УДК 53.08

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИБКОГО ТРАНСФОРМИРУЕМОГО ОБОДА КОСМИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ

Валентина Валентиновна Вильянен, *магистр*
Тел.: 8 391 227 3925,e-mail: Vilyanen_valya@mail.ru
Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева
http://www.sibsau.ru
Александр Константинович Никулин, *аспирант*
тел. 8 391 2273925, e-mail: n_s87@mail.ru
Сибирский государственный технологический университет
http://www.sibstu.kts.ru

Рассмотрено применение задачи о нелинейном маятнике для аналитического расчета оптимальной формы изогнутой криволинейной полосы. Найденные формы с точкой перегиба выражены в эллиптических функциях и позволят улучшить конструкцию космических антенн.

Ключевые слова:геометрическая нелинейность, эллиптические функции, стержень Эйлера.

В.В. Вильянен

Нахождение нелинейных форм изгиба упругих стержней рассматривалось в работах [1] и [2]. В работе [1] для построения форм стержня использовался громоздкий метод, требующий нахождения трёх эллиптических параметров и разбиения стержня на отрезки между точками перегибов. В работе [2] был представлен более простой метод нахождения изгиба упругого стержня с использованием только одного параметра.

А.К. Никулин

Развитие космической техники ставит задачи о контролируемом изменении формы трансформируемой антенны на орбите при раскрытии. Основная деталь трансформируемого обода антенны – криволинейная композитная полоса. Две такие изогнутые полосы формируют основной упругий элемент обода, который может состоять из разного количества упругих элементов n. На рисунке 1 показана половина такого упругого элемента.

Для нахождения формы упругой полосы, составляющей основного элемента обода антенны, рассматриваемой как гибкий упругий нерастяжимый консольно-закреплённый стержень длиной Lи жёсткостью D и в начальном состоянии прямолинейный, решим задачу об изгибе такого стержня под действием силы P

$$\frac{d^2\theta}{dl^2}+\frac{P}{D}\sin(\theta+\varphi)=0 \quad , \qquad (1)$$

где φ – угол направления силы реакции опоры, $\theta(l)$ – угол наклона касательной к оси Ox, l – криволинейная координата.

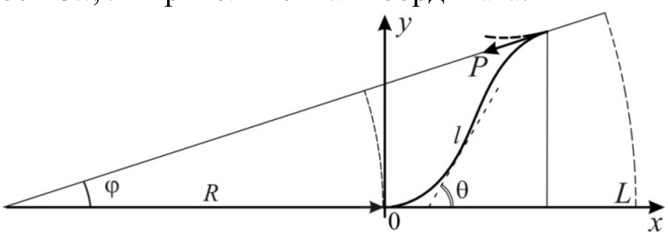

Рис. 1. Изменение формы упругого элемента при трансформации антенны

Будем искать формы для разного количества упругих элементов n = 8, 12, 18, 24, 32. Из соображений симметрии звена антенны $\varphi = \theta(L) = \pi/n$.

Выберем декартову систему координат так, чтобы изначально прямой стержень был расположен вдоль оси xи защемлен в начале координат $\theta(0)=0$. Граничное условие, определяемое постоянством количества сегментов, имеет вид

$$(r + x_1)\sin\varphi + y_1\cos\varphi = 0, \quad (2)$$

где y_1 и x_1 – координаты правого конца изогнутого стержня и $y_1(k)$ – прогиб стержня.

Зная зависимость $\theta(l)$, можно определить форму изогнутого стержня в параметрическом виде с параметром криволинейной длины l, выражениями

$$x(l) = \int_0^l \cos\theta(l)dl, \quad y(l) = \int_0^l \sin\theta(l)dl \quad . \quad (3)$$

Решение уравнения (1) хорошо известно:

$$d\theta(t) / dt = 2kq\,\mathrm{cn}(qt + F_1, k),$$
$$\theta(t) = -\varphi + 2\arcsin[k\,\mathrm{sn}(qt + F_1, k)], \quad (4)$$

где функции sn и cn – эллиптические синус и косинус Якоби, $q^2 = PL^2/D$, $t = l/L$. Модуль эллиптических функций k и параметр F_1 играют роль констант интегрирования, и их связь с P и φ определяется из граничных условий для каждого конкретного случая изгиба стержня.

Введем обозначение для аргумента эллиптических функций

$$u = qt + F_1. \quad (5)$$

Используя (4), получим

$$\cos\gamma(t) = 1 - 2k^2\mathrm{sn}^2u, \qquad \sin\gamma(t) = 2k\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u, \quad (6)$$

где $\gamma(t) = \varphi + \theta(t)$.

Интегрируя соотношения $dx / dl = \cos\theta$, $dy / dl = \sin\theta$, получим координаты произвольной точки стержня

$$\frac{x}{L} = \int_0^t \cos\theta dt = \int_0^t \cos(\gamma - \varphi)dt = \cos\varphi\int_0^t \cos\gamma dt + \sin\varphi\int_0^t \sin\gamma dt = X_0\cos\varphi + Y_0\sin\varphi$$

$$\frac{y}{L} = \int_0^t \sin\theta dt = \int_0^t \sin(\gamma - \varphi)dt = \cos\varphi\int_0^t \sin\gamma dt - \sin\varphi\int_0^t \cos\gamma dt = Y_0\cos\varphi - X_0\sin\varphi \ . \quad (7)$$

Использованные здесь обозначения X_0 и Y_0, полученные с помощью (4), имеют вид

$$X_0 = \int_0^t \cos\gamma dt = \int_0^t (1 - 2k^2\mathrm{sn}^2u)dt = -t + \frac{2}{q}\left[E(\mathrm{am}\,u) - E(\mathrm{am}\,F_1)\right],$$

$$Y_0 = \int_0^t \sin\gamma dt = \int_0^t 2k\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u\,dt = \frac{2k}{q}\left[\mathrm{cn}\,F_1 - \mathrm{cn}\,u\right]. \quad (8)$$

Здесь$E(\mathrm{am}\,u)$ – неполный эллиптический интеграл второго рода от эллиптической амплитуды Якоби. Выражения (7) и (8) задают форму профиля изогнутого стержня в параметрическом виде с параметромk.

Применим граничное условие $\theta(0) = 0$, используя общее решение (4) уравнения (1). Получим

$$\mathrm{sn}\,F_1 = \sin(\varphi/2) / k$$
$$F_1 = F\left[\arcsin\left(\frac{\sin\varphi/2}{k}\right), k\right] \quad (9)$$

Соответственно, модуль k изменяется в пределах, определяемых углом действия силы $\sin(\varphi/2) < k < 1$.

Применив второе условие $\theta(1) = \varphi$, аналогично получим,

$$\mathrm{sn}(q + F_1) = (\sin\varphi)/k, \tag{10}$$

откуда

$$q = 2nK(k) - F_2 - F_1, \qquad F_2 = F\left(\arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{k}\right), k\right), \tag{11.1}$$

$$q = (2n-1)K(k) - F_2 - F_1, \qquad F_{2c} = F\left(\arcsin\left(\frac{\cos\varphi}{k}\right), k\right), \tag{11.2}$$

где $K(k)$ и $F(\varphi, k)$ – соответственно полный и неполный эллиптические интегралы первого рода, n – натуральное число.

При построении решения для первой моды получим, что такое решение не будет существовать в области действительных чисел (11.2). По этой причине минимальной модой изгиба будет вторая (n= 1)

$$q = 2K(k) - F_2 - F_1. \tag{12}$$

Такое решение вызвано тем, что для данной формы изгиба стержня должна существовать хоты бы одна точка перегиба.

Используя выражения (2), (10), (11.1), найдём координаты правого конца стержня:

$$x_1 = \sin\varphi Y_1 + \cos\varphi X_1, \quad y_1 = \sin\varphi X_1 - \cos\varphi Y_1,$$

$$X_1 = -1 + \frac{2}{q}\left(2E(k) - E_2 - E_1\right), \; Y_1 = \frac{2k}{q}\left(\sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi/2}{k^2}} + \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\varphi)}{k^2}}\right), \tag{13}$$

$$E_1 = E\left(\arcsin\left(\frac{\sin\varphi/2}{k}\right), k\right), \; E_2 = E\left(\arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{k}\right), k\right),$$

где $E(k)$ и $E(\varphi,k)$ – соответственно полный и неполный эллиптические интегралы второго рода.

Система алгебраических уравнений (2), (9)-(11.1) позволяет найти неизвестные параметры решения q и k. Последовательно задавая известные параметры $\varphi = \pi/n$, n и r, подставляя выражение (12) для параметра $q(k)$ в (13), а выражения $x_1(k)$ и $y_1(k)$ из (13) в геометрическое соотношение (2), получим одно нелинейное алгебраическое уравнение для определения зависимости модуля k от n и r. Это уравнение можно легко решить любым численным методом. Определив модуль k, можно вычислить параметр q, используя выражение (12).

Далее, используя параметрические выражения (8) с найденными значениями параметров, можно построить изогнутые формы стержня. Координаты точек стержня в параметрическом задании $x(t)$ и $y(t)$ определяются выражениями (8) подстановкой значений q и F_1 из (12). Таким образом, каждому значению параметров n и r будет соответствовать своя форма изгиба стержня, определяемая одним вычисляемым параметром – модулем k, который находится численным решением алгебраического уравнения (12). Минимальному значению $k = \sin\varphi/2$ соответствует минимальное значение силы P и неизогнутая форма стержня. Когда сила $P \to \infty$ и модуль $k \to 1$, мы имеем максимально возможную сильно искривлённую форму стержня.

Значение прогиба правого конца изогнутого стержня $y_1(k)$ можно вычислить с помощью выражений (13), зная параметры решения q и k.

Сделав предельный переход $k \to 1$ в уравнениях (11.1)–(13), получим ограничение на область значений параметров n и r:

$$\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n} \le \frac{1}{r}, \tag{19}$$

или приближённо $\pi r \le n$. Это соотношение важно при проектировании обода антенны для выбора разрешённых значений параметров n и r, что подробно рассмотрено в [4].

Последовательные формы изогнутого гибкого элемента обода при r = 2, 3, 4 для случая n = 18, построенные по аналитическим выражениям (8), приведены на рисунке 2.

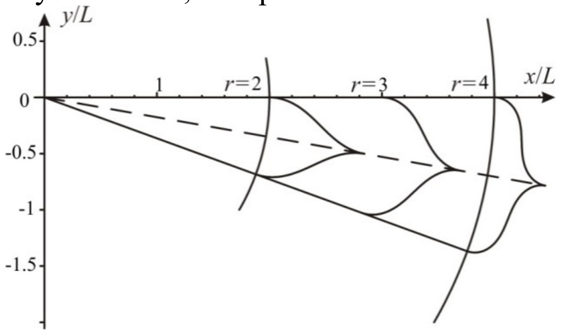

Рис. 2. Последовательные формы изогнутого гибкого элемента с защемлением при r = 2, 3, 4 для случая n = 18

Полученные формы изгиба базового элемента конструкции согласуются с результатами, полученными авторами [3]. Показано, что изгиб стержней происходит на второй моде. Разработка аналитической модели гибкой трансформируемой конструкции рефлектора антенны космического аппарата позволит внести вклад в решение актуальных проблем, существующих на сегодняшний день в космической технике.

Литература

1. *Попов Е.П.* Теория и расчёт гибких и упругих стержней / Попов Е.П. – М.: Наука, 1986. – 296 с.

2. *Захаров Ю.В.* Нелинейный изгиб тонких упругих стержней / Захаров Ю.В., Охоткин К.Г. // ПМТФ. 2002. Т. 43. №5. С. 122-131.

3. *Lopatin A.V.* №Design of large space antenna composite rim / A.V. Lopatin, M.A. Rutkovskaya // Composite Structures. 2006. Vol. 76. P. 99-105.

4. Геометрическинелинейная модель трансформируемого обода большой космической антенны с гибким и композитными лентами / Лопатин А.В., Захаров Ю.В., Охоткин К.Г. // ВестникСибГАУ. 2012. Вып.5(45). С. 75-80.

Analitical model of flexible transformable hoop of spec aerial

Valentina Valentinovna Viliyanin, master
Siberia State Aerospace University after academician M.F. Reshetnev

Alexandr Konstantinovich Nikulin, graduate student
Siberia State Technological University

In this article was used model of non-linear pendulum for finding optimal shape of a curved strip. The shapes with bend point presents via elliptic functions. Result of the article allows to improve construction of an aerial of satellite.

Keywords: geometric nonlinear, elliptic functions, column's Eyler.

УДК 539.374

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ С ПОДАТЛИВЫМИ ПРОСЛОЙКАМИ

Мария Александровна Похабова,*аспирант*
Тел.: 8923 3498959, e-mail:pokhabova-mariya@mail.ru
Институт вычислительного моделирования СО РАН
http://icm.krasn.ru