УДК 519.114

ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ДВУХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КЛАССОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Бондаренко Леонид Николаевич[1],
канд. техн. наук, доцент,
e-mail: leobond5@mail.ru,
[1]*Московский университет им. С.Ю. Витте, филиал в г. Сергиевом Посаде, г. Сергиев Посад, Россия*

По разработанной автором методике в статье вводятся и исследуются два однопараметрических класса целочисленных последовательностей. Первый класс обеспечивает интерполяцию между последовательностью степеней двойки и последовательностью чисел Каталана, а второй – между последовательностью степеней двойки и последовательностью чисел Белла. Для получения разнообразных интерпретаций чисел рассматриваемых классов используются T-модели и коды Лемера перестановок. Эти интерпретации базируются на рекурсивном построении последовательностей числовых таблиц специального вида, определяющих T-модели, и свойствах кодов Лемера перестановок. Используемая методика приводит к простым алгоритмам построения двух классов множеств перестановок, отвечающих введенным классам числовых последовательностей. На полученных классах множеств перестановок удается также задать распределения вероятностей. Представление элементов второго класса числовых последовательностей с помощью чисел Стирлинга второго рода позволяет сопоставить соответствующему классу множеств перестановок класс упорядоченных разбиений множеств на определенное число блоков. Для чисел изучаемых классов последовательностей получены соотношения для их q-аналогов.

Ключевые слова: интерполяция последовательностей, T-модели, коды Лемера, числа Каталана, Белла и Стирлинга второго рода, q-аналоги

INTERPRETATIONS OF ELEMENTS OF TWO INTERPOLATION CLASSES OF INTEGER SEQUENCES

Bondarenko L.N.[1],
candidate of technical sciences, Associate Professor,
e-mail: leobond5@mail.ru,
[1]*Moscow Witte University, branch in Sergiev Posad, Sergiev Posad, Russia*

According to the methodology developed by the author, two one-parameter classes of integer sequences are introduced and investigated in the paper. The first class provides an interpolation between a sequence of powers of two and a sequence of Catalan numbers, and the second class provides an interpolation between a sequence of powers of two and a sequence of Bell numbers. In order to obtain various interpretations of the numbers of the considered classes, T-models and permutations by Lehmer codes are used. These interpretations are based on the recursive construction of sequences of numerical tables of a special kind defining T-models and the properties of permutations by Lehmer codes. The method used leads to simple algorithms for constructing two classes of permutation sets corresponding to the introduced classes of numerical sequences. On the basis of the obtained classes of permutation sets, it is also possible to set probability distributions. The representation of elements of the second class of numerical sequences using Stirling numbers of the second kind allows us to match the class of ordered partitions of sets into a certain number of blocks to the corresponding class of permutation sets. For the numbers of the studied classes of sequences, the relations for their q-analogues are obtained.

Keywords: sequence interpolation, T-models, Lehmer codes, Catalan, Bell and Stirling numbers of the second kind, q-analogues

DOI 10.21777/2500-2112-2021-4-88-96

Введение

Методика построения однопараметрических классов возрастающих целочисленных последовательностей, осуществляющих интерполяцию между двумя заданными фиксированными последовательностями, и отвечающих им однопараметрических классов множеств перестановок степени $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ была разработана в статье [2]. Эта методика базируется на применении *T*-моделей, определяемых рекурсивно и представляющих собой последовательности таблиц $T_1, T_2, \ldots$ специального вида с элементами из **N**, а также свойств кодов Лемера перестановок, позволяющих устанавливать частичный порядок на рассматриваемых множествах перестановок [1, 2]. По этой методике в статье [2] были построены классы числовых последовательностей и аналоги отвечающих им классов множеств перестановок, рассматриваемых в работах [5, 7]. Это позволило получить простые *q*-аналоги соответствующих чисел, а также существенно упростить алгоритмы генерации классов используемых множеств перестановок.

Данную статью можно рассматривать как продолжение работы [2]. В ней с помощью *T*-моделей строятся два однопараметрических класса возрастающих числовых последовательностей.

Первый класс осуществляет интерполяцию между последовательностью степеней 2^{n-1} и последовательностью чисел Каталана $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ при $n \in \mathbf{N}$.

В этой записи чисел Каталана используется биномиальный коэффициент, обозначаемый стандартным образом, а многие свойства чисел Каталана и их многочисленные интерпретации имеются в [3, 11]. Для получения дополнительных сведений о числах Каталана можно также обратиться к обширной статье с номером A000108 из [10].

Этот класс дополняет класс, реализующий интерполяцию между последовательностью чисел Каталана C_n и последовательностью факториалов $n!$ при $n \in \mathbf{N}$, который рассматривался в [2, 5].

Второй класс осуществляет интерполяцию между последовательностью степеней 2^{n-1} и последовательностью чисел Белла B_n при $n \in \mathbf{N}$, задаваемых как число способов всех разбиений множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на блоки.

Число Белла B_n также можно определить как сумму всех чисел Стирлинга второго рода $\left\{ n \atop k \right\}$, описывающих число способов разбиений множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ ровно на *k* блоков и имеющих, как и биномиальные коэффициенты, многочисленные свойства [3]. Дополнительные сведения о числах Белла

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\}$$

имеются в статье с номером A000110 из [10].

Этот класс дополняет класс, реализующий интерполяцию между последовательностью чисел Белла B_n и последовательностью факториалов $n!$ при $n \in \mathbf{N}$, который рассматривался в [2, 7].

Рассмотрение классов числовых последовательностей позволяет стандартизировать задание различных комбинаторных последовательностей, возникающих при решении соответствующих задач в информатике, статистике, химии, экономике и т.п. [1].

С помощью *T*-моделей, таблицы которых представляют одну из многочисленных интерпретаций элементов изучаемых числовых последовательностей, часто удается за счет рекурсивности, заложенной в определении *T*-модели, просто получать другие важные интерпретации этих элементов. В частности, такие важные комбинаторные интерпретации как множества перестановок и разбиений находят соответствующие применения в различных прикладных областях.

Для унификации обозначений для используемых в статье *T*-моделей соответствующие таблицы, многочлены и т.п. имеют в двух разделах статьи одинаковые обозначения, а их определение осуществляется надлежащим образом в каждом разделе.

1. Интерполяция числовых последовательностей между 2^{n-1} и C_n

Для исследования класса целочисленных последовательностей, осуществляющего интерполяцию между последовательностью степеней 2^{n-1} и последовательностью чисел Каталана C_n при $n \in \mathbf{N}$, несложно построить соответствующий однопараметрический класс T-моделей на базе методики, разработанной в [2]. Этот класс задается тройкой $(S^{(m)},\ \theta_m,\ T_1^{(m)})$, в которой $S^{(m)} = \{2, \ldots, m+1\}$ – алфавит используемых символов, $\theta_m : s \to 2\ 3\ \ldots\ s\ (\min(m,s)+1)$ – отображение символа $s \in S^{(m)}$ в строку символов $\theta_m(s)$, а $T_1^{(m)} = (2)$ – начальная таблица. При фиксированном значении параметра $m \in \mathbf{N}$ каждая таблица T-модели определяется рекурсивно соотношением $T_{n+1}^{(m)} = \theta_m(T_n^{(m)})$ при $n \in \mathbf{N}$.

Для преобразования последовательности таблиц T-модели в числовую последовательность используем производящие многочлены $U_n^{(m)}(t) = \sum_{s \in T_n^{(m)}} t^{s-2}$, которые при значении $t = 1$ определяют искомые числа.

В рассматриваемом случае рекурсивность, заложенная в определение T-модели, позволяет легко найти следующие рекуррентные соотношения:

$$U_1^{(m)}(t) = 1,\ \ (1-t)\,U_n^{(m)}(t) + t^2\, U_{n-1}^{(m)}(t) = U_{n-1}^{(m)}(1), \quad 2 \le n \le m;$$

$$U_n^{(m)}(t) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]+1} (-1)^{k-1} \binom{m-k+2}{k} U_{n-k}^{(m)}(t), \quad n > m. \tag{1}$$

В формуле (1) $[a]$ – целая часть числа a, а последовательности чисел, вычисляемые по этой формуле при $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ и $t = 1$, принимают вид:

$$\begin{cases} 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ 2048,\ 4096,\ \ldots\ [10, A000079]; \\ 1,\ 2,\ 5,\ 13,\ 34,\ 89,\ 233,\ 610,\ 1597,\ 4181,\ 10946,\ 28657,\ \ldots\ [10, A001519]; \\ 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 41,\ 122,\ 365,\ 1094,\ 3281,\ 9842,\ 29525,\ 88574,\ \ldots\ [10, A007051]; \\ 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 131,\ 417,\ 1341,\ 4334,\ 14041,\ 45542,\ 147798,\ \ldots\ [10, A080937]; \\ 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ 428,\ 1416,\ 4744,\ 16016,\ 54320,\ 184736,\ \ldots\ [10, A024175]; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{2}$$

причем для значений $m = 1, 2, \ldots, 8$ дополнительные сведения об этих последовательностях можно также найти в соответствующих статьях [10].

В частности, первая строка в (2) определяет при $n \in \mathbf{N}$ последовательность чисел 2^{n-1} [10, A000079], вторая строка – последовательность чисел Фибоначчи с нечетными номерами [10, A001519].

Неявное задание рекуррентным соотношением (1) многочленов $U_n^{(m)}(t)$ при $2 \le n \le m$ существенно затрудняет вычисление с его помощью чисел $U_n^{(m)}(1)$.

Так как эти многочлены не зависят от параметра $m \in \mathbf{N}$, то вычисление чисел $U_n^{(m)}(1)$ можно значительно упростить, используя предельный переход при $m \to \infty$ и обозначая $C_n = U_n^{(\infty)}(1)$.

В этом случае для производящей функции $F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, u^n$ при условии $C_0 = 1$ на основе результатов из [2] легко получить уравнение

$$uF(u)^2 - F(u) + 1 = 0. \tag{3}$$

Решение уравнения (3) приводит к известной производящей функции для чисел Каталана [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\, u^n = \frac{1-\sqrt{1-4u}}{2u},$$

а также из уравнения (3) следует рекуррентное соотношение [3]

$$C_0 = C_1 = 1,\;\; C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i\, C_{n-i},\;\; n \in \mathbf{N}, \tag{4}$$

позволяющее просто вычислять числа $C_n = U_n^{(m)}(1)$ в (1) при $2 \le n \le m$.

Таким образом, при $n \in \mathbf{N}$ класс последовательностей (2) осуществляет интерполяцию между последовательностью 2^{n-1} и последовательностью C_n.

При фиксированном значении параметра $m \in \mathbf{N}$ определим аналогично статьям [1, 2] множество номеров $L_n^{(m)}$ таблицы $T_n^{(m)}$ рассматриваемой *T*-модели рекурсивным способом.

Определение 1. Для начальной таблицы $T_1^{(m)} = (2)$ с одним элементом $s = 2$ полагаем его номер $\nu = 1$, а $L_1^{(m)} = \{1\}$; если $\nu = \nu_1 \ldots \nu_n \in L_n^{(m)}$ номер элемента $s \in T_n^{(m)}$, то номер $s' \in T_{n+1}^{(m)}$ полагаем равным $\nu\nu_{n+1} \in L_{n+1}^{(m)}$, где ν_{n+1} порядковый номер элемента s' в строке $\theta_m(s)$ таблицы $T_{n+1}^{(m)}$.

Определение 1 дает возможность сопоставить каждому числу $U_n^{(m)}(1)$ рассматриваемого класса целочисленных последовательностей множество перестановок $P_n^{(m)}$ символов $\{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что $\left|P_n^{(m)}\right| = \left|L_n^{(m)}\right| = U_n^{(m)}(1)$.

Действительно, из этого определения следует, что номер $\nu = \nu_1 \ldots \nu_n \in L_n^{(m)}$ является кодом Лемера некоторой перестановки $\pi = \pi_1 \ldots \pi_n \in P_n^{(m)}$, так как для этой перестановки при $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем $н_i = \left\{ j : \pi_j < \pi_j, 0 \le j \le i - 1, \pi_0 = 0 \right\}$.

Также в [2] доказано, что нахождение $\pi \in P_n^{(m)}$ по ее коду Лемера $\nu \in L_n^{(m)}$ и ключу $\kappa = 1 \ldots n$ длины $|\kappa| = n$ реализуется следующим алгоритмом: на *k*-м его шаге, где $k = 1, 2, \ldots, n$, символу π_{n-k+1} присваивается буква ключа κ с номером ν_{n-k+1}, а затем она удаляется из κ, и новый ключ κ имеет длину $|\kappa| = n - k$.

Для рассматриваемого класса *T*-моделей $(S^{(m)},\ \theta_m,\ T_1^{(m)})$ существует простой алгоритм генерации множеств номеров $L_n^{(m)}$ элементов таблиц $T_n^{(m)}$.

Теорема 1. Пусть $\nu = \nu_1 \ldots \nu_n \in L_n^{(m)}$ и $\mu = \nu_n$. Тогда множество $L_{n+1}^{(m)}$ при $n \in \mathbf{N}$ формируется по следующему правилу: каждому $\nu \in L_n^{(m)}$ отвечают только коды Лемера $\nu 1,\ \nu 2,\ \ldots,\ \nu(\min(m, \mu) + 1) \in L_{n+1}^{(m)}$.

Доказательство этой теоремы несложно проводится методом математической индукции на основе отмеченных выше результатов, а описанный в это теореме алгоритм позволяет также легко генерировать множества перестановок $P_n^{(m)}$ с использованием алгоритма преобразования кодов Лемера $L_n^{(m)}$ в перестановки $P_n^{(m)}$.

Отметим, что множество номеров $L_n^{(\infty)}$ совпадает с множеством кодов Лемера 213-избегающих перестановок степени *n* [2].

При фиксированном $m \in \mathbf{N}$ с помощью теоремы 1 несложно получить распределение вероятностей на множествах перестановок $P_n^{(m)}$.

Теорема 2. Пусть перестановка $\pi = \pi_1 \ldots \pi_n \in P_n^{(m)}$ имеет код Лемера $\nu = \nu_1 \ldots \nu_n \in L_n^{(m)}$, полученный по теореме 1. Тогда распределение вероятностей на множестве перестановок $P_n^{(m)}$ задается следующим выражением

$$\Pr(\pi) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\min(m, \nu_i) + 1},\;\; \pi \in P_n^{(m)},\;\; n \in \mathbf{N}. \tag{5}$$

Доказательство. Формула (5) находится через условные вероятности с учетом равновозможности получения по алгоритму теоремы 1 из предыдущего последующих кодов Лемера перестановок, генерируемых на основе этого алгоритма. Так как справедливо равенство $\sum_{\pi \in P_n^{(m)}} \Pr(\pi) = 1$, то выражение (5) задает распределение вероятностей на множестве перестановок $P_n^{(m)}$. *Доказательство закончено*.

Из теоремы 2 вытекает, что только при $m=1$ распределение вероятностей (5) является равномерным. Также равномерное распределение вероятностей несложно определить на множестве всех перестановок степени *n*, которые не описываются теоремой 2.

Также для рассматриваемого случая рассмотрим $T(q)$-модель, состоящую из таблиц $T_n^{(m)}(q)$, где $0<q\le 1$, а элементами таблиц $T_n^{(m)}(q)$ служат $q^{\rho(\nu)}$, где $\rho(\nu)=\sum_{i=1}^{n}(\nu_i-1)$, $\nu\in L_n^{(m)}$. Производящие многочлены таблиц $T_n^{(m)}(q)$ задаются выражением $H_n^{(m)}(q)=\sum_{\nu\in L_n^{(m)}}q^{\rho(\nu)}$, причем $H_n^{(m)}(1)=U_n^{(m)}(1)$.

Простую взаимосвязь между *q*-многочленами, вводимыми с помощью инверсий перестановок $\pi\in P_n^{(m)}$, и многочленами $H_n^{(m)}(q)$ устанавливает равенство $\mathrm{inv}(\pi)+\rho(\nu)=\binom{n}{2}$, в котором $\nu\in L_n^{(m)}$ код Лемера перестановки $\pi=\pi_1\ldots\pi_n\in P_n^{(m)}$, а $\mathrm{inv}(\pi)=\#\{(i,j):\pi_i>\pi_j,\ 0\le i<j\le n\}$ – число ее инверсий [2].

Для этой $T(q)$-модели комбинация *q*-аналогов соотношений (1) и (4) приводит к рекуррентной формуле для многочленов $H_n^{(m)}(q)$

$$H_0^{(m)}(q)=H_1^{(m)}(q)=1,\ \ H_n^{(m)}(q)=\sum_{i=0}^{n-1}q^i H_i^{(m)}(q)H_{n-i-1}^{(m)}(q),\quad 2\le n\le m;$$
$$H_n^{(m)}(q)=\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}(-1)^{k-1}q^{k(k-1)}\binom{m-k+2}{k}_q H_{n-k}^{(m)}(q),\quad n>m. \tag{6}$$

В выражении (6) для *q*-аналогов биноминальных коэффициентов (многочленов Гаусса), подробно рассматриваемых в [4], используется следующее обозначение:

$$\binom{m}{k}_q=\frac{\prod_{i=1}^{m}(1-q^i)}{\prod_{i=1}^{k}(1-q^i)\prod_{i=1}^{m-k}(1-q^i)}.$$

Теперь перейдем к заданию и изучению второго интерполяционного класса числовых последовательностей.

2. Интерполяция числовых последовательностей между 2^{n-1} и B_n

Аналогично вышеприведенному исследованию класс целочисленных последовательностей, осуществляющий при $n\in\mathbf{N}$ интерполяцию между последовательностью степеней 2^{n-1} и последовательностью чисел Белла B_n, строится на базе соответствующего однопараметрического класса *T*-моделей по методике статьи [2].

Этот класс определяется тройкой $(S^{(m)},\ \theta_m,\ T_1^{(m)})$, и при фиксированном значении параметра $m\in\mathbf{N}$ каждая таблица *T*-модели с номером $n\in\mathbf{N}$ также определяется рекурсивным выражением $T_{n+1}^{(m)}=\theta_m(T_n^{(m)})$, причем для этого используется алфавит $S^{(m)}=\{2,\ldots,m+1\}$, отображение $\theta_m: s\to s^{s-1}(\min(m,s)+1)$ символа $s\in S^{(m)}$ в строку символов $\theta_m(s)$ и начальная таблица $T_1^{(m)}=(2)$.

В этом случае для преобразования последовательности таблиц $T_n^{(m)}$ в числовую последовательность используем производящие многочлены

$$U_n^{(m)}(t)=\sum_{s\in T_n^{(m)}}t^{s-1}=\sum_{k=1}^{n}U_{n,k}^{(m)}t^k, \tag{7}$$

а значения $U_n^{(m)}(1)$ определяют искомые числа.

По описанной T-модели несложно установить рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов $U_{n,k}^{(m)}$ многочленов (7)

$$\begin{aligned}
&U_{1,1}^{(m)} = 1, \quad U_{n,k}^{(m)} = kU_{n-1,k}^{(m)} + U_{n-1,k-1}^{(m)}, \ 1 \le k \le n, \quad 2 \le n \le m;\\
&U_{n,k}^{(m)} = kU_{n-1,k}^{(m)} + U_{n-1,k-1}^{(m)}, \ 1 \le k \le m-1, \quad U_{n,m}^{(m)} = (m+1)U_{n-1,m}^{(m)} + U_{n-1,m-1}^{(m)}, \quad n > m;\\
&U_{n,k}^{(m)} = 0, \ m+1 \le k \le n, \quad n > m.
\end{aligned} \tag{8}$$

Применение формул (7) и (8) позволяет записать числа $U_n^{(m)}(1)$ в компактной форме:

$$U_n^{(m)}(1) = \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ {n \atop k} \right\}, \tag{9}$$

так как числа Стирлинга второго рода удовлетворяют простому рекуррентному соотношению [3]

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}, \tag{10}$$

что позволяет интерпретировать числа (9) как количество разбиений множества $\{1,2,\ldots,n\}$ не более чем на $m+1$ блоков.

При $m = 1,2,3,4,5,\ldots$ последовательности чисел, вычисляемые по формуле (9), принимают вид:

$$\begin{cases}
1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ 2048,\ 4096,\ \ldots\ [10, A000079];\\
1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 41,\ 122,\ 365,\ 1094,\ 3281,\ 9842,\ 29525,\ 88574,\ \ldots\ [10, A007051];\\
1,\ 2,\ 5,\ 15,\ 51,\ 187,\ 715,\ 2795,\ 11051,\ 43947,\ 175275,\ \ldots\ [10, A007581];\\
1,\ 2,\ 5,\ 15,\ 52,\ 202,\ 855,\ 3845,\ 18002,\ 86472,\ 422005,\ \ldots\ [10, A056272];\\
1,\ 2,\ 5,\ 15,\ 52,\ 203,\ 876,\ 4111,\ 20648,\ 109299,\ 601492,\ \ldots\ [10, A056273];\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{cases} \tag{11}$$

а для $m = 1,2,\ldots,15$ различные сведения о них содержатся в статьях [10].

Так как при $m \to \infty$ и $n \in \mathbf{N}$ формула (9) задает последовательность чисел Белла $B_n = U_n^{(\infty)}(1)$, то класс последовательностей (11) осуществляет интерполяцию между последовательностью 2^{n-1} и последовательностью B_n.

Определение 1 позволяет сопоставить каждому числу (9) множество перестановок $P_n^{(m)}$ символов $\{1,2,\ldots,n\}$ такое, что $\left|P_n^{(m)}\right| = \left|L_n^{(m)}\right| = U_n^{(m)}(1)$, а для рассматриваемого в этом разделе класса T-моделей $(S^{(m)}, \theta_m, T_1^{(m)})$ имеется простой алгоритм генерации множеств номеров $L_n^{(m)}$ элементов таблиц $T_n^{(m)}$.

Теорема 3. Пусть $\nu = \nu_1 \ldots \nu_n \in L_n^{(m)}$ и $\mu = \max(\nu_1,\ldots,\nu_n)$. Тогда множество $L_{n+1}^{(m)}$ при $n \in \mathbf{N}$ аналогично теореме 1 формируется по правилу: каждому $\nu \in L_n^{(m)}$ отвечают только коды Лемера $\nu 1,\ \nu 2,\ \ldots,\ \nu(\min(m,\mu)+1) \in L_{n+1}^{(m)}$.

Доказательство теоремы 3 также проводится методом математической индукции, а описанный в это теореме алгоритм позволяет легко генерировать множества перестановок $P_n^{(m)}$ с использованием алгоритма преобразования кодов Лемера $L_n^{(m)}$ в перестановки $P_n^{(m)}$.

При фиксированном $m \in \mathbf{N}$ теорема 3 позволяет с помощью кодов Лемера $L_n^{(m)}$ найти соответствующее распределение вероятностей на множествах перестановок $P_n^{(m)}$.

Теорема 4. Пусть перестановка $\pi = \pi_1 \ldots \pi_n \in P_n^{(m)}$ имеет код Лемера $\nu = \nu_1 \ldots \nu_n \in L_n^{(m)}$, полученный по теореме 3, а $\mu_i = \max(\nu_1, \ldots \nu_i)$, $i = 1,2,\ldots,n-1$. Тогда распределение вероятностей на множестве перестановок $P_n^{(m)}$ можно аналогично теореме 2 определить выражением:

$$\Pr(\pi) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\min(m, \mu_i) + 1}, \quad \pi \in P_n^{(m)}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{12}$$

Доказательство. Формула (12) находится через условные вероятности с учетом равновозможности получения по алгоритму теоремы 3 из предыдущего последующих кодов Лемера перестановок, генерируемых на основе этого алгоритма. Так как справедливо равенство $\sum_{\pi \in P_n^{(m)}} \Pr(\pi) = 1,$ то выражение (12) задает распределение вероятностей на множестве перестановок $P_n^{(m)}$. *Доказательство закончено*.

По теореме 3 при $m \to \infty$ определяется множество номеров $L_n^{(\infty)}$, совпадающее с множеством слов ограниченного роста (*RG*-слов) [8, 9].

Поэтому множества $L_n^{(m)}$ при $m \in \mathbf{N}$ можно трактовать как *m*-обобщения множеств *RG*-слов.

Пусть $\Pi_n^{(m)}$ обозначает множество всех разбиений множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ не более чем на $m+1$ блоков. Так как по формуле (9) имеем равенство $\left|\Pi_n^{(m)}\right| = \left|L_n^{(m)}\right|,$ то аналогично статье [6] устанавливается биекция между $\Pi_n^{(m)}$ и $L_n^{(m)}$.

Для этого каждому номеру $\nu = \nu_1 \ldots \nu_n \in L_n^{(m)}$ ставится в соответствие упорядоченное разбиение из $\Pi_n^{(m)}$ по следующему правилу: в первый блок этого разбиения включаются в порядке возрастания все индексы символов $\nu_i = 1,$ во второй – все индексы символов $\nu_j = 2$ и т.д.

Например, слову $\nu = 1121323 \in L_7^{(4)}$ ставится в соответствие разбиение $\{1, 2, 4\}\{3, 6\}\{5, 7\} \in \Pi_7^{(4)}$, а слову $\nu = 1234254 \in L_7^{(4)}$ – $\{1\}\{2, 5\}\{3\}\{4, 7\}\{6\} \in \Pi_7^{(4)}$.

Алгоритм преобразования кода Лемера $\nu = \nu_1 \ldots \nu_n \in L_n^{(m)}$ в перестановку $\pi = \pi_1 \ldots \pi_n \in P_n^{(m)}$ также определяет биекцию между $\Pi_n^{(m)}$ и $P_n^{(m)}$, что позволяет использовать соотношение (12) для задания распределения вероятностей также и на множестве разбиений $\Pi_n^{(m)}$.

Так как *q*-аналогом рекуррентного соотношения (10) для *q*-чисел Стирлинга второго рода служит выражение [6, 9]:

$$\left\{ {n \atop k} \right\}_q = \binom{k}{1}_q \left\{ {n-1 \atop k} \right\}_q + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}_q,$$

то использование для рассматриваемого случая $T(q)$-модели приводит к формуле для многочленов $H_n^{(m)}(q)$

$$H_n^{(m)}(q) = \sum_{k=1}^{m+1} q^{\binom{k}{2}} \left\{ {n \atop k} \right\}_q,$$

являющейся *q*-аналогом соотношения (9).

Следует отметить, что ряд доказательств в работах [6, 8, 9] могут быть улучшены за счет применения алгоритмического подхода, основанного на использовании *T*-модели, кодов Лемера перестановок и их упорядочения как номеров элементов *T*-модели [1, 2], а также соответствующей $T(q)$-модели.

Заключение

Применение методики интерполяции числовых последовательностей, разработанной в [2] и основанной на использовании подходящих *T*-моделей, позволило построить два простых однопараметрических интерполяционных класса таких последовательностей.

Основной особенностью этих классов является наличие простых алгоритмов, описанных в теоремах 1 и 3 и служащих для построения при фиксированном значении параметра соответствующих множеств перестановок, интерпретирующих элементы этих классов. Эти алгоритмы и их аналоги, в частности, могут быть использованы в информатике для генерации разнообразных массивов слов.

На базе этих алгоритмов в теоремах 2 и 4 также на соответствующих множествах перестановок получены распределения вероятностей, которые могут найти применение для исследования различных статистик на этих множествах перестановок.

В разделе 2 для элементов рассматриваемого однопараметрического класса последовательностей при фиксированном значении параметра при $n \in \mathbf{N}$ построена интерпретация его элементов в виде соответствующих множеств упорядоченных разбиений множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Для этих множеств также найдены распределения вероятностей.

Полученные в статье результаты могут найти применение в различных прикладных областях.

Список литературы

1. *Бондаренко Л.Н.* Систематизация комбинаторных последовательностей с использованием *T*-моделей и *T*-диаграмм // Образовательные ресурсы и технологии. – 2020. – №2 (31). – С. 58–68.
2. *Бондаренко Л.Н.* Применение *T*-моделей к интерполированию целочисленных последовательностей // Образовательные ресурсы и технологии. – 2021. – №3 (36). – С. 97–105.
3. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики / перевод с английского. – Москва: Мир, 1998. – 703 с.
4. *Эндрюс Г.* Теория разбиений / перевод с английского. – Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982 – 256 с.
5. *Barcucci E., Del Lungo A., Pergola E., Pinzani R.* Permutations avoiding an increasing number of length – increasing forbidden subsequences // Discrete mathematics and theoretical computer science. – 2000. – No. 4. – P. 31–44.
6. *Cai Y., Readdy M.A.* *q*-Stirling numbers: A new view // Advances in applied mathematics. – 2017. – Vol. 86. – P. 50–80.
7. *Labelle G., Leroux P., Pergola E., Pinzani R.* Stirling numbers interpolation using permutations with forbidden subsequences // Discrete mathematics. – 2002. – No. 1–3. – Vol. 246. – P. 177–195.
8. *Milne S.* Restricted growth functions and incidence relations of the lattice of partitions of an *n*-set // Journal advances in mathematics. – 1977. – Vol. 26. – P. 290–305.
9. *Milne S.* Restricted growth functions, rank row matchings of partition lattices, and *q*-Stirling numbers // Journal advances in mathematics. – 1982. – Vol. 43. – P. 173–196.
10. *Sloane N.J.A.* The on-line encyclopedia of integer sequences. – 2021. – http://oeis.org.
11. *Stanley R.P.* Catalan numbers. – New York: Cambridge university press. – 2015. – 215 p.

References

1. *Bondarenko L.N.* Sistematizaciya kombinatornyh posledovatel’nostej s ispol’zovaniem *T*-modelej i *T*-diagramm // Obrazovatel’nye resursy i tekhnologii. (Elektronnyj nauchnyj zhurnal). – 2020. – №2 (31). – S. 58–68.
2. *Bondarenko L.N.* Primenenie T-modelej k interpolirovaniyu celochislennyh posledovatel’nostej // Obrazovatel’nye resursy i tekhnologii. (Elektronnyj nauchnyj zhurnal). – 2021. – №3 (36). – S. 97–105.
3. *Grekhem R., Knut D., Patashnik O.* Konkretnaya matematika. Osnovanie informatiki / perevod s anglijskogo. – Moskva: Mir, 1998. – 703 s.
4. *Endryus G.* Teoriya razbienij / perevod s anglijskogo. – Moskva: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1982 – 256 s.
5. *Barcucci E.,* Del Lungo A., Pergola E., Pinzani R. Permutations avoiding an increasing number of length – increasing forbidden subsequences // Discrete mathematics and theoretical computer science. – 2000. – No. 4. – P. 31–44.
6. *Cai Y., Readdy M.A.* *q*-Stirling numbers: A new view // Advances in applied mathematics. – 2017. – Vol. 86. – P. 50–80.
7. *Labelle G., Leroux P., Pergola E., Pinzani R.* Stirling numbers interpolation using permutations with forbidden subsequences // Discrete mathematics. – 2002. – No. 1–3. – Vol. 246. – P. 177–195.
8. *Milne S.* Restricted growth functions and incidence relations of the lattice of partitions of an *n*-set // Journal advances in mathematics. – 1977. – Vol. 26. – P. 290–305.

9. *Milne S.* Restricted growth functions, rank row matchings of partition lattices, and *q*-Stirling numbers // Journal advances in mathematics. – 1982. – Vol. 43. – P. 173–196.
10. *Sloane N.J.A.* The on-line encyclopedia of integer sequences. – 2021. – http://oeis.org.
11. *Stanley R.P.* Catalan numbers. – New York: Cambridge university press. – 2015. – 215 p.