

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАЯТНИКОВЫХ ВОЛН В БЛОЧНЫХ СРЕДАХ

*Мария Александровна Похабова, аспирант*  
Тел. 8 923 343 8959, e-mail: Pokhabova-mariya@mail.ru  
Институт вычислительного моделирования СО РАН  
<http://icm.krasn.ru>

*Разработаны вычислительные алгоритмы для исследования распространения волн напряжений и деформаций в слоистых средах, состоящих из большого количества деформируемых блоков с упругими прослойками. Приведены результаты расчетов, демонстрирующие особенности распространения плоских волн в блочных средах.*

*Ключевые слова:* динамика, упругость, блочная среда, податливая прослойка, математическое моделирование.

До недавнего времени в геомеханике и геофизике широкое применение имела теория деформирования породного массива как однородной среды. Суть этой теории уже хорошо описана в линейной теории распространения упругих волн.



**М.А. Похабова**

Серьезный повод к пересмотру сложившихся взглядов дают результаты последних двух десятилетий, свидетельствующие о необходимости учета в математических моделях блочного строения горных пород. Большое влияние на развитие этой теории оказала концепция М.А. Садовского, согласно которой, горный массив представляет собой систему вложенных друг в друга блоков. Блоки связаны друг с другом прослойками с существенно более слабыми механическими свойствами [1].

Из-за ослабления механического контакта между блоками, горная порода приобретет ослабленную микроструктуру, а это сказывается на процессе распространения волн в такой среде.

Эксплуатация угольных шахт показывает, что одной из главных проблем на сегодняшний день остается проблема внезапного обрушения кровли шахт. Поэтому изучению закономерностей деформирования и разрушению горных пород уделяется огромное внимание.

Мотивацией к настоящему исследованию частично послужили экспериментальные и теоретические результаты, полученные в работах [3;4], в частности, выявление волн маятникового типа, ответственных за передачу колебаний системе массивных блоков и податливых прослоек.

Цель настоящей статьи – исследовать особенности формирования упругих волн в блочных средах на основе математических моделей, учитывающих сложные реологические свойства материала прослоек, и при их импульсном возбуждении проверить справедливость гипотезы о возможности существования волн маятникового типа.

### Уравнения одномерных движений слоистой среды

Моделирование распространения волн в блочном массиве при ударно-взрывном воздействии является сложной трехмерной задачей. Поэтому для первоначального анализа существования и особенностей распространения волн маятникового типа была рассмотрена одномерная задача. Для описания среды введем условную схему иерархического строения горной породы, которая в идеальном случае представляет собой вложенную слоистую структуру с инвариантным отношением характерных масштабов блоков и прослоек. Рассмотрим сначала отдельный фрагмент этой структуры в одно-

мерном приближении –чередующуюся систему из  $n$  упругих слоев толщины  $h$  и упругих прослоек толщины  $\delta$ .

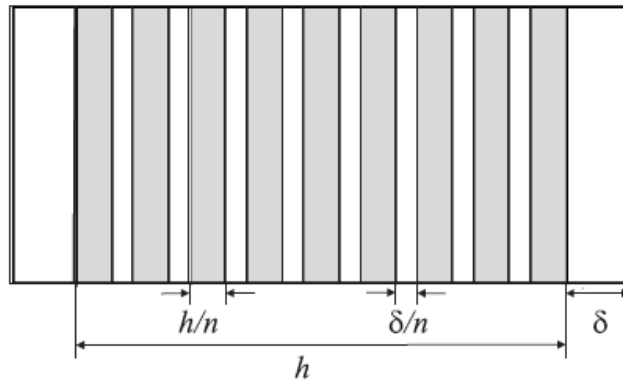


Рис. 1. Иерархическая слоистая структура горной породы

Пусть  $\rho$  и  $\rho_0$ ,  $c$  и  $c_0$ ,  $a = \frac{1}{\rho c^2}$  и  $a_0 = \frac{1}{\rho_0 c_0^2}$  – плотности, скорости звука и

упругие податливости материалов слоя и прослойки соответственно. Внутри слоя с номером  $k$  выполняются одномерные уравнения теории упругости

$$\rho \frac{\partial v^k}{\partial t} = \frac{\partial \sigma^k}{\partial x}, \quad a \frac{\partial \sigma^k}{\partial t} = \frac{\partial v^k}{\partial x},$$

записанные относительно продольной скорости  $v^k$  в направлении оси  $x$  ( $x$  меняется от 0 до  $h$  в пределах каждого слоя) и нормального напряжения  $\sigma^k$ . Поведение материала прослойки описывается с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\rho_0 \frac{d}{dt} \frac{v^{k+1} - v^k}{2} = \frac{\sigma^{k+1} - \sigma^k}{\delta}, \quad a_0 \frac{d}{dt} \frac{\partial \sigma^{k+1} + \sigma^k}{2} = \frac{v^{k+1} - v^k}{\delta},$$

в которую входят граничные значения введенных выше скоростей и напряжений, левые для  $(k + 1)$ -го слоя и правые для  $k$ -го слоя.

К описанным выше уравнениям добавляются начальные условия  $v^k = \sigma^k = 0$ , ( $k = 1, \dots, n$ ) и граничные условия следующего вида:  $\sigma^1(0, t) = -p(t)$ ,  $v^n(h, t) = 0$ , где  $p(t)$  – заданное внешнее давление.

Термодинамическая согласованность постановки краевой задачи может быть доказана методом интегральных оценок, вытекающих из закона сохранения энергии:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^n \int_0^h (\rho |v^k(x, t)|^2 + \alpha |\sigma^k(x, t)|^2) dx + \\ & + \frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \rho_0 \left| \frac{v^{k+1}(0, t) + v^k(h, t)}{2} \right|^2 + \alpha_0 \left| \frac{\sigma^{k+1}(0, t) + \sigma^k(h, t)}{2} \right|^2 \right) = \\ & = \sigma^n(h, t) v^n - \sigma^1(0, t) v^1(0, t) \end{aligned}$$

Численное решение задачи строилось на основе схемы Иванова [2]. Схема в пределах слоя не обладает искусственной диссипацией энергии. Идея схемы Иванова состоит в том, чтобы закон сохранения энергии выполнялся на дискретном уровне.

### Задача о прохождении и отражении волны

Проверка вычислительных алгоритмов и программ проводилась путем сравнения результатов расчетов с точным решением задачи об отражении и прохождении моно-

хроматической волны через прослойку между двумя протяженными блоками, занимающими левое и правое полупространства (рис. 2).

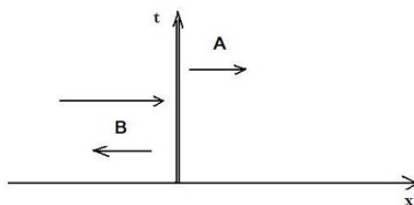


Рис. 2. Задача об отражении и прохождении волны

В этой задаче неизвестными являются зависящие от частоты волны  $\omega$  коэффициенты прохождения  $A(\omega)$  и отражения  $B(\omega)$ . Решение при  $x < 0$  представляет собой суперпозицию падающей и отраженной волн:

$$v = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + Bf\left(t + \frac{x}{c}\right), \sigma = -zf\left(t - \frac{x}{c}\right) + zBf\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

где  $f(t) = f_0 e^{i\omega t}$  - функция, определяющая форму падающей волны. При  $x > 0$  решение соответствует прошедшей волне:

$$v = Af\left(t - \frac{x}{c}\right), \sigma = -zAf\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

В случае упругой прослойки при  $x = 0$  выполняются уравнения:

$$\rho_0 \delta (1 + A + B) \frac{df}{dt} = 2z(1 - A - B)f, \alpha_0 \delta z (1 + A - B) \frac{df}{dt} = 2(1 - A + B)f.$$

Из которых следует, что  $A = \frac{1 - \alpha\beta}{(1 + \alpha)(1 + \beta)}$ ,  $B = \frac{\beta - \alpha}{(1 + \alpha)(1 + \beta)}$ , где  $\alpha = \frac{i\omega\delta z_0}{2c_0 z}$ ,

$\beta = \frac{i\omega\delta z}{2c_0 z_0}$ . Полученные формулы показывают, что при одинаковых импедансах  $z$  и

$z_0$  выполняются равенства  $|A| = 1$  и  $B = 0$ . В этом случае падающая волна проходит через прослойку беспрепятственно и без отражений, что является простейшим тестом правильности работы алгоритма и программы.

### Численные результаты расчетов

Для проверки работоспособности алгоритмов и программ выполнены расчеты плоских продольных волн, вызванных кратковременными и длительными  $\Lambda$ -образными импульсными воздействиями на границе слоистой среды с упругими прослойками.

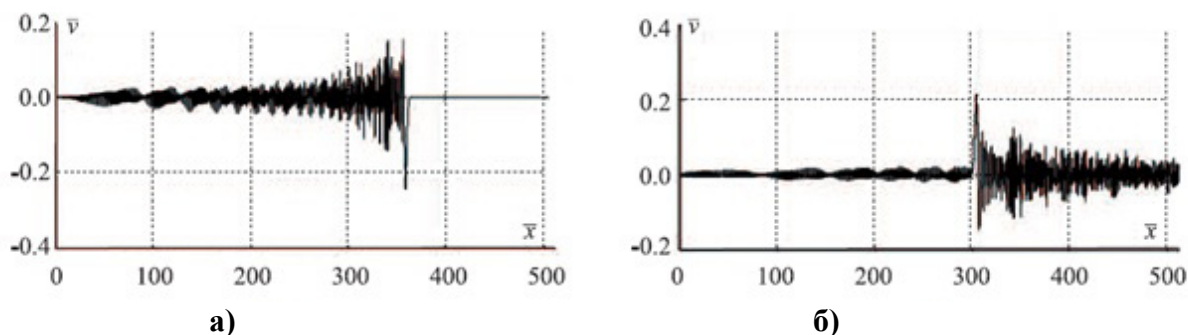


Рис. 3. Распределение скорости за фронтом падающей (а) и отражающей (б) волн, вызванных в слоистой среде воздействием короткого импульса

На рис. 3 и рис. 4 приведены зависимости безразмерной скорости частиц  $\bar{v}$  от пространственной координаты, отнесенной к толщине слоя  $h$ , в задаче о действии  $\Lambda$ -образного импульса. Импульс единичной амплитуды действовал на левой границе расчетной области, правая ее граница считалась неподвижной. Рис. 3 соответствует дли-

тельности импульса, равной времени прохода упругой волны через один слой, рис. 4 – в два с половиной раза большей длительности. На рисунках 3а и 4а изображены профили скоростей на момент прохождения падающей волны примерно 370 слоев. На рисунках 3б и 4б отраженная волна проходит в обратном направлении примерно 200 слоев.

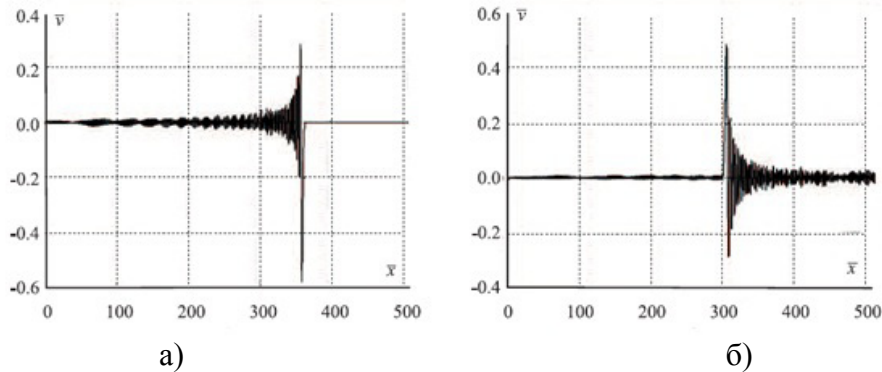


Рис. 4. Распределение скорости за фронтом падающей (а) и отражающей (б) волн, вызванных в слоистой среде воздействием длительного импульса

Представленные результаты демонстрируют качественное отличие волновой картины в слоистых средах по сравнению с однородной средой. Это отличие на начальном этапе заключается в появлении отраженных от прослоек волн – характерных осцилляций за фронтом волны нагружения по мере ее прохождения через границы раздела. Со временем, после многократного переотражения, за фронтом головной волны возникает стационарная волна, так называемая «маятниковая».

Из сопоставления рисунков 3 и 4 видно, что с увеличением длительности импульса амплитуда головной волны увеличивается, возрастая до единицы при дальнейшем увеличении длительности, а амплитуда осцилляций за фронтом убывает и стремится к нулю. Таким образом, обнаружить ослабленную микроструктуру слоистой или блочной среды можно только с помощью коротких волн.

В процессе тестирования алгоритмов проводились аналогичные расчеты для упругих прослоек, импеданс которых совпадал с импедансом слоев. В этом случае волна, вызванная импульсным воздействием на границе, проходит через прослойки как в однородной среде.

Большая серия методических расчетов позволила увидеть некоторые особенности распространения низкочастотных маятниковых волн. На рис. 5 представлена зависимость частоты волны от толщины прослойки при различных параметрах блоков. В данном случае рассматривались блоки с толщиной слоя 1 см, 3 см и 5 см соответственно. Как видно из рисунка 5, чем больше толщина прослойки, тем меньше частота маятниковой волны. Также частота волны зависит и от толщины самого блока. Чем больше сам блок, тем меньше частота волны.

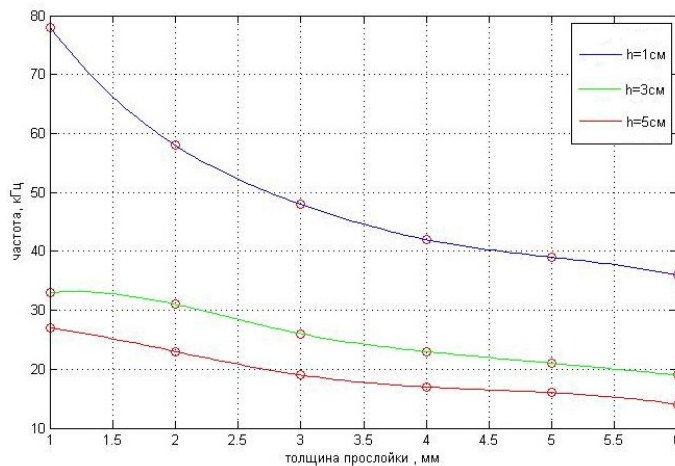


Рис. 5. Зависимость частоты волны от толщины прослойки

В следующих расчетах проверялась гипотеза о том, что частота волны зависит от импеданса прослойки. В данном численном эксперименте материал в слое напоминает горную породу, в прослойках материал приближен к резине. Для прослойки были взяты следующие параметры:  $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$ , скорость звука  $c = 1500 \text{ м/с}$ . Эксперимент состоял в том, что для начала нашли частоты волны для данных параметров прослойки. На рис. 6 эти результаты соответствуют I линии. Затем провели два расчета, таким образом, что импеданс в прослойки не менялся, а параметры скорости и плотности были следующие:  $\rho = 400 \text{ кг/м}^3$ ,  $c = 4500 \text{ м/с}$  и  $\rho = 3600 \text{ кг/м}^3$ ,  $c = 500 \text{ м/с}$  – II и III линии соответственно. Из графика 6, полученного в расчетах для этих параметров скоростей и плотностей, можно констатировать, что частота волны зависит от скорости

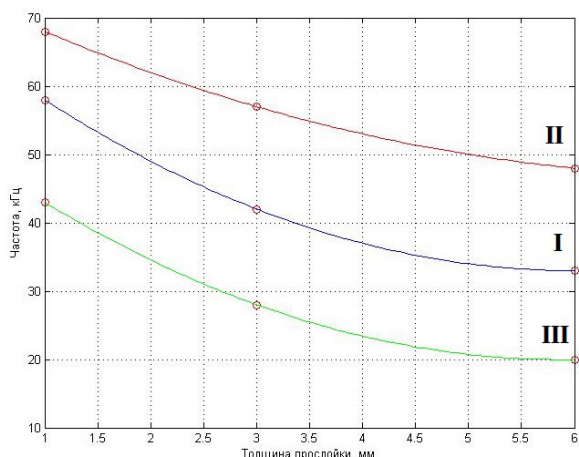


Рис. 6. Зависимость частоты волны от толщины прослойки для разных импедансов прослойки

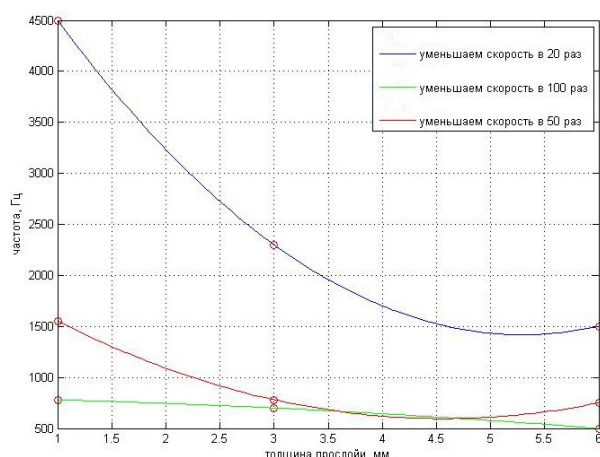


Рис. 7. Зависимость частоты от толщины прослойки для разных скоростей звука

звuka в выбранном материале. Чем меньше скорость звука в материале прослойки, тем меньше частота волны.

Доказательством этого факта, также может служить следующий численный эксперимент, представленный на рис. 7, где проводились расчеты для разных скоростей звука в материале.

### Заключение

Автор считает, что в данной работе новыми являются следующие положения и результаты: построена математическая модель плоского деформированного состояния блочной среды с податливыми прослойками, разработан алгоритм численной реализации модели на многопроцессорных вычислительных системах кластерной архитектуры, а также полученные на основе предложенной модели результаты анализа распространения волн напряжений и деформаций в слоистых и блочных средах.

### Литература

1. Садовский М.А. Естественная кусковатость горной породы // Докл. АН СССР. 1979. 247. № 4. С. 829-831.
2. Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. 352 с.
3. Александрова Н.И., Черников А.Г., Шер Е.Н. Экспериментальная проверка одномерной расчетной модели распространения волн в блочной среде // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 2005. № 3. С. 46-55.
4. Александрова Н.И., Шер Е.Н., Черников А.Г. Влияние вязкости прослоек на распространение низкочастотных маятниковых волн в блочных иерархических средах // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 2008. № 3. С.3-13.

5. Сарайкин В.А. Учет упругих свойств блоков в низкочастотной составляющей волны возмущений, распространяющейся в двумерной среде // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 2009. № 3. С. 9-24.
6. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
7. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
8. Садовский В.М., Садовская О.В., Варыгина М.П. Численное моделирование пространственных волновых движений в моментных средах // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. Т. 2. № 4. С. 111-121.

### **Numerical modeling of pendulum waves in a blocky medium**

*Maria Alexandrovna Pokhabova, Graduate Student, Institute of computational modeling SB RAS*

*The computational algorithms for study of propagation of stress waves and strain in layered media, consisting of a large number of deformable blocks with elastic layers are developed. Numerical results demonstrate the features of plane wave propagation in a blocky media.*

*Keywords – dynamics, elasticity, block medium, compliant interlayer, mathematic modeling.*

УДК 519.688

### **АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА, УЧИТЫВАЮЩИХ МОМЕНТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ**

*Ирина Владимировна Смолехо, аспирант*

*Тел. 8 902 991 38 37, e-mail: irina\_smolekho@mail.ru*

*Институт вычислительного моделирования СО РАН*

*<http://icm.krasn.ru>*

*Оксана Викторовна Садовская, к.ф.-м.н, с.н.с.*

*Тел. 8 391 290 74 65, e-mail: o\_sadov@icm.krasn.ru*

*Институт вычислительного моделирования СО РАН*

*<http://icm.krasn.ru>*

*На основе математической модели жидкого кристалла в акустическом приближении получена система двух уравнений второго порядка для касательного напряжения и угловой скорости. Разработан алгоритм численного решения краевых задач, который реализован в виде параллельной программы на языке Си по технологии.*

*Ключевые слова: жидкий кристалл, моментная среда, динамика, конечно-разностная схема, параллельный вычислительный алгоритм, технология CUDA.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке  
РФФИ (проект № 14-01-00130)*



**О.В. Садовская**

Жидкие кристаллы (мезоморфные материалы) являются уникальными веществами благодаря необычному сочетанию анизотропных свойств, присущих кристаллам, и текучести, свойственной жидкостям. Жидкокристаллическое состояние вещества реализуется в определенном диапазоне температур. Подвижность молекул жидких кристаллов позволяет за счет слабых внешних воздействий изменять их ориентацию и таким образом управлять оптическими свойствами.

Впервые образование новой, необычной (жидкокристаллической) фазы было замечено австрийским ботаником Ф. Рейнитцером в 1888 году, изучавшим роль холестерина в растении-