

УДК 004.02

## МЕТОДИКА РАСЧЕТА ОРИЕНТАЦИИ ЗЕРКАЛА ГЕЛИОСТАТА НА ОСНОВЕ ВЕКТОРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

**Кубова Разия Махмудовна<sup>1</sup>,**  
канд. физ.-мат. наук, доцент,  
e-mail: rkubova@mgutm.ru,

**Кубов Владимир Ильич<sup>1</sup>,**  
канд. физ.-мат. наук, доцент,  
e-mail: kvi@mksat.net,

<sup>1</sup>Московский государственный университет технологий и управления имени К.Г. Разумовского (ПКУ),  
г. Москва, Россия

Приводится методика представления и расчета ориентации зеркала гелиостата на основе векторных представлений направлений на Солнце и зеркало относительно неподвижной точки наблюдения. Векторное представление направлений на Солнце и на зеркало гелиостата позволяет получить достаточно наглядное и простое в алгоритмической реализации описание ориентации зеркала. Операции с векторами существенно упрощаются при использовании проекции в декартовых координатах. В дополнение к выражениям для векторных преобразований направлений дается сводка формул для вычисления положения Солнца в локальной системе координат в зависимости от географических координат, даты и времени. Полученные соотношения могут быть реализованы в алгоритме управления механизмом зеркала гелиостата по заданному временному графику с помощью двух независимых приводов: по азимуту и углу места. Разработанная методика расчета ориентации зеркала гелиостата на основе векторных представлений может найти применение в практических задачах контроля характеристик солнечного излучения.

**Ключевые слова:** гелиостат, положение Солнца, ориентация зеркала, солнечное излучение, векторы направлений, операции с векторами в 3D-пространстве

## METHOD OF CALCULATING THE ORIENTATION OF A HELIOSTATIC MIRROR BASED ON VECTOR REPRESENTATIONS

**Kubova R.M.<sup>1</sup>,**  
candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,  
e-mail: rkubova@mgutm.ru,

**Kubov V.I.<sup>1</sup>,**  
candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,  
e-mail: kvi@mksat.net,

<sup>1</sup>K.G. Razumovsky Moscow State University of Technologies and Management (FCU), Moscow, Russia

A technique for representing and calculating the orientation of the heliostatic mirror based on vector representations of the directions to the sun and the mirror related to a fixed observation point is presented. Vector representation of directions to the sun and the heliostatic mirror allows us to obtain a description of the mirror orientation that is quite clear and simple in algorithmic implementation of calculations. Operations with vectors are significantly simplified when using a projection in Cartesian coordinates. In addition to expressions for vector transformations of directions, a summary of formulae is given for calculating the position of the sun in a local coordinate system depending on geographic coordinates, date and time. The obtained relationships can be implemented in an algorithm for controlling the heliostatic mirror mechanism according to a given time schedule using two independent drives: azimuth and elevation. The developed method for calculating the orientation of the heliostatic mirror based on vector representations can be used in practical problems of monitoring the characteristics of solar radiation.

**Keywords:** heliostat, sun position, mirror orientation, solar radiation, direction vectors, operations with vectors in 3D space

DOI 10.21777/2500-2112-2024-3-103-109

## Введение

В ряде практических задач, использующих солнечную энергию, возникает необходимость ориентации приемника излучения (сенсора) на источник этого излучения. При этом следует учитывать и отслеживать перемещение источника излучения относительно приемника. В конкретном случае следует учитывать как суточные, так и сезонные изменения положения Солнца.

Наиболее очевидное решение – ориентация приемника в направлении на Солнце – не всегда удобно или целесообразно по техническим либо экономическим причинам. Поэтому иногда задачу решают с помощью вспомогательного зеркала. Сам приемник неподвижен, имеет фиксированную ориентацию и ориентирован на зеркало. А зеркало вращается таким образом, чтобы «солнечный зайчик» от зеркала попадал на сенсор. При этом возникает задача расчета ориентации зеркала в зависимости от положения Солнца и положения зеркала относительно приемника.

Задача расчета направления на Солнце в зависимости от координат наблюдателя (сенсора), времени суток и времени года не представляет принципиальной сложности и имеет множество вариантов решений, отличающихся только точностью и удобством применения в каждом конкретном случае [1–4]. Кроме того, имеется ряд online-калькуляторов для вычисления азимута и высоты Солнца над горизонтом, например, PlanetCalc<sup>1</sup>, SunPos<sup>2</sup>, SunCalc<sup>3</sup> и SunEarthTools<sup>4</sup> – приложений для вычисления положения Солнца относительно наблюдателя. Подобных online-калькуляторов настолько много, что даже делается оценка сравнительных рейтингов таких калькуляторов<sup>5</sup>.

Суть соответствующих вычислений сводится к тому, что с помощью некоторых приближенных, но достаточно точных соотношений задается положение Солнца в экваториальной системе координат – высота (угол места), часовой угол (широта). А затем путем трехмерного поворота вычисляется положение Солнца относительно координат (долгота, широта) точки наблюдения.

Алгоритмическая реализация подобных преобразований детально рассмотрена, например, в работах [5; 6].

Несколько сложнее обстоит вопрос с расчетом ориентации зеркала для гелиостата. В доступных источниках описания и алгоритмы таких расчетов, например в [1–4], по нашему мнению, неоправданно усложнены. В частности, приводятся достаточно громоздкие формулы матричных преобразований без каких-либо пояснений их физического и геометрического смысла. В работе [7, с. 66] приводится векторное описание решения задачи отражения от зеркала, но только для случая определения направления отражения луча по известному направлению падающего луча и известной ориентации зеркала. А нам необходимо решить несколько другую задачу – определить ориентацию зеркала по известным направлениям падающего и отраженного лучей.

Целью исследования является разработка методики и алгоритма расчета ориентации зеркала на основе векторных представлений направлений на Солнце и зеркала относительно неподвижной точки наблюдения (сенсора).

## 1. Расчет ориентации зеркала гелиостата

Рассмотрим схему взаимной ориентации направлений на Солнце и зеркало относительно точки наблюдения (рисунок 1).

На схеме рисунка 1 обозначено положение Солнца – *Sun*, в системе координат наблюдателя, где  $\varphi_S$  – азимут направления на Солнце (относительно направления на Север – *North*);  $\psi_S$  – высота Солнца над горизонтом.

Направление на зеркало – *Mirror*, характеризуется углами:  $\varphi_M$  – азимут зеркала;  $\psi_M$  – угол места зеркала. Угол места зеркала определяется его высотой – *H* и расстоянием до наблюдателя – *R*, в частности,  $\tan(\psi_M) = H / R$ .

<sup>1</sup> Planetcalc. – URL: <https://planetcalc.ru/320/> (дата обращения: 10.07.2024). – Текст: электронный.

<sup>2</sup> Sunpos. – URL: <https://sunpos.ru/> (дата обращения: 10.07.2024). – Текст: электронный.

<sup>3</sup> Suncalc. – URL: <https://www.suncalc.org/> (дата обращения: 10.07.2024). – Текст: электронный.

<sup>4</sup> Sunearthtools. – URL: [https://www.sunearthtools.com/dp/tools/pos\\_sun.php](https://www.sunearthtools.com/dp/tools/pos_sun.php) (дата обращения: 10.07.2024). – Текст: электронный.

<sup>5</sup> Similarweb. – URL: <https://www.similarweb.com/ru/website/suncalc.org/competitors/> (дата обращения: 10.07.2024). – Текст: электронный.

Символом  $Sun'$  на схеме обозначено положение Солнца относительно зеркала. С достаточной для практических целей точностью можно не учитывать параллакс Солнца относительно наблюдателя и зеркала (можно считать, что Солнце находится на бесконечном расстоянии), т.е.  $\psi'_S = \psi_S$  и  $\varphi'_S = \varphi_S$ . Аналогичным образом будем задавать направление ориентации нормали к поверхности зеркала (тангенциальной составляющей):  $\varphi_T$  – азимут нормали;  $\psi_T$  – угол места.

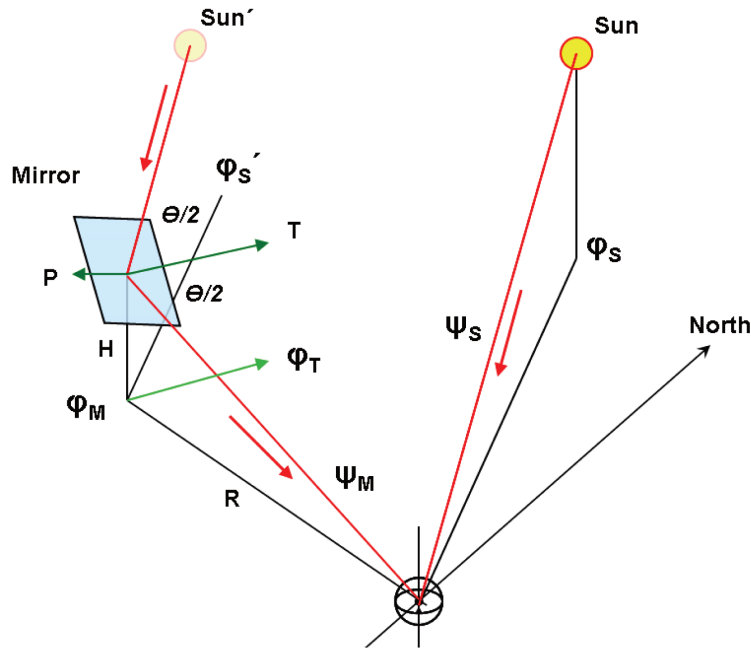


Рисунок 1 – Ориентация Солнца и зеркала относительно наблюдателя

Обозначим угол между направлениями на Солнце и на наблюдателя символом  $\theta$ . Нормаль к зеркалу делит этот угол пополам. Очевидным образом, относительно нормали к зеркалу угол падения (направление на Солнце) равен  $\theta/2$  и угол отражения (направление на приемник) равен  $\theta/2$ , т.е. они равны.

### 1.1. Векторное представление ориентации зеркала

Сопоставляя направлению на Солнце вектор  $\vec{S}$ , на зеркало относительно наблюдателя – вектор  $\vec{M}$ , и ориентации нормали зеркала – вектор  $\vec{T}$ , удобнее будет рассматривать схему отражения в плоскости углов падения и отражения, что показано на рисунке 2.

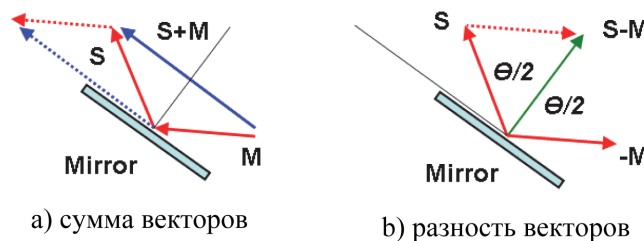


Рисунок 2 – Схема отражения в плоскости угла между Солнцем и приемником

На схеме рисунка 2 показана сумма и разность векторов  $\vec{S}$  и  $\vec{M}$ . При этом следует учитывать, что вектор направления  $\vec{M}$  от наблюдателя к зеркалу противоположен направлению от зеркала к на-

блюдателю. Соответственно, сумма  $\vec{P} = \vec{S} + \vec{M}$  дает направление по касательной к плоскости зеркала, а разность  $\vec{T} = \vec{S} - \vec{M}$  дает искомое направление нормали к поверхности. Заметим, что суммарный и разностный векторы не нормализованы.

Таким образом, получается достаточно прозрачное описание ориентации нормали  $\vec{T}$  поверхности зеркала через векторы направления на Солнце  $\vec{S}$  и направления на зеркало  $\vec{M}$  как их векторной разности

$$\vec{T} = \vec{S} - \vec{M}. \quad (1)$$

Соотношение (1) создает основу для построения алгоритма вычислений.

Следует отметить, что операции с векторами имеют очень простое представление в проекциях по декартовым координатам, хотя переходы от сферических координат (угол места, азимут, дальность) и обратные переходы достаточно громоздки<sup>6</sup>.

В частности, пусть у нас имеется некий единичный вектор  $\vec{A}$ . В декартовых координатах этот вектор может быть представлен в виде  $\vec{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$ , а в сферических координатах в виде  $\vec{A} = \{\varphi, \psi\}$ , где  $\vec{A}$  – единичный вектор,  $\varphi$  – азимут, и  $\psi$  – угол места. Переход от сферических координат к декартовым координатам задается выражениями:

$$A_x = \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi); \quad A_y = \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi); \quad A_z = \sin(\psi). \quad (2)$$

Обратное преобразование вектора  $\vec{A} = \{\varphi, \psi\}$  с учетом (2) задается выражениями:

$$\tan(\varphi) = A_x / A_y; \quad \tan(\psi) = A_z / \sqrt{A_x^2 + A_y^2}. \quad (3)$$

Полученные соотношения (3) могут быть реализованы в алгоритме управления механизмом зеркала гелиостата по заданному временному графику с помощью двух независимых приводов: по азимуту и углу места [8].

## 1.2. Алгоритм расчета ориентации зеркала гелиостата

1. Задать географические координаты (долгота, широта) точки размещения системы приемник излучения – зеркало гелиостата.

2. Задать дату и время.

3. По формулам (7) – (11), рассчитать направление (угол места и азимут) на Солнце  $\vec{S} = \{\varphi_S, \psi_S\}$  для заданных координат, даты и времени.

4. Задать направление (угол места и азимут) на зеркало  $\vec{M} = \{\varphi_M, \psi_M\}$ . При необходимости угол места зеркала можно вычислить через высоту и дальность его размещения согласно (4)

$$\tan(\psi_M) = H / R. \quad (4)$$

5. Вычислить декартовы проекции вектора направления на Солнце  $\vec{S} = \{S_x, S_y, S_z\}$ .

6. Вычислить декартовы проекции вектора направления на зеркало  $\vec{M} = \{M_x, M_y, M_z\}$ .

7. Вычислить проекции разности векторов направления на Солнце и на зеркало  $\vec{T}' = \vec{S} - \vec{M}$ :

$$T'_x = S_x - M_x; \quad T'_y = S_y - M_y; \quad T'_z = S_z - M_z. \quad (5)$$

8. Выполнить нормализацию вектора зеркала  $\vec{T} = \vec{T}' / |\vec{T}'|$  с учетом (5):

$$|\vec{T}'| = \sqrt{T_x'^2 + T_y'^2 + T_z'^2}; \quad \vec{T} = \left\{ T'_x / |\vec{T}'|, \quad T'_y / |\vec{T}'|, \quad T'_z / |\vec{T}'| \right\}. \quad (6)$$

<sup>6</sup> Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1984. – 832 с. – С. 51, 446.

9. Вычислить сферические координаты вектора нормали зеркала  $\vec{T} = \{\varphi_T, \psi_T\}$  с учетом (6).

Таким образом, мы вычислим искомую ориентацию зеркала гелиостата. Полученные соотношения могут быть реализованы с помощью двух независимых приводов ориентации зеркала: по азимуту –  $\varphi_T$ , и углу места –  $\psi_T$ .

## 2. Вычисление положения Солнца в локальной системе координат

В большинстве практических ситуаций для расчетов положения Солнца достаточно использовать экваториальную систему координат (долгота, широта) [6]. Для расчета ориентации зеркала гелиостата на основе векторных представлений необходимо выполнить расчеты в локальной системе координат в заданной географической точке (азимут, высота). Для этого выполняется операция преобразования (трехмерных вращений) сферической системы координат в декартову систему координат.

Ниже приведено описание обобщенного алгоритма вычисления положения Солнца в локальной системе координат.

### 2.1. Вычисление положения Солнца в экваториальной системе координат

Высота Солнца в экваториальной системе координат может быть определена приближенным уравнением [6]:

$$\varphi_{Sun} = \delta \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot (Day - Day_{Eqv}) / Year\right); \delta = 23^\circ; Day_{Eqv} = 81; Year = 365.25. \quad (7)$$

Долгота Солнца определяется временем:

$$\lambda_{Sun} = 180^\circ - 360^\circ \cdot Time. \quad (8)$$

Здесь  $Time$  – время (дробная часть даты) в формате Excel изменяется от 0 до 1 (полночь) и принимает значение 0.5 в полдень.

Для учета влияния эффектов, связанных с эллиптичностью орбиты Земли вокруг Солнца, при необходимости, вводятся поправки, достигающие в максимуме величин порядка  $\pm 4^\circ$  [6]. Соответствующая функция учитывает так называемое уравнение времени:

$$\Delta T = A_1 \cdot \cos(D) + A_2 \cdot \sin(D) + A_3 \cdot \sin(2 \cdot D) - \text{минуты времени}.$$

$$\text{Здесь } A_1 = 7.53; A_2 = 1.5; A_3 = -9.87; D = 2 \cdot \pi \cdot (Day - Day_{Eqv}) / Year; \quad (9)$$

$$\Delta \lambda = \Delta T \cdot 15 / 60 - \text{пересчет минут времени в градусы долготы}.$$

### 2.2. Преобразование координат

Вычисления декартовых координат вектора  $\vec{A}\{\varphi, \lambda\}$ :

$$A_Z = \sin \varphi; A_{XY} = \cos \varphi; A_X = A_{XY} \cdot \cos \lambda; A_Y = A_{XY} \cdot \sin \lambda, \quad (10)$$

где  $\varphi$  – географическая широта (или высота над горизонтом);

$\lambda$  – географическая долгота (или азимут от южного направления).

Обратные преобразования из декартовой в сферическую систему координат  $\vec{A}\{x, y, z\}$  выполняются следующим образом:

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2}; R_{XY} = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}; \varphi = \arctan(R_Z, R_{XY}); \lambda = -\arctan(R_Y, R_X). \quad (11)$$

Поворот вектора  $\vec{R}$  по широте на угол  $\theta$  выполняется оператором  $\vec{R}' = Rot(\vec{R}, \theta)$  по формулам:

$$R'_X = R_X \cdot \cos \theta - R_Z \cdot \sin \theta; R'_Y = R_Y; R'_Z = R_Z \cdot \sin \theta + R_X \cdot \cos \theta. \quad (12)$$

### 2.3. Алгоритм вычисления положения Солнца в локальной системе координат

1. По формулам (7), (8), (9) вычисляются координаты Солнца  $(\lambda_S, \varphi_S)$  в экваториальной системе координат.

2. По формулам (10) вычисляются декартовы координаты вектора направления в зенит  $\vec{G} = \vec{A}\{\varphi_G, \lambda_G\}$  для географических координат в точке наблюдения и вектора направления на солнце в местной, повернутой по долготе, экваториальной системе координат  $\vec{S} = \{\lambda_S, \varphi_S - \varphi_G\}$ .

3. С помощью оператора вращения – формулы (12) вычисляются декартовы координаты вектора направления на Солнце  $\vec{S}$  в повернутой системе координат –  $\vec{S}' = Rot(\vec{S}, 90^\circ - \varphi_G)$ . Поворот осуществляется по широте на угол, дополняющий широту точки до  $90^\circ$ .

4. Декартовы координаты в повернутой системе координат преобразуются в сферические координаты по формулам (11). При этом высота Солнца  $h_S = \varphi'$ , а азимут  $a_S = -\lambda'$ .

### Заключение

Векторное представление направлений на Солнце и на зеркало гелиостата позволяет получить достаточно наглядное и простое в алгоритмической реализации описание ориентации этого зеркала.

Полученные соотношения могут быть реализованы в алгоритме управления механизмом зеркала гелиостата по заданному временному графику с помощью двух независимых приводов: по азимуту и углу места.

Заметим, что с точки зрения оптимального построения системы и минимизации влияния затенения следует размещать зеркало в направлении на Север относительно приемника (Солнце сзади) и несколько ниже приемника.

Следует отметить, что за счет отражения погрешности ориентации зеркала будут удваиваться. Поэтому для уменьшения погрешности ориентации зеркала следует периодически выполнять коррекцию часов.

### Список литературы

1. Grigoriev V., Milidonis K., Blanco M. Sun tracking by heliostats with arbitrary orientation of primary and secondary axes // Solar Energy. – 2020. – Vol. 207. – P. 1384–1389. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.solener.2020.07.086> (access date: 14.09.2024). – Text: electronic.
2. Grigoriev V., Milidonis K., Blanco M., Constantinou M. Method to determine the tracking angles of heliostats // MethodsX. – 2021. – Vol. 8. – P. 101244. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.mex.2021.101244> (access date: 14.09.2024). – Text: electronic.
3. Куренков В.И., Пупков Е.А. Модели для определения ориентации солнечной батареи космического аппарата наблюдения относительно Солнца при объектовой съёмке и перенацеливании // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2023. – Т. 22, № 3. – С. 47–58. – DOI 10.18287/2541-7533-2023-22-3-47-58.
4. Bin Zhao, Xia Jiang. Mathematical Analysis on the Design of Heliostat Field // J. Biochemistry and Biophysics. – 2023. – Vol. 5, issue 1. – URL: <https://www.annexpublishers.com/articles/JBB/5102-Mathematical-Analysis.pdf> (access date: 14.09.2024). – Text: electronic.
5. Ruiz-Arias J.A., Gueymard C.A. Solar Resource for High-Concentrator Photovoltaic Applications // Green Energy and Technology. – 2005. – P. 261–302. – URL: <https://www.researchgate.net/publication/280938413> (access date: 14.09.2024). – Text: electronic.
6. Кубова Р.М., Кубов В.И. Двухкомпонентная модель инсоляции для оценок энергетической эффективности солнечных батарей: монография. – Москва: изд. ЧОУВО «МУ им. С.Ю. Витте», 2019. – 199 с. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38244156> (дата обращения: 14.09.2024). – Text: electronic.
7. Don Cross. Fundamentals of Ray Tracing. – 2013. – 101 p. – URL: [http://www.cosinekitty.com/raytrace/raytrace\\_a4.pdf](http://www.cosinekitty.com/raytrace/raytrace_a4.pdf) (access date: 14.09.2024). – Text: electronic.

8. Ахадов Ж.З., Абдурахманов А.А., Маматкосимов М.А., Кучкаров А.А., Холов Ш.Р. Оптико-геометрические и оптико-энергетические характеристики автономных солнечных установок для освещения определенного участка внутри здания // *Computational nanotechnology*. – 2021. – № 3. – С. 113–117.

#### References

1. Grigoriev V., Milidonis K., Blanco M. Sun tracking by heliostats with arbitrary orientation of primary and secondary axes // *Solar Energy*. – 2020. – Vol. 207. – P. 1384–1389. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.solener.2020.07.086> (access date: 14.09.2024). – Text: electronic.
2. Grigoriev V., Milidonis K., Blanco M., Constantinou M. Method to determine the tracking angles of heliostats // *MethodsX*. – 2021. – Vol. 8. – P. 101244. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.mex.2021.101244> (access date: 14.09.2024). – Text: electronic.
3. Kurenkov V.I., Pupkov E.A. Modeli dlya opredeleniya orientacii solnechnoj batarei kosmicheskogo apparata nablyudeniya otnositel'no Solnca pri ob'ektovoj s'yomke i perenacelivanii // *Vestnik Samarskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika, tekhnologii i mashinostroenie*. – 2023. – T. 22, № 3. – S. 47–58. – DOI 10.18287/2541-7533-2023-22-3-47-58.
4. Bin Zhao, Xia Jiang. Mathematical Analysis on the Design of Heliostat Field // *J. Biochemistry and Biophysics*. – 2023. – Vol. 5, issue 1. – URL: <https://www.annexpublishers.com/articles/JBB/5102-Mathematical-Analysis.pdf> (access date: 14.09.2024). – Text: electronic.
5. Ruiz-Arias J.A., Gueymard C.A. Solar Resource for High-Concentrator Photovoltaic Applications // *Green Energy and Technology*. – 2005. – P. 261–302. – URL: <https://www.researchgate.net/publication/280938413> (access date: 14.09.2024). – Text: electronic.
6. Kubova R.M., Kubov V.I. Dvuhkomponentnaya model' insolyacii dlya ocenok energeticheskoy effektivnosti solnechnyh batarej: monografiya. – Moskva: izd. CHOUVO «MU im. S.Yu. Vitte», 2019. – 199 s. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38244156> (data obrashcheniya: 14.09.2024). – Text: electronic.
7. Don Cross. Fundamentals of Ray Tracing. – 2013. – 101 p. – URL: [http://www.cosinekitty.com/raytrace/raytrace\\_a4.pdf](http://www.cosinekitty.com/raytrace/raytrace_a4.pdf) (access date: 14.09.2024). – Text: electronic.
8. Ahadov Zh.Z., Abdurahmanov A.A., Mamatkosimov M.A., Kuchkarov A.A., Holov Sh.R. Оптико-геометрические и оптико-энергетические характеристики автономных солнечных установок для освещения определенного участка внутри здания // *Computational nanotechnology*. – 2021. – № 3. – С. 113–117.