УДК 519.216.8

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ СО СЧЁТНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Шамраева Виктория Викторовна,
канд. физ.-мат. наук,
заместитель заведующего кафедрой математики и информатики,
e-mail: vshamraeva@muiv.ru,
Московский университет имени С.Ю. Витте, г. Москва, Россия

Используя метод специальной интерполирующей хааровской фильтрации, найдены достаточные условия на параметры финансового рынка со счётным числом состояний. Эти условия позволяют исходный неполный безарбитражный рынок преобразовать в полный безарбитражный. Полученные результаты могут стать основой для создания программного комплекса, который может быть использован инвесторами для выбора оптимальных стратегий на финансовых рынках и построении ими хеджирующих портфелей.

Ключевые слова: безарбитражные рынки, полные рынки, мартингальные меры, специальная хааровская фильтрация, свойство универсальной хааровской единственности, условия несовпадения барицентров

DOI 10.21777/2500-2112-2018-1-65-69

Введение

Рассматривается одношаговая модель дисконтированного финансового (B,S)-рынка, заданная на фильтрованном пространстве (Ω, **F**). Здесь $\mathbf{\Omega} = \{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, **F** (**F$_0$**, **F$_1$**) – одношаговая фильтрация, причём $F_0 = \{\Omega, \varnothing\}$, а **F$_1$** – σ – алгебра всех подмножеств множества Ω. Пусть *N* – множество натуральных чисел. Цена торгуемой акции Z=(Zk, $\mathbf{F}_k)_{k=0}^{1}$, это **F** – адаптированный случайный процесс $Z_0 = a$, $Z_1(\omega_k) = b_k$, $b_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$). Множество невырожденных мартингальных мер (м.м.) *P* рассматриваемого (B,S)-рынка будем обозначать через **P** (Z, **F**). Предположим, что

$$\inf_k b_k < a < \sup_k b_k . \tag{1}$$

Условие (1) является достаточным условием того, что исходный рынок $\mathbf{P}(Z,\mathbf{F}) \neq \varnothing$.

Итак, наш рынок безарбитражен и неполон. Актуальным же является рассмотрение безарбитражных полных рынков. Эти эконометрические характеристики связаны с понятием мартингальной меры. Основой для исследований и расчетов в стохастических финансовых моделях с дискретным временем служит первая и вторая фундаментальные теоремы финансовой математики [1].

Теорема 1. (**B,S**)-рынок является безарбитражным тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}(Z,\mathbf{F}) \neq \varnothing$.

Теорема 2. (**B,S**)-рынок является полным тогда и только тогда, когда $|\mathbf{P}(Z,\mathbf{F})| = 1$.

Этой задачей в 1987 г. занимались М. Такку и В. Виллингер в работе [3]. Эти авторы предложили заменить исходную мартингальную меру неэквивалентной ей мартингальной мерой. Однако с помощью полученной таким образом единственной мартингальной меры, невозможно вычислять цены финансовых контрактов, справедливые для изначально рассматриваемого финансового рынка. А.В. Мельников и К.М. Феоктистов в 2001 году в [4] добавили к рисковым активам исходного рынка дополнительные активы, зависящие от изначальных. В настоящей статье для перехода от неполных безарбитражных рынков к полным используется метод хааровских интерполяций, который существенным образом отличается от подходов, описанных выше.

1 Применение метода хааровских интерполяций в случае финансового рынка со счётным числом состояний

Для перехода от неполных безарбитражных рынков к полным будет использован метод хааровских интерполяций [4]. Отметим, что в [4] достаточно хорошо изучены аналогичные модели на конечных вероятностных пространствах. Некоторые продвижения для финансовых рынков со счётным числом состояний и тем же методом были сделаны в [5]. Технически эта задача оказалась намного сложнее, чем для финансовых рынков с конечным горизонтом. В статье рассматривается частный случай хааровских интерполирующих фильтраций – специальные хааровские интерполирующие фильтрации. Поясним суть метода. Исходную фильтрацию **F** финансового рынка расширяем таким образом, что она превращается в специальную хааровскую фильтрацию (с.х.ф.) **H**. Затем, используя мартингальное решение задачи Дирихле для дисконтированной цены акции по отношению к с.х.ф., мы получаем однозначно определенную интерполяцию дисконтированной цены акции на специальным образом выбранные промежуточные времена. Действуя таким образом, будем иметь финансовый рынок, определенный как на исходных, так и на вновь введенных промежуточных значениях временного параметра, при этом цены акции и цены банковского счета этого рынка совпадают с изначально заданными. Назовём такую интерполяцию исходного финансового рынка *специальной хааровской интерполирующей фильтрацией* (с.х.и.ф.). Обозначим через $|A|$ – число элементов некоторого множества А. Следуя [5], дадим определения 1 и 2.

Определение 1. Будем говорить, что мера $P \in \mathbf{P}(Z,\mathbf{F})$ обладает ***свойством универсальной хааровской единственности*** (СУХЕ), если для любой с.х.и.ф. **H**, интерполирующей фильтрацию **F**, соответствующий интерполирующий процесс Y допускает единственную мартингальную меру (совпадающую с исходной мерой P), то есть имеет место равенство $|\mathbf{P}(Z,\mathbf{F})|=1$.

Такое интерполяционное свойство как СУХЕ является неудобным с точки зрения их аналитической проверки на выполнение для рассматриваемой мартингальной меры. Поэтому мы перейдём к равносильному ему свойству, называемому условием несовпадения барицентров (УНБ) [5].

Определение 2. Будем говорить, что мера $P \in \mathbf{P}(Z,\mathbf{F})$ удовлетворяет ***условию несовпадения барицентров*** (УНБ), если для любых двух (упорядоченных по возрастанию) непересекающихся подмножеств индексов I и J (при числах b_i), $I, J \subset N$ выполняется неравенство

$$\frac{\sum_I b_i p_i}{\sum_I p_i} \neq \frac{\sum_J b_j p_j}{\sum_J p_j}. \tag{2}$$

Множество м.м. процесса Z, удовлетворяющих УНБ, мы будем обозначать УНБ(Z). Очевидно, что если существует вероятностная мера $P \in \mathbf{P}(Z,\mathbf{F})$, удовлетворяющая УНБ, то числа a, b_1, b_2, … различны.

Отметим, что до настоящего времени не имелось ни одного примера м.м., удовлетворяющей УНБ.

2 Достаточные условия непустоты УНБ(Z)

Следующие далее результаты дают достаточные условия существования м.м., удовлетворяющих УНБ.

Лемма. Пусть $b_1<b_2<b_3<b_4<b_5<\dots$, причём $b_i - b_{i-1} \geq b_{i-1}$

$$b_{i-1}\min_{1\leq j\leq i-1} p_j > \sum_{j=i+1}^{\infty} b_j p_j,\ \forall i \geq 2, \tag{3}$$

то мера $P\in$ УНБ(Z).

Доказательство. Проверим выполнение условия (2). Рассмотрим два произвольных непересекающихся подмножества индексов $I=\{i_1,i_2,\dots\}$ и $J=\{j_1,j_2,\dots\}$ множества индексов {1, 2, ...}, $i_1>j_1$. Представим множество I как $\{i_1\} \cup I_2$, $I_2 \subseteq \{i_1+1, i_1+2, i_1+3,\dots\}$, а J как $J_1 \cup J_2$, где $J_1 \subseteq \{1,2,3,4,5,\dots,i_1-1\}$, $J_2 \subseteq \{i_1+1, i_1+2, i_1+3,\dots\}$ Имеем

$$\frac{\sum_I b_i p_i}{\sum_I p_i} \neq \frac{\sum_J b_j p_j}{\sum_J p_j} \Leftrightarrow \frac{b_{i_1}p_{i_1}+\sum_{I_2} b_i p_i}{p_{i_1}+\sum_{I_2} p_i} \neq \frac{\sum_{J_1} b_j p_j + \sum_{J_2} b_j p_j}{\sum_{J_1} p_j + \sum_{J_2} p_j} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(b_{i_1}p_{i_1}+\sum_{I_2} b_i p_i\right)\left(\sum_{J_1} p_j + \sum_{J_2} p_j\right) \neq \left(\sum_{J_1} b_j p_j + \sum_{J_2} b_j p_j\right)\left(p_{i_1}+\sum_{I_2} p_i\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_{i_1} p_{i_1} \sum_{J_1} p_j - p_{i_1} \sum_{J_1} b_j p_j + \sum_{I_2} b_i p_i \sum_{J_1} p_j - \sum_{I_2} p_i \sum_{J_1} b_j p_j \neq$$

$$\neq p_{i_1} \sum_{J_2} b_j p_j + \sum_{I_2} p_i \sum_{J_2} b_j p_j - \sum_{I_2} b_i p_i \sum_{J_2} p_j - b_{i_1} p_{i_1} \sum_{J_2} p_j .$$

Поскольку

$$b_{i_1} p_{i_1} \sum_{J_1} p_j - p_{i_1} \sum_{J_1} b_j p_j + \sum_{I_2} b_i p_i \sum_{J_1} p_j - \sum_{I_2} p_i \sum_{J_1} b_j p_j =$$

$$= \left(b_{i_1} \sum_{J_1} p_j - \sum_{J_1} b_j p_j \right) p_{i_1} + \sum_{I_2} b_i p_i \sum_{J_1} p_j - \sum_{I_2} p_i \sum_{J_1} b_j p_j >$$

$$> \left(b_{i_1} \sum_{J_1} p_j - b_{i_1 - 1} \sum_{J_1} p_j \right) p_{i_1} + \sum_{I_2} b_i p_i \sum_{J_1} p_j - b_{i_1 - 1} \sum_{I_2} p_i \sum_{J_1} p_j =$$

$$= \left(b_{i_1} - b_{i_1 - 1} \right) p_{i_1} \sum_{J_1} p_j + \left(\sum_{I_2} b_i p_i - b_{i_1 - 1} \sum_{I_2} p_i \right) \sum_{J_1} p_j \geq$$

$$\geq b_{i_1 - 1} \min_{1 \leq j \leq i_1 - 1} p_j p_{i_1} + \left(\sum_{I_2} b_i p_i - b_{i_1 - 1} \sum_{I_2} p_i \right) \min_{1 \leq j \leq i_1 - 1} p_j \geq$$

$$\geq b_{i_1 - 1} \min_{1 \leq j \leq i_1 - 1} p_j p_{i_1} + \left(b_{i_1 + 1} \sum_{I_2} p_i - b_{i_1 - 1} \sum_{I_2} p_i \right) \min_{1 \leq j \leq i_1 - 1} p_j \geq$$

$$\geq b_{i_1 - 1} \min_{1 \leq j \leq i_1 - 1} p_j p_{i_1} + \left(b_{i_1 + 1} - b_{i_1 - 1} \right) \min_{1 \leq j \leq i_1 - 1} p_j \sum_{I_2} p_i \geq$$

$$\geq b_{i_1 - 1} \min_{1 \leq j \leq i_1 - 1} p_j p_{i_1} + \left(b_{i_1 + 1} - b_{i_1} + b_{i_1} - b_{i_1 - 1} \right) \min_{1 \leq j \leq i_1 - 1} p_j \sum_{I_2} p_i \geq$$

$$\geq b_{i_1 - 1} \min_{1 \leq j \leq i_1 - 1} p_j p_{i_1} + b_{i_1} \min_{1 \leq j \leq i_1 - 1} p_j \sum_{I_2} p_i + b_{i_1 - 1} \min_{1 \leq j \leq i_1 - 1} p_j \sum_{I_2} p_i \geq$$

$$\geq p_{i_1} \sum_{j = i_1 + 1}^{\infty} b_j p_j + \sum_{I_2} p_i \sum_{j = i_1 + 1}^{\infty} b_j p_j \geq$$

$$\geq p_{i_1} \sum_{J_2} b_j p_j + \sum_{I_2} p_i \sum_{J_2} b_j p_j \geq$$

$$\geq p_{i_1} \sum_{J_2} b_j p_j + \sum_{I_2} p_i \sum_{J_2} b_j p_j - \sum_{I_2} b_i p_i \sum_{J_2} p_j - b_{i_1} p_{i_1} \sum_{J_2} p_j .$$

Таким образом, неравенство (2) выполнено.

Замечание. Если последовательность $p_1, p_2, \ldots$ монотонно убывает, то неравенства (3) совпадают с неравенствами

$$b_{i-1} p_{i-1} > \sum_{j=i+1}^{\infty} b_j p_j , \ \forall i \geq 2 . \tag{4}$$

Пример.

$b_1=1<a=5/3<b_2=2<b_3=4<b_4=8<\ldots<b_i=2^{i-1}<\ldots$, $b_i - b_{i-1}=2^{i-1} - 2^{i-2} =2^{i-2} =b_{i-1}$,
мера P=(2/3; 1/4;1/16;1/64; …;$1/2^{2i-2}$;…) ∈ $\mathbf{P}(Z,\mathbf{F})$ удовлетворяет условию (4) и значит, обладает УНБ.

(Действительно,

$$b_{i-1}p_{i-1} = \frac{2^{i-2}}{4^{i-2}} = \frac{1}{2^{i-2}} = \frac{4}{2^i} > \sum_{j=i+1}^{\infty} b_j p_j = \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{2}{2^i}, \forall\, i.)$$

Теорема 3. Пусть P $\in$ **P** (Z, **F**) и $b_1<b_2<b_3<b_4<b_5<\ldots$, причём

$$b_i - b_{i-1} \geq b_{i-1},\ \forall i \geq 2. \tag{5}$$

Тогда УНБ(Z) непусто и строго вложено в $\mathbf{P}(Z, \mathbf{F})$.

Техника доказательства теоремы 3 остаётся прежней (см. к примеру в [10]).

Заключение

Полученные условия существования мартингальных мер, удовлетворяющих условиям несовпадения барицентров, позволяют строить модели безарбитражных неполных финансовых рынков с бесконечным числом состояний, которые с помощью хааровских интерполяций преобразуются в полные безарбитражные. Это свойство модели представляется особенно важным при расчетах цен различных финансовых обязательств и построении хеджирующих портфелей [11, 12].

Список литературы

1. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. // 2 изд. – М.: ФАЗИС, 2004.
2. *Taqqu M.S., Willinger W.* The analysis of finite security markets// Adv. Appl. Probab. – 1987. – № 9. – P. 1–25.
3. *Melnikov A.V., Shiryaev A.N.* Criteria for the absence of arbitrage in the financial market // Frontiers in Pure and Applied Probability, II (Proceedings of the Fourth Russian-Finish Simp. on Prob. Theory and Math. Stat., Moscow, October 3–8, 1993). – M.: TVP, 1996. – P. 121–134.
4. *Богачева М.Н., Павлов И.В.* О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных // Успехи математических наук. – 57:3 (2002). – 143–144.
5. *Данекянц А.Г.* Моделирование безарбитражных финансовых рынков с помощью хааровских интерполяций на счётном вероятностном пространстве: дисс. … на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. – Ростов н/Д., 2005.
6. *Павлов И.В., Цветкова И.В., Шамраева В.В.* О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров: конструктивистский подход // Вестник РГУПС. – 47. – 2014. – № 4. С. 132–138.
7. *Шамраева В.В.* Новый метод преобразования систем неравенств для нахождения интерполяционных мартингальных мер // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016. – № 12(54). Ч. 5. – С. 30–41.
8. *Шамраева В.В.* О неравенствах, обеспечивающих выполнение интерполяционных свойств мартингальных мер // Теория вероятностей и ее применения. 61:3. – 2016. – С. 616–617.
9. *Павлов И.В., Цветкова И.В., Шамраева В.В.* О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров, в случае счетного вероятностного пространства // Теория вероятностей и ее применения. 61:1. – 2017. – С. 167–175.
10. *Павлов И.В., Шамраева В.В.* Новые результаты о существовании интерполяционных мартингальных мер // Успехи математических наук. 72:4. – 2017. – С. 193–194.
11. *Цветкова И.В., Шамраева В.В.* Расчёт компонентов хеджирующего портфеля с помощью процедуры хааровской интерполяции [Электронный ресурс] / И.В. Цветкова, В.В. Шамраева // Электронное научное издание «Науковедение: Интернет-журнал». – 2013. – №3 (16). – URL: http://naukovedenie.ru/PDF/45trgsu313.pdf
12. *Шамраева В.В.* Вычисление компонентов хеджирующего портфеля для некоторых платежных обязательств, заданных в финальный момент времени финансового рынка с бесконечным числом состояний [Электронный ресурс] / В.В. Шамраева // Вестник Московского университета им. С.Ю. Витте. Сер. 1: Экономика и управление. – 2014. – № 1. – URL: http://www.muiv.ru/vestnik/pdf/eu/eu_2014_1_40-45.pdf

MODELING FINANCIAL MARKETS WITH A COUNTABLE NUMBER STATES

Shamraeva V.V.,
Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Deputy head of the department of mathematics and informatics,
e-mail: vshamraeva@muiv.ru,
Moscow Witte University, Moscow

Using the method of special interpolating Haar filtering, sufficient conditions are found for the parameters of the financial market with an countable number of States. These conditions make it possible to convert the initial incomplete arbitrage-free financial markets into a complete arbitrage-free.
The obtained results can serve as a basis for creating a software package that can be used by investors to select the best strategies in the financial markets and build their hedging portfolios.
Keywords: arbitrage-free markets, complete markets, martingale measure, special Haar filtering, the property of universal Haar uniqueness; noncoincidence barycenter condition