УДК 519.11

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И *T*-МОДЕЛИ

Бондаренко Леонид Николаевич,
канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой гуманитарных и естественно-научных дисциплин,
e-mail: leobond5@mail.ru,
Московский университет им. С.Ю. Витте, филиал в г. Сергиевом Посаде

Эта статья продолжает рассмотрение вопросов, связанных с моделированием, классификацией и стандартизацией комбинаторных последовательностей. Для этого используются T-модели и T-диаграммы. T-модель является последовательностью таблиц специального вида, составленных из целых положительных чисел. Она получается с помощью простого алгоритма, а ей легко ставится в соответствие комбинаторная последовательность. В ряде случаев по T-модели можно построить T-диаграмму. Она является диаграммой Хассе частично упорядоченного множества, просто связанного с T-моделью. Для T-диаграммы вводятся две двухиндексные последовательности, тесно связанные с соответствующей комбинаторной последовательностью. Это дает возможность исследования многих как одноиндексных, так и двухиндексных последовательностей. В данной работе с помощью некоторых преобразований комбинаторных последовательностей вводятся классы T-моделей. Эти классы в ряде случаев упрощают методы моделирования и классификации комбинаторных последовательностей. Рассмотрена задача применения таких классов T-моделей для получения новых комбинаторных результатов.

Ключевые слова: комбинаторная последовательность, преобразования последовательностей, производящая функция, T-модель, посет, T-диаграмма

TRANSFORMATIONS OF COMBINATORIAL SEQUENCES AND T-MODELS

Bondarenko L.N.,
candidate of technical sciences, associate professor, head of the sub-department of humanities and natural science disciplines,
e-mail: leobond5@mail.ru,
Moscow Witte University, a branch in the city of Sergiev Posad

This article continues the discussion of issues related to the modeling, classification and standardization of combinatorial sequences. T-models and T-diagrams are used for this. The T-model is a sequence of tables of a special kind made up of positive integers. It is obtained using a simple algorithm, and easily corresponded to a combinatorial sequence. In some cases, the T-model can be used to build a T-diagram, which is a Hasse diagram of a partially ordered set simply associated with a T-model. For a T-diagram, two two-index sequences are introduced, closely related to the corresponding combinatorial sequence. This makes it possible to study as single-index but double-index sequences. In this paper, using some transformations of combinatorial sequences, classes of T-models are introduced. In some cases, these classes simplify methods of modeling and classification for combinatorial sequences. The problem of using such classes of T-models to obtain new combinatorial results is considered.

Keywords: combinatorial sequence, sequence transformations, generating function, T-model, poset, T-diagram

DOI 10.21777/2500-2112-2020-3-89-97

Введение

Целочисленные последовательности естественно возникают при рассмотрении многих задач информатики, математической статистики и ряда других прикладных дисциплин. Получение таких последовательностей и исследование их свойств базируется на использовании мощных методов перечислительной комбинаторики, которая является бурно развивающейся областью прикладной математики.

В настоящее время эта область оказывает существенное воздействие на преобразование и развитие многих классических разделов математики, что прекрасно прослеживается по основополагающим работам Ричарда Стенли [7; 8], а ее роль в информатике можно легко оценить по замечательной монографии Дональда Кнута [5] и другим его многочисленным работам.

Для описания и классификации огромного числа целочисленных последовательностей, возникающих в различных приложениях, Нилом Слоуном была создана уникальная “The on-line encyclopedia of integer sequences” (OEIS) [11]. Объем этой энциклопедии постоянно возрастает, и она уже содержит более 330 000 статей по целочисленным последовательностям, встречающимся в комбинаторике, теории графов и т.д.

Каждая статья OEIS нумеруется буквой A с шестизначным цифровым кодом и содержит, кроме ссылок на источники, также основные формулы, включающие рекуррентные соотношения, производящие функции и т.п.

Подавляющая часть статей в OEIS посвящена описанию возрастающих последовательностей целых положительных чисел, которые удобно называть комбинаторными последовательностями [3].

Ряд комбинаторных последовательностей из OEIS может быть связан между собой специальными преобразованиями, описанию и исследованию которых посвящена многочисленная литература, например, [9].

Эти преобразования позволяют получать из известных новые комбинаторные последовательности, изучать их свойства, а также упростить классификацию и систематизацию комбинаторных последовательностей.

Для моделирования, классификации и стандартизации комбинаторных последовательностей в [2; 3] были успешно использованы их *T*-модели, являющиеся последовательностями специального вида таблиц целых положительных чисел. Этому значительно способствовала простота построения с помощью *T*-модели комбинаторной последовательности некоторых связанных с ней двухиндексных последовательностей, которые также обычно встречаются в OEIS.

С помощью применения некоторых преобразований комбинаторных последовательностей можно построить определенные классы *T*-моделей, что приводит к упрощению классификации и стандартизации ряда комбинаторных последовательностей, а также получению новых их свойств.

Постановка задачи

Целочисленную последовательность $a=\{a_1,a_2,\ldots\}$ также можно задавать с помощью описания ее общего члена a_n, где индекс $n\in\mathbf{N}=\{1,2,\ldots\}$. Выбор в a начального значения индекса, равного единице, позволяет рассматривать и тривиальное продолжение этой последовательности $\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$.

Обычная $F(u)$ и экспоненциальная $G(u)$ производящие функции последовательности $a=\{a_1,a_2,\ldots\}$ записываются выражениями [4; 7; 8]

$$F(u)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}u^n,\ \ G(u)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}\frac{u^n}{n!}.$$

Эти производящие функции как формальные ряды могут быть связаны интегральным преобразованием Лапласа $L\{G(u),\,z\}=z^{-1}F\left(z^{-1}\right)$, свойства которого и подробные таблицы для нахождения прямого и обратного преобразования Лапласа можно найти в [1].

Биномиальное преобразование B последовательности $a=\{a_1,a_2,\ldots\}$ в последовательность $b=\{b_1,b_2,\ldots\}$, иначе $b=Ba$, задается соотношением [9]

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}a_k,\ \ n\in\mathbf{N},$$

итерирование которого $m \in \mathbf{N}$ раз дает последовательность $b = B^{(m)}a$ $(B^{(1)} = B)$, члены которой вычисляются по формуле [12]

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} m^{n-k} \binom{n-1}{k-1} a_k, \ \ m, n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Очевидно, что при $m = 0$ соотношение (1) дает последовательность $b = a$.

Особенно просто преобразование $b = B^{(m)}a$ описывается с помощью экспоненциальных производящих функций последовательностей a и b: если a отвечает $G(u)$, то b имеет производящую функцию $e^{mu}G(u)$ [9; 12].

Еще одно важное преобразование последовательности $a = \{a_1, a_2, \ldots\}$ можно получить на основе рассмотрения определителей Ганкеля [10; 12]

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{m+n-1} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_{m+n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{m+n-1} & a_{m+n} & \ldots & a_{m+2n-2} \end{vmatrix}, \ \ m, n \in \mathbf{N},$$

которые находят многочисленные применения в различных разделах современной математики и ее приложений. Даже для последовательности a целых положительных чисел определители $H_n^{(m)}$ могут принимать также целые неположительные значения.

Определение 1. Преобразованием Ганкеля последовательности a называется последовательность $H_n^{(1)}$ при $n \in \mathbf{N}$.

Преобразование Ганкеля H определения 1 дает последовательность $b = Ha$, а его свойства и применения рассматриваются в работах [10; 12].

Далее в основном будут рассматриваться только комбинаторные последовательности $a = \{a_1, a_2, \ldots\}$, для которых $a_1 < a_2 < \ldots$ и $a_1 = 1$. Тривиальное их продолжение достигается добавлением $a_0 = 1$, а применение к a и ее продолжению $B^{(m)}$ при $m \in \mathbf{N}$ приводит к различным результатам.

Ряд комбинаторных последовательностей можно задавать и исследовать с помощью специальных комбинаторных конфигураций – *T*-моделей [2; 3].

Определение 2. *T*-модель комбинаторной последовательности a – это тройка (S, θ, T_1) с алфавитом $S \subseteq \mathbf{N}$, дискретным многозначным отображением $\theta : s \to j_1 j_2 \ldots j_s$, где $s, j_1, \ldots, j_s \in S$ и $1 \le j_1 \le j_2 \le \ldots \le j_s$, а также начальной таблицей $T_1 = (a_2)$, причем θ отображает каждый элемент $s \in T_n$ в неубывающую последовательность (строку) $j_1 j_2 \ldots j_s$ длины $|\theta(s)| = s$ следующей таблицы T_{n+1}, которая находится рекурсивно по формуле $T_{n+1} = \theta(T_n), \ n \in \mathbf{N}$.

Так как веса (число элементов) таблиц $|T_n|$ при $n \in \mathbf{N}$ определяют некоторую комбинаторную последовательность a, то *T*-модели отвечает эта последовательность, но заданной a обычно соответствует много *T*-моделей.

Каждой таблице T_n *T*-модели определения 2 сопоставляется ее производящий многочлен $\sum_{s \in T_n} t^s$ или его модификация $U_n(t)$, полученная с помощью преобразований, сохраняющих его значение при $t = 1$, например, умножение на степень t или замена t некоторой ее степенью [2; 3].

Поэтому каждой *T*-модели отвечает комбинаторная последовательность $U_n(1) = |T_n|$ при $n \in \mathbf{N}$, а нахождение соотношений между многочленами $U_n(t)$ часто позволяет легко исследовать свойства этой последовательности.

Таким образом, при задании *T*-модели тройкой (S, θ, T_1), которой соответствует комбинаторная последовательность a, возникает естественная задача нахождения новой *T*-модели (S^*, θ^*, T_1^*), которой отвечает другая комбинаторная последовательность b, а последовательности b и a связаны некоторым преобразованием. Решение этой задачи рассмотрим для некоторых простых преобразований комбинаторных последовательностей.

Степенное преобразование D и классы T-моделей

Элементарное преобразование комбинаторной последовательности $a=\{a_1,a_2,\ldots\}$ вида $b=D^{(r)}a$, задаваемое при $r,n\in\mathbf{N}$ соотношением $b_n=r^{n-1}a_n$, назовем степенным преобразованием D с параметром r. В частности, результат такого преобразования последовательности чисел Каталана $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ при $n\in\mathbf{N}$ [11, A000108] рассматривается в [11, A003645] при $r=2$.

Теорема 1. Пусть *T*-модели $(S,\,\theta,\,T_1)$ определения 2 соответствует комбинаторная последовательность $a=\{a_1,a_2,\ldots\}$. Тогда *T*-модели $(S^*,\,\theta^*,\,T_1^*)$, в которой $rs\in S^*$, если $s\in S$, $\theta^*: rs\to(r\,j_1)^r\,(r\,j_2)^r\ldots(r\,j_s)^r$ и $T_1^*=(ra_2)$, отвечает последовательность $b=D^{(r)}a$ при $r\in\mathbf{N}$, а тройка $(S^*,\,\theta^*,\,T_1^*)$ определяет однопараметрический класс *T*-моделей.

Доказательство. Результат теоремы 1 непосредственно следует из определения 1, построения производящих многочленов для рассматриваемых *T*-моделей и задания степенного преобразования D с параметром r.

Если отображение $\theta: s\to j_1\,j_2\ldots j_s$, играющее существенную роль в определении 2, является регулярным, т. е. все столбцы таблицы

$$s_1\to j_{11}\,j_{12}\ldots j_{1s_1}$$
$$s_2\to j_{21}\,j_{22}\ldots j_{2s_2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

являются неубывающими числовыми последовательностями для символов $s_1<s_2<\ldots$ алфавита S, то *T*-модели $(S,\,\theta,\,T_1)$, кроме $U_n(t)$, можно сопоставить также многочлены $V_n(x)$, коэффициенты которых задают двухиндексную последовательность, связанную с последовательностью $a=\{a_1,a_2,\ldots\}$ [3].

Для построения этих многочленов рекурсивно вводится нумерация всех элементов таблиц рассматриваемой *T*-модели [2; 3]:

– единственному элементу a_2 таблицы T_1 присваивается номер $\nu_1=1$,

– если $n\geq 2$ и $s\in T_{n-1}$ имеет номер $\nu_1\ldots\nu_{n-1}$, то элементу $s'\in T_n$ строки $\theta(s)$ присваивается номер (слово) $\nu=\nu_1\ldots\nu_{n-1}\,\nu_n$ с суффиксом ν_n, совпадающим с порядковым номером из $\mathbf{N}$ элемента s' в строке $\theta(s)$.

Затем на множестве номеров P_n таблицы T_n вводится частичный порядок: номер $\nu'\in P_n$ покрывает $\nu\in P_n$, если вектор $\nu'-\nu$ имеет все нулевые координаты, кроме одной, равной единице. Диаграмма Хассе полученного частично упорядоченного множества (посета) P_n является дистрибутивной решеткой, обозначается L_n и называется *T*-диаграммой таблицы T_n [2; 3].

Число частей *T*-диаграммы L_n таблицы T_n, изоморфных булеву кубу размерности k, обозначается $R_{n,k}$, и вводится многочлен

$$R_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}R_{n,k}x^k, \qquad (2)$$

а число вершин этой *T*-диаграммы, имеющих положительную валентность (степень) k, обозначается $V_{n,k}$ и вводится многочлен

$$V_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}V_{n,k}x^k. \qquad (3)$$

Степень многочленов (2) и (3) в отличие от $U_n(t)$ всегда равна $n-1$, $V_{n,0}=1$ и $U_n(1)=V_n(1)$, а также выполняется простое равенство [3]

$$R_n(x)=V_n(x+1). \qquad (4)$$

Теорема 2. Пусть при $n\in\mathbf{N}$ для *T*-диаграммы L_n таблицы T_n *T*-модели $(S,\,\theta,\,T_1)$ определения 2 с регулярным отображением θ найден многочлен $V_n(x)$. Тогда для *T*-диаграммы L_n^* таблицы T_n^* *T*-модели $(S^*,\,\theta^*,\,T_1^*)$ из теоремы 1 многочлен $V_n^*(x)$ имеет следующий вид:

$$V_n^*(x) = ((r-1)x+1)^{n-1} V_n\left(\frac{rx}{(r-1)x+1}\right). \tag{5}$$

Доказательство. Выражение (5) приводит к простой связи между коэффициентами многочленов $V_n^*(x)$ и (3)

$$V_{n,k}^* = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-1-i}{k-i} \left(1-\frac{1}{r}\right)^{k-i} V_{n,i},$$

а равенство (4) дает соотношение

$$R_{n,k} = \sum_{i=0}^{n-1-k} \binom{n-1-i}{k} V_{n,n-1-i}.$$

Полученные формулы показывают, что равенство (5) несложно интерпретировать с использованием определения многочленов (2), иначе рассматривается преобразование *T*-диаграммы L_n в L_n^* с учетом их частей, изоморфных соответствующим булевым кубам, инициированное условиями теоремы 1 и проверяемое индукцией по n, что и завершает доказательство.

Для пояснения результатов теорем 1 и 2 рассмотрим класс *T*-моделей (S^*, θ^*, T_1^*) на базе последовательности известных чисел Каталана, имеющих многочисленные интерпретации в литературе [8; 11, A000108] и степенного преобразования D с параметром $r \in \mathbf{N}$.

Пример 1. При $S^* = \{2r, 3r, \ldots\}$, $\theta^* : s^* \to (2r)^r (3r)^r \ldots (s^*+r)^r$, где $s^* \in S^*$, и $T_1^* = (2r)$ легко находится рекуррентное соотношение

$$U_1^*(t) = t, \;\; (1-t)U_{n+1}^*(t) + rt^2 U_n^*(t) = rtU_n^*(1), \;\; n \in \mathbf{N},$$

в котором $U_n^*(t)$ являются модификацией производящих многочленов для (S^*, θ^*, T_1^*), полученной их умножением на t^{-r} и последующей заменой t на $t^{1/r}$.

Поэтому для $F(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}^*(t) u^n$ несложно находится соотношение

$$F(t,u) = \frac{t(1-t+ruF(1,u))}{1-t+rt^2u},$$

с помощью которого методом, описанном в [2; 3], получаем функцию

$$F(1,u) = \frac{1-2ru-\sqrt{1-4ru}}{2r^2u^2},$$

являющуюся производящей при $r=1$ для чисел Каталана $\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$

при $n \in \mathbf{N}$, а при $r=2$ для чисел из [11, A003645]. При $r=1$ $V_n(x)$ являются известными многочленами Нараяны [8] и задаются производящей функцией [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_{n+1}(x)u^n = \frac{1-(x+1)u-\sqrt{((x+1)u-1)^2-4xu^2}}{2u^2x},$$

а теорема 2 приводит к следующему обобщению этой производящей функции:

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_{n+1}^*(x)u^n = \frac{1-((2r-1)x+1)u-\sqrt{(x-1)^2u^2-2((2r-1)x+1)u+1}}{2ru^2x((r-1)x+1)},$$

причем применение обратного преобразования Лапласа дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_{n+1}^*(x)\frac{u^n}{n!} = \frac{e^{((2r-1)x+1)u} I_1\left(2u\sqrt{rx((r-1)x+1)}\right)}{u\sqrt{rx((r-1)x+1)}},$$

где $I_1(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка 1.

Классы T-моделей и преобразования R, B

Определение 3. Аналогично теореме 1 по *T*-модели (S,θ,T_1) образуем при $r\in\mathbf{N}$ класс *T*-моделей (S^*,θ^*,T_1^*), в котором $r(s-1)+1\in S^*$, если $s\in S$,

$$\theta^*: r(s-1)+1\to(r(j_1-1)+1)^r\ldots(r(j_{s-1}-1)+1)^r(r(j_s-1)+1)$$

и $T_1^*=(ra_2)$. *T*-модели из класса (S^*,θ^*,T_1^*) отвечает комбинаторная последовательность $b=\{b_1,b_2,\ldots\}$, а равенство $b=R^{(r)}a$ определяет преобразование R с параметром r.

В условиях определения 3, теорема 2 заменяется утверждением, в котором вместо выражения (5) записывается равенство $V_n^*(x)=V_n(rx)$, что полностью согласуется с результатами статьи [3].

Для класса *T*-моделей (S,θ,T_1) алфавит $S=\{r+1,\ 2r+1,\ \ldots\}$ при $r\in\mathbf{N}$, подходит под определение 3, так как $r(s-1)+1\in S$, если $s\in\mathbf{N}-\{1\}$, а $T_1=(r+1)$.

При $m\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ по классу (S,θ,T_1) построим класс *T*-моделей (S^*,θ^*,T_1^*) с алфавитом $S^*=\{m+r+1,\ m+2r+1,\ \ldots\}$, таблицей $T_1^*=(m+r+1)$ и отображением θ^*, которое задается определением 2, при $m=0$ совпадает с θ, а также дополнительно в неубывающей строке-образе $\theta^*(s^*)$ перед последним символом из S^* присутствует ровно m раз непосредственно предшествующий ему в S^* символ.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Если при фиксированном $r\in\mathbf{N}$ *T*-модели из класса (S,θ,T_1) отвечает $a=\{a_1,a_2,\ldots\}$, а *T*-модели из класса (S^*,θ^*,T_1^*) отвечает $b=\{b_1,b_2,\ldots\}$, то при $m\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ имеем $b=B^{(m)}a$, где биномиальное преобразование B порядка m задается равенством (1), а теорема 2 заменяется утверждением, в котором вместо выражения (5) применяется аналог формулы (1)

$$V_n^*(x)=\sum_{k=1}^{n}(mx)^{n-k}\binom{n-1}{k-1}V_k(x),\ \ m,n\in\mathbf{N}. \tag{6}$$

В поясняющих теорему 3 примерах рассматриваются классы (S^*,θ^*,T_1^*), в которых $S^*=\{m+r+1,\ m+2r+1,\ \ldots\}$, $T_1^*=(m+r+1)$ при $m\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ и $r\in\mathbf{N}$.

Пример 2. При $\theta^*: s^*\to\left(s^*\right)^m\left(s^*+r\right)^{s^*-m}$, где $s^*\in S^*$, легко находится рекуррентное соотношение

$$U_1^*(t)=t^r,\ \ U_{n+1}^*(t)=(t^r+m)U_n^*(t)+t^{r+1}\frac{d}{dt}U_n^*(t),\ \ n\in\mathbf{N},$$

в котором $U_n^*(t)$ являются модификацией производящих многочленов для (S^*,θ^*,T_1^*), полученной их умножением на $t^{-(m+1)}$, и поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty}U_{n+1}^*(t)\frac{u^n}{n!}=\frac{t^re^{mu}}{(1-rt^ru)^{1+\frac{1}{r}}}.$$

Экспоненциальная производящая функция для многочленов $V_n^*(x)$ находится с помощью теоремы 3 и результатов из [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty}V_{n+1}^*(t)\frac{u^n}{n!}=\frac{e^{mxu}}{(1-rxu)^{1+\frac{1}{rx}}}.$$

Таким образом, в этом примере двухпараметрический класс (S^*,θ^*,T_1^*) *T*-моделей отвечает одноиндексным и двухиндексным последовательностям, получаемым на базе комбинаторной последовательности факториалов [11, A000142] и последовательности многочленов $V_n(x)=\prod_{k=1}^{n-1}(kx+1)$ [11, A094638, A130534], которые соответствуют значениям параметров $m=0,\ r=1$.

Пример 3. При $\theta^*: s^* \to \left(s^*\right)^{m+r}\left(s^*+r\right)^{s^*-m-r}$, где $s^* \in S^*$, также легко находится рекуррентное соотношение

$$U_1^*(t)=t,\ U_{n+1}^*(t)=(m+r)U_n^*(t)+t^{r+1}\frac{d}{dt}U_n^*(t),\ n\in\mathbf{N},$$

в котором $U_n^*(t)$ являются модификацией производящих многочленов для $(S^*,\ \theta^*,\ T_1^*)$, полученной их умножением на $t^{-(m+r)}$, и поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty}U_{n+1}^*(t)\frac{u^n}{n!}=\frac{t\,e^{(m+r)u}}{(1-rt^r u)^{\frac{1}{r}}}.$$

Экспоненциальная производящая функция для многочленов $V_n^*(x)$ также находится с помощью теоремы 3 и результатов из [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty}V_{n+1}^*(x)\frac{u^n}{n!}=\frac{e^{(m+r)xu}}{(1-rxu)^{\frac{1}{rx}}}. \tag{7}$$

Таким образом, в этом примере двухпараметрический класс $(S^*,\ \theta^*,\ T_1^*)$ T-моделей отвечает одноиндексным и двухиндексным последовательностям, получаемым на базе комбинаторной последовательности [11, A000522] и многочленов $V_n(x)$, соответствующих $m=0,\ r=1$, а $V_n(x)$ являются частным случаем многочленов Пуассона – Шарлье [11, A046716, A094816].

Положим в выражении (7) $x=1$ и $r=1$. Тогда (7) при значении параметра $m=-1$ определяет производящую функцию продолжения комбинаторной последовательности факториалов [11, A000142], а при $m=-2$ получается известная производящая функция для чисел беспорядков [6; 11, A000166].

Пример 4. При $\theta^*: s^* \to \left(s^*\right)^{s^*-1}\left(s^*+r\right)$, где $s^* \in S^*$, как и в примере 2 несложно находится рекуррентное соотношение [3]

$$U_1^*(t)=t^{m+r},\ U_{n+1}^*(t)=t^r\,U_n^*(t)+t\frac{d}{dt}U_n^*(t),\ n\in\mathbf{N},$$

в котором $U_n^*(t)$ являются модификацией производящих многочленов для $(S^*,\ \theta^*,\ T_1^*)$, полученной их умножением на t^{-1}, и поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty}U_{n+1}^*(t)\frac{u^n}{n!}=t^{m+r}e^{(m+r)u}\exp\left(\frac{t^r(e^{ru}-1)}{r}\right).$$

Экспоненциальная производящая функция для многочленов $V_n^*(x)$ также находится с помощью теоремы 3 и результатов из [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty}V_{n+1}^*(t)\frac{u^n}{n!}=e^{(m+r)xu}\exp\left(\frac{e^{rxu}-1}{rx}\right).$$

Таким образом, в этом примере двухпараметрический класс $(S^*,\ \theta^*,\ T_1^*)$ T-моделей отвечает одноиндексным и двухиндексным последовательностям, получаемым на базе комбинаторной последовательности чисел Белла [11, A000110] и многочленов $V_n(x)$ [11, A008278], соответствующих значениям $m=0,\ r=1$. Коэффициенты многочленов $V_n(x)$ тесно связаны с двухиндексной последовательностью чисел Стирлинга второго рода [11, A008277].

Пример 5. При $\theta^*: s^* \to (m+r+1)^r(m+2r+1)^r\ldots(s^*)^{m+r}(s^*+r)$, где $s^* \in S^*$ легко как и в примере 1 находится рекуррентное соотношение

$$U_1^*(t)=1,\ (1-t)U_{n+1}^*(t)+(t^2+(m+r-1)t-m)U_n^*(t)=r\,U_n^*(1),\ n\in\mathbf{N},$$

в котором $U_n^*(t)$ являются модификацией производящих многочленов для $(S^*,\ \theta^*,\ T_1^*)$, полученной их умножением на $t^{-(m+r+1)}$ и последующей заменой t на $t^{1/r}$. Аналогично примеру 1 находятся следующие соотношения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} U^*_{n+1}(1)u^n = \frac{1-(m+r+1)u-\sqrt{((m+r+1)u-1)^2-4ru^2}}{2ru^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} U^*_{n+1}(1)\frac{u^n}{n!} = \frac{e^{(m+r+1)u} I_1\left(2\sqrt{r}\,u\right)}{\sqrt{r}\,u},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} V^*_{n+1}(x)u^n = \frac{1-((m+r)x+1)u-\sqrt{(((m+r)x+1)u-1)^2-4rxu^2}}{2rxu^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} V^*_{n+1}(x)\frac{u^n}{n!} = \frac{e^{((m+r)x+1)u} I_1\left(2\sqrt{rx}\,u\right)}{\sqrt{rx}\,u}. \tag{8}$$

Таким образом, в этом примере двухпараметрический класс (S^*, θ^*, T_1^*) *T*-моделей отвечает одноиндексным и двухиндексным последовательностям, получаемым на базе комбинаторной последовательности чисел Каталана [11, A000110] и многочленов Нараяны $V_n(x)$ [8; 11, A001263], соответствующим значениям параметров $m=0,\ r=1$.

Аналогично примеру 3 положим в выражении (8) $x=1$ и $r=1$. Тогда (8) при значении параметра $m=-1$ определит производящую функцию известной последовательности чисел Моцкина [8; 11, A001006], для которой существует *T*-модель с нерегулярным отображением θ [2].

Заключение

Полученные результаты описывают методы применения классов *T*-моделей, построенных на базе некоторых преобразований комбинаторных последовательностей, для моделирования и классификации не только одноиндексных последовательностей, но также и соответствующих двухиндексных, получающихся использованием *T*-диаграмм.

Поэтому рассматриваемые классы *T*-моделей дают возможность проводить исследование не только свойств различных комбинаторных последовательностей, но также и расширять свойства их преобразований.

В частности, для преобразования D с параметром r последовательности $a=\{a_1,a_2,...\}$ соотношение (5) теоремы 2 позволяет для соответствующей двухиндексной последовательности при $r=1$ находить двухиндексные последовательности, отвечающие $b=D^{(r)}a$. Аналогично для многочленов формула (6) теоремы 3 задает применение биномиального преобразования B с параметром m, определенного выражением (1) для последовательностей.

В [10; 12] для последовательности a доказано свойство преобразования Ганкеля H определения 1: $HBa=Ha$. Его можно обобщить для многочленов, аналогичных многочленам $V_n(x)$. Доказательство этого утверждения планируется рассмотреть в следующей статье, а также использовать для выявления связи между *T*-моделями и комбинаторикой путей [4].

Список литературы

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина: пер. с англ. – М.: Наука, 1968. – 344 с. – (Серия «Справочная математическая библиотека»).

2. *Бондаренко Л.Н.* Модели комбинаторного анализа: монография. – М.: изд. «МУ им. С.Ю. Витте», 2019. – 248 с.

3. *Бондаренко Л.Н.* Систематизация комбинаторных последовательностей с использованием *T*-моделей и *T*-диаграмм // Образовательные ресурсы и технологии: электронный научный журнал. – 2020. – № 2 (31). – С. 58–68.

4. *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика: пер. с англ. – М.: Наука, 1990. – 504 с.
5. *Кнут Д.Э.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 4. Комбинаторные алгоритмы: пер. с англ. – М.: Вильямс, 2013. – 960 с.
6. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ: пер. с англ. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 288 s.
7. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика: пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – 440 с.
8. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика: пер. с англ. – М.: Мир, 2009. – Т. 2. – 768 с.
9. *Bernstein M., Sloane N.J.A.* Some Canonical Sequences of Integers // Linear Algebra Applications. – 1995. – Vol. 226–228. – P. 57–72.
10. . *Layman* J.W. The Hankel transform and some of its properties // Journal of integer sequences. – 2001. – Vol. 4, article 01.1.5. – 11 p.
11. *Sloane N.J.A.* The on-line encyclopedia of integer sequences [Электронный ресурс]. – URL: http://www.oeis.org (date of access: 01.09.2020).
12. *Spivey M.Z., Steil L.L.* The *k*-binomial transforms and the Hankel transform // Journal of integer sequences. – 2006. – Vol. 9, article 06.1.1. – 19 p.

References

1. *Bejtmen G., Erdeji A.* Tablicy integral'nyh preobrazovanij. Preobrazovaniya Fur'e, Laplasa, Mellina: per. s angl. – M.: Nauka, 1968. – 344 s. – (Seriya «Spravochnaya matematicheskaya biblioteka»).
2. *Bondarenko L.N.* Modeli kombinatornogo analiza: monografiya. – M.: izd. «MU im. S.Yu. Vitte», 2019. – 248 s.
3. *Bondarenko L.N.* Sistematizaciya kombinatornyh posledovatel'nostej s ispol'zovaniem T-modelej i T-diagramm // Obrazovatel'nye resursy i tekhnologii: elektronnyj nauchnyj zhurnal. – 2020. – № 2 (31). – S. 58–68.
4. *Gul'den YA., Dzhekson D.* Perechislitel'naya kombinatorika: per. s angl. – M.: Nauka, 1990. – 504 s.
5. *Knut D.E.* Iskusstvo programmirovaniya dlya EVM. T. 4. Kombinatornye algoritmy: per. s angl. – M.: Vil'yams, 2013. – 960 s.
6. *Riordan Dzh.* Vvedenie v kombinatornyj analiz: per. s angl. – M.: Izd-vo inostrannoj literatury, 1963. – 288 s.
7. *Stenli R.* Perechislitel'naya kombinatorika: per. s angl. – M.: Mir, 1990. – T. 1. – 440 s.
8. *Stenli R.* Perechislitel'naya kombinatorika: per. s angl. – M.: Mir, 2009. – T. 2. – 768 s.
9. *Bernstein M., Sloane N.J.A.* Some Canonical Sequences of Integers // Linear Algebra Applications. – 1995. – Vol. 226–228. – P. 57–72.
10. *Layman J.W.* The Hankel transform and some of its properties // Journal of integer sequences. – 2001. – Vol. 4, article 01.1.5. – 11 p.
11. *Sloane N.J.A.* The on-line encyclopedia of integer sequences [Elektronnyj resurs]. – URL: http://www.oeis.org (date of access: 01.09.2020).
12. *Spivey M.Z., Steil L.L.* The k-binomial transforms and the Hankel transform // Journal of integer sequences. – 2006. – Vol. 9, article 06.1.1. – 19 p.