\omega^{L+1}}z, \tag{1}$$

в которой u^l – векторные оценки из Z, а в качестве R^{ω^l} выступают R^0, $I^{i\sim j}$ или $P^{i\succ j}$. Причем если хотя бы одно отношение R^{ω^l} является отношением строгого предпочтения P^0 или $P^{i\succ j}$, то выполняется $yP^{\Omega}z$. В противном случае выполняется $yI^{\Omega}z$. Такую цепочку называют *объясняющей*, поскольку она показывает, на основе каких сообщений о предпочтениях ЛПР сделан вывод о том, что yRz. Число L называется *длиной* объясняющей цепочки.

Перестановка компонент u_i^l и u_j^l векторной оценки u^l считается *допустимой*, если получающаяся векторная оценка $u^{l+1} = (u^l)^{ij}$ не лучше u^l в соответствии с определениями 1 и 2, т.е. если $u_i^l > u_j^l$ при $i\succ j$, или $u_i^l \neq u_j^l$ при $i\sim j$. Доказано [3], что если $yR^{\Omega}z$, то объясняющая цепочка (1) наименьшей длины может быть получена путем последовательного осуществления допустимых перестановок компонент векторной оценки $y = u^0$, так что для последней векторной оценки u^L выполняется $u^L R^0 z$. Поэтому далее ограничимся рассмотрением цепочек (1), в которых в качестве R^{ω^l}, $l = 1, \ldots, L$ выступают $I^{i\sim j}$ или $P^{i\succ j}$, а $R^{\omega^{L+1}} = R^0$.

2. Построение объясняющих цепочек

Сначала приведем алгоритм построения объясняющей цепочки, описанный в работе [4]. Затем покажем, что в ряде случаев этот алгоритм неэффективен с точки зрения длины получающейся цепочки, и модифицируем его так, чтобы обеспечить минимум этой длины.

Будем считать, что информация Ω непротиворечива и полна, т.е. она позволяет упорядочить (ранжировать) по важности все критерии. Для удобства пронумеруем критерии в порядке невозрастания их относительной важности. При этом номера равноважных критериев соберем в группы:

$M_1 = \{1, \ldots, i_1\}$, $M_2 = \{i_1 + 1, \ldots, i_2\}$, …, $M_\rho = \{i_{\rho-1} + 1, \ldots, i_\rho\}$.

Таким образом, в группе M_1 находятся номера наиболее важных критериев, а критерии с номерами из группы M_ρ наименее важны (очевидно, что $i_\rho = m$).

Обозначим через $y_{<i]}$ векторную оценку в пространстве Z_0^i, состоящую из первых i компонент векторной оценки y. В алгоритме [4] сначала достигается выполнение отношения $u^{l_1}_{<i_1]} R^0 z_{<i_1]}$ путем перестановок компонент с номерами из M_1, затем $u^{l_2}_{<i_2]} R^0 z_{<i_2]}$ путем перестановок компонент с номерами из M_1 и M_2, и т.д.

Алгоритм [4]:

Шаг 1. Положить $u^0 = y$, $l = 0$, $j = 1$.

Шаг 2. Если $z_j \le u_j^l$, то выполнить шаг 3, иначе – выполнить шаг 4.

Шаг 3. Если $j = m$, то выполнить шаг 9, иначе – положить $j = j + 1$ и выполнить шаг 2.

Шаг 4. Найти β такое, что $j \in M_\beta$.

Шаг 5. Если существует индекс $r \in \{1, 2, \ldots, i_\beta\}$ такой, что $z_r \le u_j^l < u_r^l$, то выполнить шаг 6, иначе – выполнить шаг 10.

Шаг 6. Среди всех $r \in \{1, 2, \ldots, i_\beta\}$ таких, что $z_r \le u_j^l < u_r^l$, найти p, при котором достигается максимум $u_p^l = \max_r u_r^l$.

Шаг 7. Осуществить в u^l перестановку компонент с номерами j и p, полученную векторную оценку обозначить u^{l+1}, положить $l = l + 1$.

Шаг 8. Выполнить шаг 2.

Шаг 9. Конец. Соотношение $yR^{\Omega}z$ – верно. Объясняющая цепочка длины l состоит из векторных оценок $y, u^1, \ldots, u^l, z$.

Шаг 10. Конец. Соотношение $yR^{\Omega}z$ – не верно. Объясняющей цепочки нет.

В [4] доказано, что если выполняется $yR^{\Omega}z$, то работа алгоритма заканчивается на шаге 9, иначе – на шаге 10. Однако при доказательстве нигде не используется тот факт, что на шаге 6 среди всех индексов r выбирается именно указанный индекс p. Поэтому можно сформулировать более сильное утверждение.

Теорема 1.*Пусть на шаге 6 алгоритма [4] в качестве индекса перестановки p выбирается любой из индексов r. Тогда, если выполняется* $yR^{\Omega}z$, *то работа такого алгоритма заканчивается на шаге 9, иначе – на шаге 10.*

Доказательства теорем вынесены в приложение.

В [4] получена оценка сверху длины объясняющей цепочки, построенной с помощью алгоритма [4], в зависимости от числа критериев m:

$$L(m) = L\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor\right) + L\left(\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor\right) + m - 1, \quad m = 3, 4, \ldots \quad L(1) = 0, \quad L(2) = 1. \qquad (2)$$

Здесь квадратными скобками обозначена операция взятия целой части вещественного числа.

На каждой итерации алгоритма, т.е. при осуществлении перестановки j-ой и p-ой компонент векторной оценки u^l, либо достигается выполнение условия $z_j \le u_j^{l+1}$, либо разность $z_j - u_j^{l+1}$ уменьшается по сравнению с $z_j - u_j^l$. Выбор индекса p такого, что $u_p^l = \max_r u_r^l$, обеспечивает максимальное уменьшение разности $z_j - u_j^l$ на текущей итерации алгоритма. Однако такой «жадный» подход не является оптимальным с точки зрения длины всей объясняющей цепочки.

В качестве примера сравним векторные оценки $y = (3, 6, 2, 5, 4, 1)$ и $z = (2, 1, 3, 4, 5, 6)$ по шести упорядоченным по важности критериям: $\Omega = \{1\succ2\succ3\succ4\succ5\succ6\}$. Алгоритм [4] строит объясняющую $yR^{\Omega}z$ цепочку длины 7:

$(3, \underline{6, 2}, 5, 4, 1)\ P^{2\succ3}\ (3, 2, \underline{6}, 5, \underline{4}, 1)\ P^{3\succ5}\ (3, \underline{2}, 4, 5, 6, \underline{1})\ P^{2\succ6}\ (\underline{3}, 1, 4, 5, 6, \underline{2})\ P^{1\succ6}$ $(2, 1, \underline{4}, 5, 6, \underline{3})\ P^{3\succ6}\ (2, 1, 3, \underline{5}, 6, \underline{4})\ P^{4\succ6}\ (2, 1, 3, 4, \underline{6, 5})\ P^{5\succ6}\ (2, 1, 3, 4, 5, 6)$.

Однако существует объясняющая цепочка длины 3:

$(\underline{3}, 6, \underline{2}, 5, 4, 1)\ P^{1\succ3}\ (2, 6, 3, \underline{5, 4}, 1)\ P^{4\succ5}\ (2, \underline{6}, 3, 4, 5, \underline{1})\ P^{2\succ6}\ (2, 1, 3, 4, 5, 6)$.

Например, на первой итерации алгоритма индексы $j = 3$, $r = \{1, 2\}$, $p = 2$, так как $y_2 > y_1$. Но при построении оптимальной цепочки компонента y_3 переставляется не с y_2, а с y_1.

Идея модификации алгоритма состоит в том, чтобы использовать для перестановки каждый из индексов r, а затем выбирать среди множества получающихся цепочек ту, которая имеет наименьшую длину. В результате работы такого алгоритма будет получаться дерево, каждая ветвь которого будет представлять собой одну из объясняющих цепочек. При этом строить все дерево необязательно, достаточно осуществить проход дерева в ширину до тех пор, пока не будет найдена кратчайшая цепочка.

Для организации прохода дерева в ширину будем использовать структуру очереди. Сначала очередь содержит только векторную оценку y. В каждой следующей по очереди векторной оценке u будем осуществлять допустимые перестановки компонент для каждого индекса r, а полученные векторные оценки будем помещать в конец очереди. Для каждой векторной оценки u будем хранить ее порядковый номер *u.count* и указатель *u.previous* на предыдущую векторную оценку в своей объясняющей цепочке.

Новый алгоритм:

Шаг 1. Поместить в начало очереди y, положить $y.count = 0$.

Шаг 2. Пусть u – векторная оценка, находящаяся в начале очереди. Положить $j = 1$.

Шаг 3. Если $z_j \le u_j$, то выполнить шаг 4, иначе – выполнить шаг 5.

Шаг 4. Если $j = m$, то выполнить шаг 9, иначе – положить $j = j + 1$ и выполнить шаг 3.

Шаг 5. Найти β такое, что $j \in M_\beta$.

Шаг 6. Для каждого индекса $r \in \{1, 2, \ldots, i_\beta\}$ такого, что $z_r \le u_j < u_r$, выполнить шаг 7. Если таких индексов нет, то выполнить шаг 10.

Шаг 7. Из векторной оценки u построить новую векторную оценку v, переставив местами компоненты с номерами j и r. Положить *v.previous* = u, *v.count* = *u.count* + 1. Поместить v в конец очереди.

Шаг 8. Удалить u из очереди. Выполнить шаг 2.

Шаг 9. Конец. Соотношение $yR^{\Omega}z$ верно. Объясняющая цепочка длины *u.count* восстанавливается, следуя по указателям *u.previous* до начальной векторной оценки y.

Шаг 10. Конец. Соотношение $yR^{\Omega}z$ неверно. Объясняющей цепочки нет.

Теорема 2. *Если выполняется* $yR^{\Omega}z$, *то работа нового алгоритма заканчивается на шаге 9, причем построенная цепочка имеет наименьшую возможную длину. Если же* $yR^{\Omega}z$ *не выполняется, то работа нового алгоритма заканчивается на шаге 10.*

3. Вычислительный эксперимент

С помощью предложенного алгоритма экспериментально найдены точные оценки сверху длины $L(m, q)$ объясняющей цепочки в зависимости от числа критериев ($2 \le m \le 10$) и числа градаций ($2 \le q \le 9$) шкалы критериев Z_0. Для этого перебирались все возможные пары векторных оценок при заданных небольших значениях m и q.

Считаем, что критерии строго упорядочены по важности, т.е. выполняется $i \succ i+1$, $i = 1, \ldots, m-1$. Наличие равноважных критериев может только сократить длину объясняющей цепочки, так как появляются дополнительные возможности для перестановки компонент векторных оценок.

Для пар векторных оценок y и z сначала проверялось условие $yR^{\Omega}z$ с помощью более простого аналитического алгоритма из [5] (он не строит объясняющих цепочек). Перебор пар векторных оценок по возможности сокращался за счет ряда соображений. Например, не рассматривались векторные оценки y и z, в которых присутствовали равные компоненты или выполнялось $y_m > z_m$. Для $m = 10$ перебор уже представлял значительные вычислительные трудности, поэтому точные оценки были получены только для $q \le 5$. Полученные результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1

Точные оценки максимальной длины объясняющей цепочки

		Количество градаций шкалы							
		2	3	4	5	6	7	8	9
Количество критериев	2	1	1	1	1	1	1	1	1
	3	1	2	2	2	2	2	2	2
	4	2	3	4	4	4	4	4	4
	5	2	3	4	5	5	5	5	5
	6	3	4	5	6	7	7	7	7
	7	3	5	6	7	8	9	9	9
	8	4	6	8	9	10	11	12	12
	9	4	6	8	9	10	11	12	13
	10	5	7	9	11				

Для сравнения, оценка сверху (2) дает следующие результаты:

$L(2) = 1$, $L(3) = 2$, $L(4) = 4$, $L(5) = 6$, $L(6) = 8$, $L(7) = 10$, $L(8) = 13$, $L(9) = 16$.

Для $m = 2, 3, 4$ эти оценки совпадают с приведенными в таблице 1 точными оценками, для $m = 5, 6, 7, 8$ превышают точные на 1, для $m = 9$ превышают точную уже на 3.

Интересно, что увеличение q при $q \geq m$ не влияет на длину объясняющей цепочки. Это объясняется тем фактом, что в перестановках участвуют только компоненты векторной оценки y, которые занимают всего m градаций на порядковой шкале Z_0.

При $q = 2$ максимальная длина цепочки получается в случае, когда для одной половины компонент выполняется $y_i = 2$, $z_i = 1$, а для другой $y_i = 1$, $z_i = 2$:

$$L(m,2) = L(2,2) \times \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, \quad m = 3, 4, \ldots$$

Определенную закономерность можно проследить и для значений $q = 3$ и 4:

$$L(m,q) = L(4,q) \times \left\lfloor \frac{m}{4} \right\rfloor + L(3,q) \times \left\lfloor \frac{m \bmod 4}{3} \right\rfloor + L(2,q) \times \left\lfloor \frac{(m \bmod 4) \bmod 3}{2} \right\rfloor, \quad m = 5, 6, \ldots$$

Получить формулу для $L(m, q)$ для общего случая пока не удалось.

Заключение

В статье представлен новый алгоритм построения объясняющих цепочек в случае, когда критерии упорядочены по важности и имеют общую порядковую шкалу. В отличие от известных алгоритмов, он строит цепочки наименьшей возможной длины. Экспериментально получены точные значения максимальных длин объясняющих цепочек в зависимости от числа критериев (до 10) и числа градаций шкалы критериев (до 9). Представленный алгоритм реализуется в новой версии системы поддержки принятия решений DASS [2]. Эта система предназначена для анализа многокритериальных задач самого различного характера – экономического, социального, технического, экологического, …, – в которых шкала критериев может быть балльной или даже вербальной (со словесными градациями типа «отлично», …, «очень плохо»).

Автор благодарен проф. В.В. Подиновскому за постановку задачи и конструктивные обсуждения в ходе работы.

Приложение

Для доказательства теорем воспользуемся леммой из [4].

Лемма 1. *Если* $yR^{\Omega}z$, $y_{<j-1]}R^0 z_{<j-1]}$, $y_j < z_j$, $j \in M_\beta$, *то существует индекс* $r \in \{1, 2, \ldots, i_\beta\}$ *такой, что* $z_r \leq y_j < y_r$, *причем выполняется* $uR^{\Omega}z$, *где* $u = y^{rj}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть выполняются условия леммы 1. Используем один из существующих индексов r для получения векторной оценки $u^1 = y^{rj}$. Поскольку $z_r \leq y_j = u^1_r$, то при перестановке компонент с номерами j и r условие $u^1_{<j-1]}R^0 z_{<j-1]}$ сохраняется. Поскольку $y_j < y_r = u^1_j$, то либо $z_j \leq u^1_j$, либо разность $z_j - u^1_j$ уменьшается по сравнению с $z_j - y_j$. Таким образом, последовательно применяя лемму 1 к u^1, u^2, …, за конечное число перестановок компонент будет достигнуто выполнение условия $z_j \leq u^l_j$ и, следовательно, $u^l_{<j]}R^0 z_{<j]}$.

Далее на шагах 2 и 3 алгоритма будет найдено следующее $i > j$, при котором выполняются условия леммы 1 для векторной оценки u^l: $u^l R^{\Omega} z$, $u^l_{<i-1]}R^0 z_{<i-1]}$, $u^l_i < z_i$. Поступая с векторной оценкой u^l аналогично y, за конечное число перестановок компонент будет получено $u^t_{<i]}R^0 z_{<i]}$. И так далее, пока не будет получено отношение $u^L R^0 z$ и работа алгоритма завершится на шаге 9. Если же на одном из шагов 5 не будет найдено ни одного индекса r, то это значит, что условия леммы 1 не выполняются, т.е. $yR^{\Omega}z$ – не верно. Тогда работа алгоритма завершится на шаге 10. Теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 сформулируем и докажем вначале несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2. *Кратчайшая объясняющаяуR^{Ω}zцепочка может быть получена путем осуществления только таких перестановок $u^{l+1} = (u^l)^{rj}$, для которых выполняется*:

$$u^l_j < z_j,\ z_r < u^l_r,\ z_r < z_j,\ u^l_j < u^l_r\ (r \succ j \text{или} r \sim j). \tag{3}$$

Обозначим через $\Sigma(y)$ суммарную разность $z_j - y_j$ по компонентам j таким, что $y_j < z_j$. Заметим, что $\Sigma(u^L) = 0$, так как $u^L R^0 z$. Перестановки (3) уменьшают $\Sigma(u^{l+1})$ по сравнению с $\Sigma(u^l)$, остальные перестановки – нет. Действительно:

$z_r < u^{l+1}_r$, так как $z_r < u^l_r < u^l_j = u^{l+1}_r$; $z_j - u^{l+1}_j = z_j - u^l_r < z_j - u^l_j$, т.е. $\Sigma(u^{l+1}) < \Sigma(u^l)$.

Рассмотрим все случаи остальных перестановок:

1. $u^l_j < z_j,\ z_r \geq u^l_r$.

а. Если $z_r < u^l_j$, то $z_j - u^{l+1}_j = z_j - u^l_r > (z_j - u^l_j) + (z_r - u^l_r)$, т.е. $\Sigma(u^{l+1}) > \Sigma(u^l)$.

б. Если $z_j < u^l_r$, то $z_r - u^{l+1}_r = z_r - u^l_j > (z_r - u^l_r) + (z_j - u^l_j)$, т.е. $\Sigma(u^{l+1}) > \Sigma(u^l)$.

в. Если $z_r \geq u^l_j$ и $z_j \geq u^l_r$, то $(z_j - u^{l+1}_j) + (z_r - u^{l+1}_r) = (z_j - u^l_j) + (z_r - u^l_r)$, т.е. $\Sigma(u^{l+1}) = \Sigma(u^l)$.

2. $u^l_j \geq z_j,\ z_r < u^l_r$. Так как j-ая и r-ая компоненты не дают вклад в $\Sigma(u^l)$, то сумма $\Sigma(u^{l+1})$ может только увеличиться.

3. $u^l_j < z_j,\ z_r < u^l_r,\ z_r \geq z_j$. Здесь $z_r - u^{l+1}_r = z_r - u^l_j \geq z_j - u^l_j$, т.е. $\Sigma(u^{l+1}) \geq \Sigma(u^l)$.

4. $u^l_j < z_j,\ z_r < u^l_r, u^l_j \geq u^l_r$. Здесь $z_j - u^{l+1}_j = z_j - u^l_r \geq z_j - u^l_j$, т.е. $\Sigma(u^{l+1}) \geq \Sigma(u^l)$.

Рассмотренные четыре типа перестановок имеет смысл производить, только если в дальнейшем это позволит за одну перестановку, удовлетворяющую условиям леммы 2, сократить сумму $\Sigma(u^t)$, $t = l + 2, l + 3, \ldots, L$, более эффективно.

Перестановкой типа 1 можно было бы добиться того, что разности $z_j - u^l_j$ и $z_r - u^l_r$ соберутся вместе, как это произошло в случаях 1.а или 1.б. Тогда на следующем шаге эту разность можно было бы сократить за одну перестановку. Например, в случае 1.а это перестановка $u^{l+2} = (u^{l+1})^{pj}$, для которой выполняется: $z_p \leq u^{l+1}_j < z_j \leq u^{l+1}_p$ ($p \succ j$ или $p \sim j$). В результате $u^{l+2}_r \geq z_r$, $u^{l+2}_j = u^{l+1}_p \geq z_j$, $u^{l+2}_p = u^{l+1}_j \geq z_p$. Но такого же эффекта можно было добиться последовательностью перестановок, удовлетворяющих условиям леммы 2. Сначала $v^{l+1} = (u^l)^{pj}$, для которой выполняется: $u^l_j < z_j,\ z_p < u^l_p,\ z_p < z_j,\ u^l_j < u^l_p$ ($p \succ j$ или $p \sim j$). Затем $v^{l+2} = (v^{l+1})^{pr}$, для которой выполняется: $v^{l+1}_r < z_r$ (так как $v^{l+1}_r = u^l_r < z_r$), $z_p < v^{l+1}_p$ (так как $z_p \leq u^{l+1}_j = u^l_r < z_r < u^l_j = v^{l+1}_p$), $z_p < z_r$ (так как $z_p \leq u^{l+1}_j = u^l_r < z_r$), $v^{l+1}_r < v^{l+1}_p$ (так как $v^{l+1}_r = u^l_r < z_r < u^l_j = v^{l+1}_p$), $p \succ r$ или $p \sim r$ (так как в случае 1.а выполняется $u^l_j > u^l_r$, т.е. $j \succ r$ или $j \sim r$). В результате $v^{l+2} = u^{l+2}$, так как в этих векторных оценках компоненты векторной оценки u^l с индексами p, j, r выстроились в одинаковом порядке j, r, p. Таким образом, перестановкой типа 1.а не удалось сократить объясняющую цепочку. В случае 1.б доказательство аналогичное. По тому же принципу можно показать, что если несколько раз подряд применить перестановки типа 1.а или 1.б, то также не удастся построить цепочку меньшей длины.

Перестановкой типа 2 можно было бы добиться того, что отдельные положительные разности $u^l_j - z_j$ и $u^l_r - z_r$ соберутся вместе по одной компоненте (например, j-ой, если $u^l_j > u^l_r$). Тогда на следующем шаге одной перестановкой с этой j-ой компонентой можно было бы сократить более длинную разность $z_p - u^{l+1}_p$. Но, аналогично предыдущему доказательству для перестановки типа 1, можно показать, что предлагаемую последовательность перестановок $u^{l+1} = (u^l)^{rj}$, $u^{l+2} = (u^{l+1})^{pj}$ можно с тем же результатом заменить последовательностью перестановок $v^{l+1} = (u^l)^{pj}$, $v^{l+2} = (v^{l+1})^{pr}$, которые приэтом будут удовлетворять условиям леммы 2.

В перестановках типа 3 и 4 смысла нет совсем. Компоненты, по которым u^l хуже и лучше векторной оценки z, просто меняются местами в u^{l+1}. При этом, помимо возможного увеличения $\Sigma(u^{l+1})$, может не выполняться отношение $u^{l+1}R^{\Omega}z$.

Таким образом, для построения кратчайшей объясняющей цепочки достаточно перестановок компонент, удовлетворяющих условиям (3). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Кратчайшая объясняющая* $yR^{\Omega}z$ *цепочка может быть получена путем осуществления только таких перестановок* $u^{l+1} = (u^l)^{rj}$, *для которых выполняется:*

$$u^l_j < z_j, \quad z_r \leq u^l_j < u^l_r \ (r \succ j \text{ или } r \sim j). \qquad (4)$$

Рассмотрим перестановку $u^{l+1} = (u^l)^{rj}$, для которой выполняются условия (3), но не выполняются условия (4), т.е. $z_r > u^l_j$. Тогда сохраняется $u^{l+1}_r = u^l_j < z_r$. Дальнейшие перестановки такого типа приводят к тому же результату: $u^{l+t}_p = u^l_j < z_p$. Таким образом, для построения объясняющей $u^lR^{\Omega}z$ цепочки придется осуществить перестановку типа (4).

Пусть существует цепочка V, полностью сокращающая разность $z_j - u^l_j$ за счет перестановок типа (3). Как было показано выше, одна из этих перестановок имеет тип (4). Составим новую цепочку U, в которой эта перестановка типа (4) будет стоять на первом месте, т.е. $u^{l+1} = (u^l)^{rj}$. Если $z_j \leq u^{l+1}_j$, то разность $z_j - u^l_j$ удается сократить за одну эту перестановку, тогда остальная цепочка V не нужна. В противном случае разность $z_j - u^{l+1}_j$ просто уменьшается по сравнению с $z_j - u^l_j$. Тогда просмотрим цепочку V с начала, т.е. с $v^{l+1} = (u^l)^{pj}$. Возможны два случая:

1. $u^l_p = u^{l+1}_p \leq u^l_r = u^{l+1}_j$. В этом случае перестановка $u^{l+2} = (u^{l+1})^{pj}$ не удовлетворяет условиям (3). Но она и не нужна, так как вся та часть разности $z_j - u^l_j$, которую сокращала перестановка $v^{l+1} = (u^l)^{pj}$, полностью сократилась перестановкой $u^{l+1} = (u^l)^{rj}$.

2. $u^l_p = u^{l+1}_p > u^l_r = u^{l+1}_j$. В этом случае перестановка $u^{l+2} = (u^{l+1})^{pj}$ удовлетворяет условиям (3). Она сокращает ту же часть разности $z_j - u^{l+1}_j$, что и $v^{l+1} = (u^l)^{pj}$. Добавляем ее к цепочке U.

Таким же образом поступаем с остальными перестановками цепочки V. В результате цепочка U также полностью сокращает всю разность $z_j - u^l_j$, причем она оказывается не длиннее цепочки V.

Далее аналогично поступим с цепочкой, объясняющей $u^{l+1}R^{\Omega}z$. Т.е. переместим в ее начало перестановку типа (4). И так далее, пока не получим цепочку, полностью сокращающую всю разность $z_j - u^l_j$, и состоящую только из перестановок типа (4). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Кратчайшая объясняющая* $yR^{\Omega}z$ *цепочка может быть получена путем осуществления только таких перестановок* $u^{l+1} = (u^l)^{rj}$, *для которых выполняется:*

$$u^l_{<j-1]}R^0 z_{<j-1]}, \ u^l_j < z_j, \quad z_r \leq u^l_j < u^l_r \ (r \succ j \text{ или } r \sim j). \qquad (5)$$

Пусть выполняется $yR^{\Omega}z$. Согласно лемме 3, существует кратчайшая объясняющая $yR^{\Omega}z$ цепочка, состоящая только из перестановок типа (4). Такая цепочка разбивается на независимые подцепочки, каждая из которых соответствует своей j_n-ой компоненте такой, что $y_{j_n} < z_{j_n}$. При этом в каждой такой подцепочке последовательно сокращается разность $z_{j_n} - y_{j_n}$ путем перестановок с j_n-ой компонентой. Пусть $j_1 < j_2 < \ldots < j_N$. Тогда перенесем в начало рассматриваемой объясняющей цепочки все перестановки с j_1-ой компонентой, затем поместим все перестановки с j_2-ой компонентой и т.д. В получившейся цепочке каждая перестановка допустима и имеет тип (5), причем $u^{l+1}R^{\Omega}z$ выполняется по лемме 1. Следовательно, такая цепочка существует и она не длиннее изначальной. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 2. Лемма 4 показывает, что с помощью лишь тех перестановок, что предусмотрены новым алгоритмом, можно получить объясняющую цепочку наименьшей длины. Таким образом, если $yR^{\Omega}z$, то в получающемся дереве решений содержится объясняющая цепочка наименьшей возможной длины.

Каждая ветвь дерева решений нового алгоритма определяется последовательностью выборов индексов перестановки r. По теореме 1, если выполняется $yR^{\Omega}z$, то любая такая последовательность позволяет построить объясняющую цепочку. Следовательно, при $yR^{\Omega}z$ существует все дерево решений. Проход дерева в ширину обеспечивает то, что первой будет найдена кратчайшая ветвь в дереве, и работа нового алгоритма завершится на шаге 9. Если же выясняется, что на одной из ветвей дальнейшую цепочку построить не удается (не существует индексов r), то по теореме 1 $yR^{\Omega}z$ неверно, и объясняющей цепочки не будет получено ни на одной из ветвей дерева. В этом случае работа нового алгоритма завершается на шаге 10. Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Подиновский В.В.* Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений: учебное пособие. – М.: Физматлит. 2007. – 64 с.

2. *Подиновский В.В., Потапов М.А.* Важность критериев в многокритериальных задачах принятия решений: теория, методы, софт и приложения // Открытое образование. 2012. № 2. С. 55 – 61.

3. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности однородными критериями // Автоматика и телемеханика. 1976. № 11. С. 118–127.

4. *Алексеев Н.С.* Алгоритмы многокритериального сравнения вариантов решения при ранжированных по важности критериях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1997. Т. 36, № 9. С. 60 – 70.

5. *Подиновский В.В.* Коэффициенты важности критериев в задачах принятия решений. Порядковые, или ординальные, коэффициенты важности // Автоматика и телемеханика. 1978. № 10. С. 130 – 141.

Creation of explaining chains of smallest length at criteria ordered on importance with ordinal scale

Andrey Pavlovich Nelyubin, postgraduate student of Institute of Engineering Science after A.A.Blagonravov of Russian Academy of Sciences

The new algorithm of comparison of options for solution of a multicriteria task is presented in the article by the methods of the theory of importance of criteria for the case when all criteria are ordered according to the importance and have the general ordinal scale. Unlike well-known algorithms the given algorithm constructs explaining chains of the smallest length. The exact values of the maximum lengths of chains are experimentally received at a small number of criteria and gradation of a scale.

Keywords: multicriteria problems of decision-making, theory of importance of criteria, serial scale, explaining chains.