УДК 519.6

АППРОКСИМАЦИЯ ВЕЙВЛЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕГО ГИПЕРКОНЕЧНЫМ АНАЛОГОМ

Марина Юрьевна Здоровенко, *к. ф.-м. н., доцент*
Тел.: 8 953 673 9247, e-mail: zdorovenko.s@mail.ru
Вятский государственный университет, г. Киров.
http://www.vyatsu.ru

Методом нестандартного анализа изучается проблема табличной аппроксимации вейвлетного оператора его гиперконечным аналогом. В работе показано, что гиперконечный аналог вейвлет-преобразования является ограниченным оператором с единичной нормой и аппроксимирует стандартный непрерывный вейвлетный оператор.

Ключевые слова: вейвлет-преобразование, табличная аппроксимация, гиперконечномерный оператор.

Введение

Нестандартные методы анализа состоят в привлечении двух различных – «стандартной» и «нестандартной» – моделей теории множеств для исследования конкретных математических объектов и проблем. Такие методы получили существенное развитие во второй половине XX века и сформировались в несколько направлений. Одно из этих направлений, основоположником которого является А. Робинсон, характеризуется широким использованием концепций, связанных с представлением об актуальных бесконечно больших и актуальных бесконечно малых величинах и называется инфинитезимальным анализом. Многие важные приложения инфинитезимального анализа к исследованию непрерывных и других бесконечных объектов основаны на «дискретном» моделировании последних. Речь идет о поиске конечномерных или конечных объектов, в той или иной форме бесконечно близких к исходным [1]. В частности, в работах [2, 3] изучалась проблема табличной аппроксимации оператора преобразования Фурье и свойства гиперконечного оператора преобразования Фурье. Однако Фурье-анализ оказывается малоэффективным для функций с локальными особенностями, для импульсных и цифровых сигналов и изображений,

М.Ю. Здоровенко

С 80-х годов 20-го столетия развивается теория вейвлетного анализа, который является одним из методов интерполяции и аппроксимации функций с локальными особенностями (сигналов). Вейвлетный анализ является сегодня одним из самых перспективных методов анализа данных, В настоящее время происходит бурное развитие в областях техники, основанных на цифровой обработке сигналов. В связи с этим наиболее актуальными стали вопросы применения вейвлетного преобразования в задачах, связанных с обработкой информации, таких как очистка сигнала от помех, сжатие данных, выявление кратковременных и глобальных закономерностей, спектральный анализ составляющих сигнала, статистическая обработка, подавление избыточной информации, криптография, обработка мультимедийной информации – это лишь краткая сводка тех областей, где вейвлеты находят наиболее активное применение [4]. Для применения вычислительных методов в вейвлетном анализе актуальной становится проблема аппроксимации непрерывного оператора его дискретным аналогом. Этой проблеме посвящена данная работа.

Основные понятия и обозначения

В настоящей работе рассматривается вопрос гиперконечномерной аппроксимации вейвлетного преобразования

$$\mathbf{W}_{\psi}[f](a,b)=\frac{1}{|a|^{1/2}}\cdot\int_{\mathbf{R}} f(t)\cdot\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}dt=\frac{1}{|a|^{1/2}}\cdot\int_{\mathbf{R}} f(t)\cdot\overline{\psi_{a,b}(t)}\,dt$$

для сигнала

$$f(t)\in L_2(\mathbf{R})$$

и вейвлета

$$\psi(t)\in L_2(\mathbf{R})\cap L_1(\mathbf{R}),$$

обладающего свойством

$$\int_{\mathbf{R}}\psi(t)\,dt=0.$$

В работе используются следующие обозначения, принятые в нестандартном анализе:

$a\approx\infty$ - «число a бесконечно велико»;

$a\approx 0$ - «число a бесконечно мало»;

$a<\infty$ - «число a конечно»;

$st\,a$ - «стандартная часть гипердействительного числа a«,

${}^{*}N$, ${}^{*}R$ - нестандартные расширения множеств натуральных и действительных чисел соответственно.

Для функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ее нестандартное расширение обозначают через ${}^{*}f$. Далее в статье вместо ${}^{*}f$ будет использоваться просто f.

Пусть $\Phi_{\Delta}(f)$ - это таблица значений функции $f(t)$ в узлах сетки $(\Delta k)_{k=-M}^{M}$ с шагом Δ по переменной t на отрезке $[-A;A]$, то есть

$\Phi_{\Delta}(f)=\left\langle f(\Delta k)\right|\left. k=\overline{-M;M}\right\rangle$,

где $\Delta=A/M$. Размер полученной таблицы равен $N=2M+1$.

Через $\Im_{\Delta}(N)$ обозначается пространство таблиц F размера N,

$F=\left\langle F(k)\right|\left. k=\overline{-M;M}\right\rangle$.

Для таблиц F и G из $\Im_{\Delta}(N)$ определяется скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Delta}$ и нормы $\|\cdot\|_{p\Delta}$ по формулам:

$$\langle F,G\rangle_{\Delta}=\Delta\cdot\sum_{k=-M}^{M}F(k)\cdot\overline{G(k)},$$

$$\|F\|_{p\Delta}=\left(\Delta\cdot\sum_{k=-M}^{M}|F(k)|^{p}\right)^{1/p},$$

если $1\le p<\infty$, и

$$\|F\|_{\infty\Delta}=\max\left\{|F(k)|\ \middle|\ k=\overline{-M;M}\right\}.$$

В случае, когда число N бесконечно велико, то есть $N\in{}^{*}\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}$, через $E_{p\Delta}(N)$ обозначается подпространство конечных элементов из $\Im_{\Delta}(N)$. Если $N\in\mathbf{N}$, то $E_{p\Delta}(N)$ - пространство таблиц $\Im_{\Delta}(N)$ с нормой $\|\cdot\|_{p\Delta}$.

Известно, что для функций, интегрируемых по Риману в любом конечном промежутке и обладающих свойством

$$\lim_{\substack{c\to\infty\\ h\to 0}}\left(h\cdot\sum_{\nu>\frac{c}{h}} f(\nu h)+f(-\nu h)\right)=0 \qquad (1)$$

при $\Delta\approx 0,\ M\in {}^*\mathbf{N}\setminus\mathbf{N},\ \Delta M\approx\infty$, имеет место равенство:

$$\int\limits_{\mathbf{R}} f(x)\,dx = st\left(\Delta\cdot\sum_{k=-M}^{M} f(\Delta k)\right).$$

Аналогичное равенство имеет место для функций из $L_1(\mathbf{R})$, удовлетворяющих аналогу условия (1). Обозначим множество таких функций через $\wp$, а множество функций, для которых $|f|^p\in\wp$, обозначим через $\wp_p$.

Для линейного ограниченного оператора $A: L_p(\mathbf{R})\to L_q(\mathbf{R})$ определим множество S_A таких функций из $\wp_p$, образ которых $A[f]$ попадает в $\wp_q$, то есть

$$S_A=\{f\in L_p(\mathbf{R})\,\big|\,|f|\in\wp_p;\ |A[f]|\in\wp_q\}.$$

Определение 1: *Пусть положительные числа* $\Delta,\ \Delta_1$ *из* ${}^*\mathbf{R}$ *и число* N *такие, что*

$$\Delta\approx 0,\ \Delta_1\approx 0;\ \ N\in {}^*\mathbf{N}\setminus\mathbf{N};\quad \Delta N\approx\infty,\ \Delta_1 N\approx\infty. \qquad (2)$$

$A_\Delta: E_{p\Delta}(N)\to E_{q\Delta_1}(N)$ *- внутренний гиперконечномерный оператор с конечной нормой;* $A: L_p(\mathbf{R})\to L_q(\mathbf{R})$ *- линейный ограниченный оператор такой, что множество* S_A *плотно в пространстве* $L_p(\mathbf{R})$. *Говорят, что оператор* A_Δ *аппроксимирует оператор* A, *если для любой функции* f *из* S_A

$$\left\|A_\Delta[\Phi_\Delta(f)]-\Phi_{\Delta_1}(A[f])\right\|_{q\Delta_1}\approx 0. \qquad (3)$$

Указанное определение означает коммутативность диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{A} & A[f] \\ \downarrow \Phi_\Delta & & \downarrow \Phi_{\Delta_1} \\ \Phi_\Delta[f] & \xrightarrow{A_\Delta} & A_\Delta(\Phi_\Delta[f]) \end{array}$$

Гордон Е.И. доказал критерий аппроксимируемости [1]:

Пусть существует такое множество $\theta\subset S_A$, *что его линейная оболочка* $L(\theta)$ *плотна в* $L_p(\mathbf{R})$, *и для всякой функции* f *из* θ *имеет место соотношение* (3) *при выполнении условий* (4). *Тогда оператор* A_Δ *аппроксимирует оператор* A.

1. Гиперконечный оператор вейвлетного преобразования

Пусть F - таблица значений исследуемой функции f в точках Δk, т.е. $F=\Phi_\Delta(f)$. Рассмотрим конечное вейвлетное преобразование:

$$\mathbf{W}_\Delta[F](a,b)=\Delta\cdot\frac{1}{|a|^{1/2}}\cdot\sum_{m=-M}^{M}F(m)\cdot\overline{\psi\left(\frac{\Delta m-b}{a}\right)}. \qquad (4)$$

В качестве дискретизации по переменным (a,b) вейвлетного преобразования (4) применяются стандартные представления этих величин в дискретном вейвлетном преобразовании:

$$a=\sigma^r;\, b=k\beta\sigma^r \qquad r,k\in\mathbf{Z}, \qquad \sigma,\beta\in R, \qquad \sigma>1.$$

Таким образом, рассматривается конечное дискретное вейвлетное преобразование:

$$\mathbf{W}_\Delta[F](r,k)=\Delta\cdot\frac{1}{\left|\sigma^r\right|^{1/2}}\cdot\sum_{m=-M}^{M}F(m)\cdot\overline{\Psi(m,r,k)},$$

где $\Psi(m,r,k)$ - элемент таблицы

$$<\Psi>=<\psi\left(\frac{\Delta m-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)|\ m,r,k=\overline{-M;M}>.$$

Когда $\Delta\approx 0,\ M\approx\infty$, такое преобразование называется гиперконечным дискретным вейвлет-преобразованием.

Рассмотрим гиперконечное дискретное вейвлетное преобразование когда числа Δ и $N=2M+1$ удовлетворяют условиям:

$$\Delta\approx 0;\ \ N\in{}^*\mathbf{N}\setminus\mathbf{N};\quad \Delta N\approx\infty,\ \Delta^2 N<\infty. \qquad (5)$$

В этом случае норма образа сигнала f определяется по формуле

$$\|\mathbf{W}_\Delta[F]\|_\infty=\max_{r,k}\left\{\left|\Delta\frac{1}{\left|\sigma^r\right|^{1/2}}\cdot\sum_{m=-M}^{M}F(m)\cdot\overline{\Psi(m,r,k)}\right|\right\}. \qquad (6)$$

Поскольку модуль суммы конечного (и, в силу принципа переноса в нестандартном анализе, гиперконечного) числа слагаемых не превосходит суммы модулей этих слагаемых, то выражение (6) не больше чем величина

$$\max_{r,k}\left\{\Delta\frac{1}{\left|\sigma^r\right|^{1/2}}\cdot\sum_{m=-M}^{M}|F(m)|\cdot\left|\overline{\Psi(m,r,k)}\right|\right\}. \qquad (7)$$

Неравенство Гельдера дает верхнюю оценку для выражения (7):

$$\max_{r,k}\left\{\frac{1}{\left|\sigma^r\right|^{1/2}}\cdot\|F\|_{2\Delta}\cdot\left(\Delta\sum_{m=-M}^{M}\left|\overline{\Psi(m,r,k)}\right|^2\right)^{1/2}\right\}.$$

Заметим, что норма $\|F\|_{2\Delta}$ таблицы F не зависит от (r,k), поэтому справедливо неравенство

$$\frac{\|\mathbf{W}_\Delta[F]\|_\infty}{\|F\|_{2\Delta}}\le\max_{r,k}\left\{\frac{1}{\left|\sigma^r\right|^{1/2}}\cdot\left(\Delta\sum_{m=-M}^{M}\left|\overline{\Psi(m,r,k)}\right|^2\right)^{1/2}\right\}.$$

Простые расчеты показывают, что при каждом фиксированном наборе (r,k) норма таблицы $<\Psi>$ равна $\left|\sigma^r\right|^{1/2}$, поскольку $\int_{\mathbf{R}}\left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|^2 dx = a\|\psi\|_2^2$ и

$$\int_{\mathbf{R}}\left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|^2 dx = st\left(\Delta\cdot\sum_{m=-M}^{M}\left|\psi\left(\frac{\Delta m-b}{a}\right)\right|^2\right)$$

В результате получаем, что $\|\mathbf{W}_\Delta\|\le 1$. Отсюда справедливо следующее утверждение:

Предложение 1: *При выполнении условий* (5) *гиперконечный оператор дискретного вейвлетного преобразования* $\mathbf{W}_\Delta[F](r,k)$ *ограничен и его норма не превосходит единицы.*

2. Аппроксимация вейвлет-преобразования его конечномерным аналогом.

Сравним таблицу для дискретного преобразования вейвлета с таблицей для гиперконечного преобразования вейвлета:

$$\mathbf{T}=\left\langle \mathbf{W}_\psi[f](r,k)\middle| r=\overline{-R,R}, k=\overline{-K,K}\right\rangle=\left\langle \frac{1}{\left|\sigma^r\right|^{1/2}}\cdot\int_{\mathbf{R}} f(t)\cdot\overline{\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}dt\right\rangle;$$

$$\widetilde{\mathbf{T}}=\left\langle \mathbf{W}_\Delta[F](r,k)\ \middle| r=\overline{-R,R}, k=-K,K\right\rangle=\left\langle \Delta\frac{1}{\left|\sigma^r\right|^{1/2}}\cdot\sum_{m=-M}^{M}F(m)\cdot\overline{\Psi(m,r,k)}\right\rangle$$

Для сравнения рассмотрим норму разности этих двух таблиц:

$$\left\|\mathbf{T}-\widetilde{\mathbf{T}}\right\|_\infty=\max\left\{\left|\mathbf{T}(r,k)-\widetilde{\mathbf{T}}(r,k)\right|\ \middle|\ r=\overline{-R;R},\ k=\overline{-K;K}\right\}.$$

Для этого зафиксируем произвольный набор чисел (r,k) и рассмотрим разность соответствующих элементов таблиц:

$$\mathbf{T}(r,k)-\widetilde{\mathbf{T}}(r,k)=$$

$$=\left(\frac{1}{\left|\sigma^r\right|^{1/2}}\cdot\int_{\mathbf{R}} f(t)\cdot\overline{\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}dt-\Delta\frac{1}{\left|\sigma^r\right|^{1/2}}\cdot\sum_{m=-M}^{M}F(m)\cdot\overline{\Psi(m,r,k)}\right)\tag{8}$$

Поскольку

$$\int_{\mathbf{R}} f(t)\cdot\overline{\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}dt=\int_{-M\Delta}^{(M+1)\Delta} f(t)\cdot\overline{\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}dt=$$

$$=\sum_{m=-M}^{M}\int_{m\Delta}^{(m+1)\Delta} f(t)\cdot\overline{\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}dt,$$

то разность (8) можно представить в виде суммы интегралов разностей:

$$\frac{1}{\left|\sigma^r\right|^{1/2}}\cdot\left(\sum_{m=-M}^{M}\int_{m\Delta}^{(m+1)\Delta}\left(f(t)\cdot\overline{\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}-f(\Delta m)\cdot\overline{\psi\left(\frac{\Delta m-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}\right)dt\right).$$

Рассматривая подынтегральное выражение для $t\in[\Delta m;\Delta(m+1)]$ заметим, что

$$f(t)\cdot\overline{\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}-f(\Delta m)\cdot\overline{\psi\left(\frac{\Delta m-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}=$$

$$=\left(f(t)\cdot\overline{\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}-f(\Delta m)\cdot\overline{\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}\right)+$$

$$+\left(f(\Delta m)\cdot\overline{\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}-f(\Delta m)\cdot\overline{\psi\left(\frac{\Delta m-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}\right)=$$

$$=\overline{\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}\cdot\left(f(t)-f(\Delta m)\right)+f(\Delta m)\cdot\left(\overline{\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}-\overline{\psi\left(\frac{\Delta m-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}\right).$$

Обозначим через ε_1 и ε_2 следующие разности:

$$\varepsilon_1=\left(f(t)-f(\Delta\mathbf{m})\right),$$

$$\varepsilon_2=\left(\overline{\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}-\overline{\psi\left(\frac{\Delta m-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}\right).$$

Пусть $\varepsilon\in\mathbf{R},\varepsilon>0$. Заметим, что если сигнал и вейвлет являются непрерывными функциями, то при $\Delta\approx 0$, величины ε_1 и ε_2 не превосходят ε ($\varepsilon_1<\varepsilon;\ \ \varepsilon_2<\varepsilon$), а подынтегральное выражение

$$f(t)\cdot\overline{\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}-f(\Delta m)\cdot\overline{\psi\left(\frac{\Delta m-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}$$

можно оценить сверху величиной

$$\left|\overline{\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}\cdot\varepsilon_1+f(\Delta m)\cdot\varepsilon_2\right|\le\varepsilon\cdot\left|\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)\right|+\varepsilon\cdot\left|f(\Delta m)\right|.$$

Учитывая последнее неравенство, получим верхнюю оценку для интеграла (8) в виде

$$\frac{1}{\left|\sigma^r\right|^{1/2}}\cdot\left|\sum_{m=-M}^{M}\int_{m\Delta}^{(m+1)\Delta}\left(\varepsilon_1\cdot\overline{\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)}+f(\Delta m)\cdot\varepsilon_2\right)dt\right|. \tag{9}$$

Если учесть, что вейвлет $\psi(t)\in L_2(\mathbf{R})\cap L_1(\mathbf{R})$, и он вещественнозначный, а также допустить, что сигнал $f(t)\in L_2(\mathbf{R})\cap L_1(\mathbf{R})$, то выражение (9) можно оценить сверху величиной

$$\frac{1}{\left|\sigma^r\right|^{1/2}}\cdot\left(\varepsilon\cdot\int_{\mathbf{R}}\left|\psi\left(\frac{t-k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)\right|dt+\varepsilon\cdot\|F\|_{1\Delta}\right)=\frac{1}{\left|\sigma^r\right|^{1/2}}\cdot\varepsilon\cdot\left(\|\psi\|_{1\Delta}+\|F\|_{1\Delta}\right). \tag{10}$$

Так как величина $\left(\|\psi\|_{1\Delta}+\|F\|_{1\Delta}\right)$ постоянна, множитель $\frac{1}{\left|\sigma^{\mathbf{r}}\right|^{1/2}}$ также постоянен при фиксированном $\mathbf{r}$, то выражение (10) по абсолютной величине меньше любого наперед заданного положительного стандартного ε , т.е. выражение (10) является бесконечно малым.

В результате получим, что $\left|\mathbf{T}(r,k)-\widetilde{\mathbf{T}}(r,k)\right|\approx 0$ для произвольных $(\mathbf{r},\mathbf{k})$, откуда $\left\|\mathbf{T}-\widetilde{\mathbf{T}}\right\|_{\infty}\approx 0$.

Приведенные рассуждения доказывают справедливость следующего утверждения:

Предложение 2: Если выполнены условия (5), то оператор $\mathbf{W}_\Delta$ аппроксимирует оператор $\mathbf{W}_\psi$ в том смысле, что $\left\| \mathbf{W}_\Delta[\Phi_\Delta(f)] - \Phi_\Delta(W_\psi[f]) \right\|_\infty \approx 0$.

Сформулированное предложение означает коммутативность диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{W_\psi} & W_\psi[f] \\ \downarrow \Phi_\Delta & & \downarrow \Phi_{\Delta_1} \\ \Phi_\Delta[f] & \xrightarrow{W_\Delta} & W_\Delta(\Phi_\Delta[f]) \end{array}$$

Данная теорема показывает, что непрерывное вейвлет-преобразование (1) можно аппроксимировать гиперконечным дискретным преобразованием при указанных выше условиях, налагаемых на сигнал, вейвлет и шаг дискретизации. На стандартном языке это означает, что при выполнении условий: $\Delta M \to \infty$ и $\Delta^2 M$ ограничено.

$$\lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ M \to \infty}} \left(\Delta \cdot \frac{1}{|a|^{1/2}} \cdot \sum_{m=-M}^{M} f(\Delta m) \cdot \overline{\psi\left(\frac{\Delta m - k\beta\sigma^r}{\sigma^r} \right)} \right) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \cdot \int_{\mathbf{R}} f(t) \cdot \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a} \right)} dt \cdot$$

то есть вместо непрерывного сигнала можно взять таблицу его значений при достаточной мелкой сетке, а непрерывное вейвлетное преобразование заменить его конечномерным аналогом. При этом расхождение в результатах будет невелико.

Интересным является вопрос о восстановлении сигнала f по его образу при конечномерном вейвлетном преобразовании, однако этот вопрос пока не изучен.

Литература

1. *Гордон Е.И.* Инфинитезимальный анализ. В 2 ч. Ч. 2 / Е.И. Гордон, А.Г. Кусраев, С.С. Кутателадзе. – Новосибирск: изд-во Ин-та математики, 2001. – 247 с.

2 *Гордон Е.И.* О преобразовании Фурье в нестандартном анализе // Изв. вузов. Математика. 1989. №2. С. 17-25.

3. *Здоровенко М.Ю.* О гиперконечной аппроксимации преобразования Фурье // Деп. в ВИНИТИ.1994. № 691. В. 94. – 10 с.

4. *Дьяконов В.П.* Вейвлеты. От теории к практике / В.П. Дьяконов. – М.: Солон-Р, 2002. – 448 с.

Approximation of wavelet operator by its hyperfinite analogy

Marina Yur'evna Zdorovenko, Ph.D., associate Professor
Vyatka State University , Kirov .

The article deals with the problem of approximation of wavelet operator by its hyperfinite analogy. This problem is studied by the method of the non-standard analysis. It is proved that the hyperfinite wavelet operator is a bounded operator, its norm is less ore equal to 1 and this operator approximates the continuous wavelet operator.

Keywords: *wavelet operator , tabular approximation, hyperfinite operator* **.**

УДК 28.17.19

МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ ГРУППЫ КРОВИ У РЕБЁНКА В СИСТЕМЕ АВ0

Виктор Григорьевич Кирий*, профессор*
Тел.:(3952)405107,e-mail:kiriy@istu.edu
Иркутский государственный технический университет, г. Иркутск
http://www.istu.edu