19. *Гуревич В.Л., Карпов А.П.* Многомерный статистический анализ в медицине. − Свердловск: Урал.науч. Центр, 1983. − 106 с.

20. *Чиженкова Р.А.* Исследование временной связи в модельной ситуации на клеточных популяциях сенсомоторной коры: препринт. − Пущино: НЦБИ АН ССР, 1975.− 13 с.

21. *Чиженкова Р.А.* Формирование временной связи в модельных ситуациях на нейронных популяциях коры больших полушарий // В: Физиологические и биохимические исследования памяти / ред. Е.А. Громова.− Пущино: НЦБИ АН ССР, 1977. С. 85-96.

22. *Чиженкова Р.А.* Организация нейронных реакций в сенсомотрной коре при сочетании раздражений стрцктур мозга // Журн. высш. нервн. деят-ти. 1977. Т. 27. № 6. С. 1179-1187.

23. *Чиженкова Р.А.* Организация следовых явлений в клеточных популяциях сенсомоторной коры // Успехи физиол. наук. 1981. Т. 12.№ 3. С. 103-130.

24. *Чиженкова Р.А.* Электрические следовые процессы в нейронных популяциях сенсомоторной коры: автореф. дис. … док.мед. наук. − М.: Инст. высш. нервн. деят-ти и нейрофизиологии РАН, 1991. − 30 с.

The role of backgraund activity in changes of interspike untervals of neurons under microwaves

Rogneda Aleksandrovna Chizhenkova, doctor of medicine, leading research worker
Institute of Cell Biophysics of Russian Academy of Sciences

In unanesthetized nonimmobilized rabbit pulse flows of populations of cortical neurons were investigated prior, during, and after 1-min microwave irradiation (wavelength 37.5 cm, power density 0.2-0.3; 0.4; 0.5; and 40 mW/cm^2). Changes of interspikes intervals depended on intensity of irradiation, but not background activity.

Keywords: microwaves, the neocortex, neuronal activity

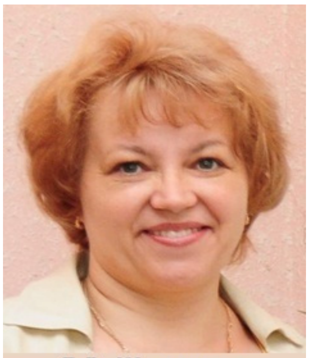
УДК 517+518.392

ОСОБЕННОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_1^{(m)}[a,b]$

Лариса Владимировна Шатохина*, к.ф.-м.н., доцент*
Тел.: 8 923 2897617, e-mail: slv63@bk.ru; vmi@sibstu.kts.ru
ФГБОУ ВПО «Сибирский государственный технологический университет»
www.sibstu.kts.ru/fak/lif/kaf/kvmi

В статье исследуются квадратурные формулы с пограничным слоем для пространств функций $L_1^{(m)}[a,b]$. Для случаев пространств $L_1^{(m)}[a,b]$ ($m=1, m=2, m=3$) приводятся асимптотически оптимальные и оптимальные квадратурные формулы с пограничным слоем, и описываются их некоторые свойства.

Ключевые слова: формулы приближенного интегрирования, решетчатые квадратурные формулы с пограничным слоем, усложненные формулы прямоугольников, трапеций, формулы Грегори, функционалы ошибок, норма функционала, асимптотически оптимальные формулы



Л.В. Шатохина

Теория приближенного интегрирования является развитым разделом вычислительной математики. Результаты проведённых исследований относятся к тематике построения асимптотически оптимальных последовательностей квадратурных формул для пространства функций $L_1^{(m)}[a,b]$ и выявления их особенностей. Методы исследований и доказательств установленных результатов основываются на функциональном подходе к изучению и построению квадратурных формул, и взяты из работ Никольского С. М. [1], Крылова В. И. [2] и Половинкина В. И. [3]. Подынтегральные функции объединены в банахово пространство, а разность между интегралом и приближающей его комбинацией значений подынтегральной функции рассматривается как результат действия линейного непрерывного функционала. Этот функционал называется функционалом погрешности квадратурной формулы. Знание численного значения его нормы позволяет получать гарантированные оценки квадратурной формулы на элементах выбранного пространства.

Рассматриваются последовательности усложнённых квадратурных формул прямоугольников и трапеций над линейным нормированным пространством $L_1^{(1)}[a,b]$. Оцениваются нормы функционалов ошибок l^h, ρ^h этих формул в сопряжённом пространстве $L_1^{(1)*}[a,b]$:

$$\left(l^h(x), f(x)\right) = \int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+0{,}5h+ih),$$

$$\left(\rho^h(x), f(x)\right) = \int_a^b f(x)dx - h\left(0{,}5(f(a)+f(b)) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right),$$

где $f(x)\in L_1^{(1)}[a,b]$, $\quad \|f(x)\|_{L_1^{(1)}[a,b]} = \int_a^b |f'(x)|dx$.

Конструктивно доказано, что функции, реализующие функционалы ошибок l^h, ρ^h рассматриваемых формул прямоугольников и трапеций, получены друг из друга сдвигом при их периодическом продолжении.

Теорема 1. Нормы функционалов погрешностей вычислений в сопряженном пространстве $L_1^{(1)*}[a,b]$ для усложненных квадратурных формул прямоугольников и трапеций над пространством функций $L_1^{(1)}[a,b]$ совпадают: $\left\|l^h\right\|_{L_1^{(1)*}[a,b]} = \left\|\rho^h\right\|_{L_1^{(1)*}[a,b]}$.

Асимптотически оптимальные квадратурные формулы имеют минимальные нормы функционалов ошибок среди норм функционалов погрешностей всех квадратурных формул для заданного класса функций.

Теорема 2. Усложнённая формула трапеций асимптотически оптимальная квадратурная формула с пограничным слоем в пространстве $L_1^{(1)}[a,b]$.

Теорема 3. Нормы функционалов ошибок последовательностей квадратурных формул вида $\left(\rho_\lambda^h(x), f(x)\right) = \left(\rho^h(x), f(x)\right) + \lambda\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta_h\left(\frac{x-a}{h}-i\right), f(x)\right)$, где $\Delta_h\left(\frac{x-a}{h}-i\right)$ - оператор конечной разности первого порядка, примененный к функции $f(x)$ на частичном интервале, достигают своего минимального значения при $\lambda = 0$.

Теорема 3 доказывает, что усложнённая квадратурная формула трапеций среди всех квадратурных формул с пограничным слоем для пространства функций $L_1^{(1)}[a,b]$ является не просто асимптотически оптимальной, а оптимальной.

В работе [4] среди решетчатых квадратурных формул с пограничным слоем, функционалы ошибок которых имеют вид:

$$\left(l^h, f\right) = \int_a^b f(x)dx - h\left\{\sum_{i=0}^{t}\left[\alpha_i f(a+ih) + \beta_i f(b-ih)\right] + \sum_{i=t+1}^{n-t-1} f(a+ih)\right\}, \qquad (1)$$

где $\alpha_0,\ldots,\alpha_t,\beta_0,\ldots,\beta_t$ — числа, $f(x)\in L_1^{(2)}(a,b)$, были построены оптимальные решетчатые квадратурные формулы с пограничным слоем для пространства $L_1^{(2)}(a,b)$, функционалы ошибок которых имеют следующий вид:

$$\left(\rho^h, f\right) = \int_a^b f(x)dx - h\left\{\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right\} + \left(1.5-\sqrt{2}\right)\sum_{i=1}^{n-1}\left(\Delta_h^2\left(\frac{x-a}{h}-i\right), f(x)\right), \quad (2)$$

где

$$\left(\Delta_h^2\left(\frac{x-a}{h}-i\right), f(x)\right) = h\Delta_h^2 f(a+ih) = h\left(f(a+(i-1)h) - 2f(a+ih) + f(a+(i+1)h)\right), \quad i = \overline{1, n-1}$$

—конечные разности второго порядка. Метод доказательства был взят из работы [3].

Через $L_1^{(2)}(a,b)$ обозначается банахово пространство, индуцированное полунормой

$$\|f\|_{L_1^{(2)}(a,b)} = \int_a^b |f''(x)|dx;$$

через $L_1^{(2)*}(a,b)$ — пространство, сопряженное к $L_1^{(2)}(a,b)$.

Функционалы вида (2) удовлетворяют условиям:

$$\left(\rho^h, 1\right) = \left(\rho^h, x\right) = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим решетчатые квадратурные формулы, функционалы ошибок которых имеют вид:

$$\left(\gamma^h, f\right) = \left(\rho^h, f\right) + \lambda\sum_{i=2}^{n-2}\left(\Delta_h^2\left(\frac{x-a}{h}-i\right), f(x)\right), \quad (4)$$

где $f(x) \in L_1^{(2)}(a,b)$, ρ^h — функционал вида (2), λ – постоянная.

Теорема 4. *Решетчатые квадратурные формулы с функционалами ошибок вида (4) оптимальны при* $\lambda \in \left[-2.875 + 2\sqrt{2}\ ;\ 0\right]$.

Доказательство. Согласно [2, с. 210-211] существует функция $G^h(x)$ такая, что

$$G^h(x) = F^h(x) + \lambda\sum_{i=2}^{n-2} F_1^h\left(\frac{x-a}{h}-i\right), \quad (5)$$

где $F^h(x)$— функция, реализующая функционал ρ^h (2). Явный вид функции $F^h(x)$ получен в работе [4]:

$$F^h(x) = \begin{cases} 0.5\left((x-a)^2 - (x-a)h\right) + \left(1.5-\sqrt{2}\right)(x-a)h, & x \in [a, a+h) \\ 0.5\left((x-a-ih)^2 - (x-a-ih)h\right) + \left(1.5-\sqrt{2}\right)h^2, & x \in [a+ih, a+(i+1)h), \\ 0.5\left((x-b+h)^2 - (x-b+h)h\right) + \left(1.5-\sqrt{2}\right)(b-x)h, & x \in [b-h, b] \end{cases}$$

(6)

Функции $F_1^h\left(\frac{x-a}{h}-i\right)$, $i = \overline{2, n-2}$ реализуют оператор взятия конечных разностей второго порядка, т.е.

$$\left(\Delta_h^2\left(\frac{x-a}{h}-i\right), f(x)\right) = \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} F_1^h\left(\frac{x-a}{h}-i\right) f''(x)dx, \quad i = \overline{2, n-2}.$$

Явный вид функций $F_1^h(x)$ получен в работе [4]

$$F_1^h\left(\frac{x-a}{h}-i\right) = \begin{cases} \frac{x-a}{h} - i + 1, & x \in (a+(i-1)h\ ;\ a+ih) \\ -\frac{x-a}{h} + i + 1, & x \in (a+ih\ ;\ a+(i+1)h), \quad i = \overline{2, n-2} \end{cases} \quad (7)$$

Обозначим в равенстве (5) через $\Phi_\lambda^h(x)=\lambda\sum\limits_{i=2}^{n-2}F_1^h\left(\frac{x-a}{h}-i\right)$, тогда

$$\Phi_\lambda^h(x)=\begin{cases}\lambda\left(\frac{x-a}{h}-1\right)h^2, & x\in[a+h\,;a+2h]\\ \lambda h^2, & x\in(a+ih\,;a+(i+1)h),\quad i=\overline{2,n-3}\\ \lambda\left(\frac{x-a}{h}+n-1\right)h^2, & x\in[a+(n-2)h\,;a+(n-1)h]\end{cases}\qquad(8)$$

Из формул (5) – (8) следует, что функция $G^h(x)$, реализующая функционал γ^h, имеет вид:

$$G^h(x)=\begin{cases}0.5\left((x-a)^2-(x-a)h\right)+\left(1.5-\sqrt2\right)(x-a)h, & x\in[a\,;a+h]\\ 0.5\left((x-a-h)^2-(x-a-h)h\right)+\left(1.5-\sqrt2\right)h^2+\lambda h(x-a-h), & x\in(a+h\,;a+2h]\\ 0.5\left((x-a-ih)^2-(x-a-ih)h\right)+\left(1.5-\sqrt2\right)h^2+\lambda h^2, & x\in(a+ih\,;a+(i+1)h],\quad i=\overline{2,n-3}\\ 0.5\left((x-a-(n-2)h)^2-(x-a-(n-2)h)h\right)+\left(1.5-\sqrt2\right)h^2+\lambda h(x-a+(n-1)h), & x\in(a+(n-2)h\,;a+(n-1)h]\\ 0.5\left((x-a-(n-1)h)^2-(x-a-(n-1)h)h\right)+\left(1.5-\sqrt2\right)(a+(n-1)h), & x\in(a+(n-1)h\,;a+nh]\end{cases}\qquad(9)$$

Для того, чтобы квадратурные решетчатые формулы с функционалами ошибок вида (4) были оптимальны необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

$$\left\|\gamma^h\right\|_{L_1^{(2)*}(a,b)}\le\left\|\rho^h\right\|_{L_1^{(2)*}(a,b)}.$$

Нормы функционалов γ^h, ρ^h в пространстве $L_1^{(2)*}(a,b)$ определяются в [3]:

$$\left\|\gamma^p\right\|_{L_1^{(2)*}(a,b)}=\left\|G^h\right\|_{L_\infty^{(2)}(a,b)}=vrai\sup_{x\in(a,b)}\left\{\left|G^h(x)\right|\right\},$$
$$\left\|\rho^h\right\|_{L_1^{(2)*}(a,b)}=\left\|F^h\right\|_{L_\infty^{(2)}(a,b)}=vrai\sup_{x\in(a,b)}\left\{\left|F^h(x)\right|\right\}$$

соответственно.

Определим при каких значениях λ

$$vrai\sup_{x\in(a,b)}\left\{\left|G^h(x)\right|\right\}<vrai\sup_{x\in(a,b)}\left\{\left|F^h(x)\right|\right\}.$$

На интервалах $[a\,;a+h]$, $[b-h\,;b]$ функции $G^h(x)$, $F^h(x)$ тождественно равны. Рассмотрим случай, когда $x\in[a+h\,;b-h]$.

1). Если $x\in[a+h\,;a+2h]$, функция $G^h(x)$ в (9) задается формулой:

$$G^h(x)=0.5\left((x-a-h)^2-(x-a-h)h\right)+\left(1.5-\sqrt2\right)h^2+\lambda h(x-a-h).$$

Функция $\left|G^h(x)\right|$, $x\in[a+h\,;a+2h]$ может достигать своего максимума хотя бы в одной из трех точек: на концах интервала или в экстремуме функции $\left|G^h(x)\right|$ точке $x_0=a-\lambda h+1.5h$.

А). Пусть $x_0\in[a+h\,;a+2h]$, т.е.

$a+h\le a-\lambda h+1.5h\le a+2h$

или

$-0.5\le\lambda\le0.5$.

Вычислим три значения: $G^h(a+h), G^h(a+2h), G^h(x_0)$:

$$G^h(a+h)=\left(1.5-\sqrt2\right)h^2,$$
$$G^h(a+2h)=\left(1.5-\sqrt2\right)h^2+\lambda h^2,\ G^h(x_0)=\left(-0.5\lambda^2+0.5\lambda+1.375-\sqrt2\right)h^2.$$

Для того, чтобы на интервале $[a+h\,;a+2h]$ выполнялось неравенство:

$$\left\|G^h\right\|_{L_\infty^{(2)}[a+h,a+2h]}\le\left\|F^h\right\|_{L_\infty^{(2)}[a+h;a+2h]},\qquad(10)$$

необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} -0,5 \le \lambda \le 0,5 \\ -1,5+\sqrt{2} \le -0,5\lambda^{2}+0,5\lambda+1,375-\sqrt{2} \le 1,375-\sqrt{2} \\ -1,5+\sqrt{2} \le 1,5-\sqrt{2}+\lambda \le 1,5-\sqrt{2} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -0,5 \le \lambda \le 0,5 \\ -0,5\lambda^{2}+0,5\lambda+2,875-2\sqrt{2} \ge 0 \\ -0,5\lambda^{2}+0,5\lambda \le 0 \\ \lambda \le 0 \\ \lambda \ge -3+2\sqrt{2} \end{cases} \qquad (11)$$

Решением системы (11) является множество значений $\lambda \in \left[\ 0,5-2\sqrt{1,5-\sqrt{2}}\ ;0\right]$.

Б). Пусть $x_0 \notin [a+h\,;a+2h]$, тогда для того, чтобы выполнялось условие (10) необходимо:

$$\begin{cases} \lambda < -0,5 \\ \lambda \le 0 \\ \lambda \ge -3+2\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lambda > 0,5 \\ \lambda \le 0 \\ \lambda \ge -3+2\sqrt{2} \end{cases} \qquad (12)$$

Решение систем (12) — пусто.

Окончательно имеем, что

$$vrai \sup_{x\in[a+h\,;a+2h]} \left\{\left| G^{h}(x)\right|\right\} \le vrai \sup_{x\in[a+h\,;a+2h]} \left\{\left| F^{h}(x)\right|\right\}, \qquad (13)$$

если $\lambda \in \left[0.5-2\sqrt{1.5-\sqrt{2}}\ ;0\right]$.

2). Если $x \in (a+ih\,;a+(i+1)h]$, $i=\overline{2,n-3}$, функция $G^{h}(x)$ в (9) задается формулой:

$$G^{h}(x) = 0.5\left((x-a-ih)^{2}-(x-a-ih)h\right)+\left(1.5-\sqrt{2}\right)h^{2}+\lambda h^{2}.$$

Аналогично рассуждениям, проведенным в пункте 1), выведем условия на λ, при которых

$$\left\| G^{h} \right\|_{L_{\infty}^{(2)}[a+ih\,;a+(i+1)h]} \le \left\| F^{h} \right\|_{L_{\infty}^{(2)}[a+ih\,;a+(i+1)h]}.$$

Окончательно имеем, что

$$vrai \sup_{x\in[a+ih,\,a+(i+1)h]} \left\{\left| G^{h}(x)\right|\right\} \le vrai \sup_{x\in[a+ih\,;a+(i+1)h]} \left\{\left| F^{h}(x)\right|\right\}, \quad i=\overline{2,n-3}, \qquad (14)$$

если $\lambda \in [-1.375+2\sqrt{2}\,;0]$.

В виду симметричности функции $G^{h}(x)$ на $[a\,;b]$, неравенств (13), (14) имеем, что $\left\| G^{h} \right\|_{L_{\infty}^{(2)}[a,b]} \le \left\| F^{h} \right\|_{L_{\infty}^{(2)}[a,b]}$, если $\lambda \in [-2.875+2\sqrt{2}\,;0]$. Таким образом, теорема доказана.

Теория построения оптимальных и асимптотически оптимальных последовательностей квадратурных формул с пограничным слоем в пространствах $L_{1}^{(m)}[a,b]$ существенно отличается от аналогичной теории в пространствах $L_{p}^{(m)}[a,b]$, $p>1$. Свойство последовательности квадратурных формул с пограничным слоем – быть асимптотически оптимальной в пространствах $L_{p}^{(m)}[a,b]$, $p>1$ полностью определяется ее сопутствующим числом [3]. Это свойство сопутствующего числа неверно в случае пространств $L_{1}^{(m)}[a,b]$.

Теорема 5. [4] Можно построить семейство последовательностей оптимальных квадратурных формул типа Грегори в пространстве $L_{1}^{(2)}[a,b]$, множество сопутствующих чисел, которых покрывают интервал $\left[2\sqrt{2}-\frac{31}{12};\frac{19}{6}-2\sqrt{2}\right]$. При этом разным формулам из этого семейства соответствуют разные сопутствующие числа.

В работе [6] доказано существование семейства асимптотически оптимальных решетчатых квадратурных формул с пограничным слоем для интегрируемых функций из пространства $L_1^{(3)}[a,b]$.

Теорема 6. Решетчатые квадратурные формулы в пространстве $L_1^{(3)}[a,b]$ с функционалами ошибок

$$\left(l_{\lambda,\mu}^{h}(x),\, f(x)\right)=\int_a^b f(x)dx-h\begin{cases}\left(\frac{3}{8}+\lambda\right)\left(f(a)+f(b)\right)+\left(\frac{7}{6}-3\lambda+\mu\right)\left(f(a+h)+f(b-h)\right)+\\ +\left(\frac{23}{24}+3\lambda-3\mu\right)\left(f(a+2h)+f(b-2h)\right)+\\ +\left(1-\lambda+3\mu\right)\left(f(a+3h)+f(b-3h)\right)+\\ +\left(1-\mu\right)\left(f(a+4h)+f(b-4h)\right)+\sum\limits_{i=5}^{n-5}f(a+ih)\end{cases},$$

$n\geq 9$ асимптотически оптимальны при $\lambda_0=0{,}0388918345\ 4705$ и $\mu\in[\mu_0,\,0]$, где $\mu_0=-0{,}0278372371\ 1107$.

Автор считает, что проводимое исследование позволило построить не только асимптотически оптимальные формулы интегрирования, но и среди них выделить семейства оптимальных (случаи $m=1$ и $m=2$). Полученные новые формулы интегрирования имеют минимальные погрешности, чем известные формулы Грегори, и рекомендуются для применения.

Литература

1. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1974. – 124 с.
2. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. –500 с.
3. *Половинкин В.И.* Последовательности квадратурных формул с пограничным слоем и последовательности типа Грегори // Квадратурные и кубатурные формулы. Решение функциональных уравнений. Методы вычислений. –Л.: ЛГУ, 1981. Вып. 12. С. 7-25.
4. *Шатохина Л.В.* Оптимизация квадратурных формул типа Грегори для пространства $L_1^{(2)}(a,b)$ //Кубатурные формулы и их приложения: VI международный семинар- совещание – Уфа: ИМВЦ УфНЦ РАН, БГПУ, 2001. С. 156-158.
5. *Шатохина Л.В.* Уточнение квадратурных формул Грегори со вторыми конечными разностями в пространстве .– деп. в ВИНИТИ 07.10.03 № 1771 – В2003.– Красноярск: СибГТУ, 2003. – 15 с.
6. *Шатохина Л.В.* Оптимизация в двухпараметрическом семействе квадратурных формул типа Грегори // Кубатурные формулы и их приложения: труды X международного семинар-совещание. – Улан-Удэ: ВСГТУ, 2009. С. 184-191.

Singularities of asymptotically optimal quadrature formulas in $L_1^{(m)}[a,b]$ spaces

LarisaVladimirovna Shatochina,candidate of physical and mathematical sciences, associate professor
Siberia state technological university

The author researches the quadrature formulas with boundary layer for spaces of functions $L_1^{(m)}[a,b]$. For cases of spaces $L_1^{(m)}[a,b]$ ($m=1, m=2,\ m=3$) the author show examples of asymptotically optimal and optimal quadrature formulas with boundary layer and write their properties.

Key words: formulas of approximate integration, lattice quadrature formulas with boundary layer, thicken rectangle formula, thicken trapezoid rule, Gregory's formulas, functional of errors, norm of functional, asymptotically optimal formulas