Литература

1. *S. K. Das, S.U.S. Choi, W.Yu, T. Pradeep* Nanofluids: Science and Technology, John Wiley & Sons, Inc., 2008.

2. Eleftherios Papoutsakis, Doraiswami Ramkrashna and Henry C. Lim. Theextended Graetz problem with Dirichlet wall boundary conditions // Applied Scientific Research. 1980. №36. P. 13-34.

3. Nist Chemistry Webbook. URL:http://webbook.nist.gov/chemistry/.

4. *M. Nazififard, M. Nematollahi, K. Jafadpur and K. Y. Suh*, Numerical simulation of water-based Alumina Nanofliud in Subchannel Geometry.

5. *I.I. Ryzhkov*. The extended Graetz problem with prescribed wall flux for multicomponent fluids with Soret and Dufour effects // International journal of heat and masstransfer. 2013.V. 66, p. 461-471.

Investigation of forced convective heat transfer of nanofluids in a cylindrical tube

Sofya Vladimirovna Kozlova, PhD student
Ilya Igorevich Ryzhkov,Institute of Computational Modeling SB RAS
PhD, Senior researcher
Institute of Computational Modeling SB RAS

In this paper, the heat transfer in liquids and nanofluids in a cylindrical tube is investigated. The exact solution for the temperature of one-component fluid (water) is obtained. Numerical simulation of forced convection of water and water/ Al_2O_3 nanofluid is performed and the temperature distribution in the tube is found. As a re: sult, the efficiency of heat transfer in water/ Al_2O_3 nanofluid is investigated depending on nanoparticle concentration and flow velocity.

УДК 510.66; 004.83

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССУЖДЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

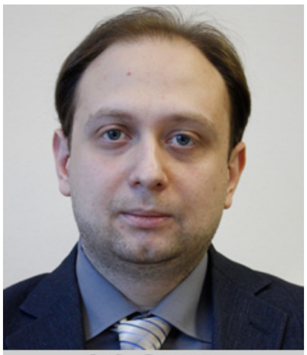
Борис Александрович Кулик*, д.ф.-м.н., с.н.с., ведущий научный сотрудник*
Тел.:+7 812 321 9007, e-mail: ba-kulik@yandex.ru
Институт проблем машиноведения РАН
http://www.ipme.ru
Александр Анатольевич Зуенко*, к.т.н., научный сотрудник*
Тел.: 8 815 557 4050, e-mail: zuenko@iimm.kolasc.net.ru
Александр Яковлевич Фридман*,д.т.н., проф., ведущий научный сотрудник*
Тел.: 8 815 557 4050, e-mail: fridman@iimm.kolasc.net.ru
Институт информатики и математического моделирования КНЦ РАН
http://www.iimm.kolasc.net.ru

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 13-07-00318-а, 12-07-00689-а, 12-07-000550-а, 12-07-00302-а), Президиума РАН (проект 4.3 Программы № 16), ОНИТ РАН (проект 2.3 текущей Программы фундаментальных научных исследований).

Среди алгебраических методов в логике широко известна алгебра логики – аналог исчисления высказываний. В качестве моделей исчисления предикатов были предложены алгебра Линденбаума-Тарского, полиадические алгебры Халмоша и др. Однако эти алгебры слишком абстрактны и трудно поддаются алгоритмизации. В данной работе рассматривается разработанная авторами алгебра кортежей, которую также можно представить как обобщение математической теории отношений.

Ключевые слова: алгебра кортежей, логический вывод, правдоподобные рассуждения, коллизии

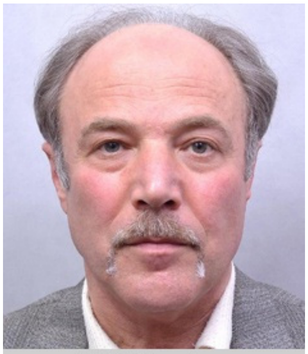
Б.А. Кулик



А.А. Зуенко

При анализе рассуждений алгебраический подход используется в основном в случаях, когда задача может быть сформулирована в рамках исчисления высказываний. В этом случае применяются средства алгебры логики, которую можно считать алгебраическим аналогом исчисления высказываний. Для моделей, у которых число значений переменных превышает 2, применяются в основном формальные методы исчисления предикатов, для которых решение находится с помощью метода резолюций [1]. Стоит отметить, что анализ рассуждений формальными методами ограничивается только рамками дедукции, и для анализа весьма распространённых в практике правдоподобных рассуждений, рекомендуется обращаться к неклассическим логикам.

Известны алгебраические представления моделей исчисления предикатов. К ним в частности относятся алгебра Линденбаума-Тарского, полиадические алгебры Халмоша, цилиндрические алгебры и др [2]. Алгебраическое представление исчисления высказываний наполнено конкретными алгоритмами решения практических задач, в то время как использование упомянутого выше алгебраического подхода в исчислении предикатов вызывает определённые трудности при моделировании конкретных рассуждений и разработке алгоритмической базы.



А.Я. Фридман

Алгебраические методы применялись и при моделировании полисиллогистики. В [3] был предложен и обоснован новый класс частично упорядоченных множеств (*E*-структуры), с помощью которых решались не только задачи вывода следствий из заданных посылок, но такие задачи как анализ корректности рассуждения, перечисление возможных гипотез и проверка их корректности, вывод возможных абдуктивных заключений. Алгебраический подход в данном случае позволил существенно расширить возможности моделирования рассуждений. Однако моделям полисиллогистики соответствует лишь небольшая часть реальных рассуждений, поэтому для расширения класса решаемых задач было бы целесообразно построить четко определённую алгебраическую систему, в которой можно не только выполнять дедуктивный анализ, но и моделировать правдоподобные рассуждения, не прибегая при этом к неклассическим логикам. Одна из таких систем, названная алгеброй кортежей (АК) [4], была разработана авторами. Особенностью АК является то, что она описывает рассуждения не с помощью общепринятого формального языка, а с помощью определенных алгебраических структур, представляющих в компактном виде области истинности высказываний и предикатов в виде отношений. Для АК разработана достаточно полная алгоритмическая база, структуры АК, имеющие матрицеподобную форму, можно использовать для эффективного распараллеливания операций.

Краткое введение в алгебру кортежей

Алгебра кортежей является алгеброй произвольных многоместных отношений и основана на свойствах декартова произведения множеств. Отношения в АК можно представить с помощью четырёх типов структур, называемых ***АК-объектами***. Каждый АК-объект погружен в определённое пространство ***атрибутов***. Имена АК-объектов содержат идентификатор, к нему добавляется заключённая в прямые скобки последовательность имён атрибутов, определяющих ***схему отношения***, в которой задан этот АК-объект. Например, запись $R[XYZ]$ означает, что пространство атрибутов АК-объекта R есть X,Y и Z.

АК-объекты являются сжатым отображением многоместных отношений. При необходимости их можно с помощью определённых алгоритмов преобразовать в обычные многоместные отношения, состоящие из множеств кортежей элементов (в АК эти кортежи называются ***элементарными кортежами***). Декартово произведение доменов атрибутов, содержащихся в схеме отношения данного АК-объекта, называется ***частным универсумом***.

Однотипные АК-объекты – это структуры, заданные в одном пространстве атрибутов. В АК можно выполнять все теоретико-множественные операции не только с однотипными отношениями, но и с отношениями, имеющими разные схемы.

АК-объекты (C-кортеж, C-система, D-кортеж, D-система) формируются в виде матриц, в которой столбцам соответствуют атрибуты. Матрицы состоят из подмножеств доменов атрибутов, называемых ***компонентами***. В их число входят две ***фиктивные компоненты***: ***полная компонента*** (обозначается «*») – это множество, равное домену соответствующего (по месту ее расположения в кортеже) атрибута; ***пустое множество*** – $\varnothing$.

Рассмотрим основные структуры АК – C-системы и D-системы.

C-система записывается в виде матрицы, ограниченной прямыми скобками, которая состоит из компонент-множеств. Например, $R[XYZ]=\begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & B_2 & * \end{bmatrix}$ есть C–система, ее можно преобразовать в обычное отношение следующим образом:

$$R[XYZ] = (A_1 \times Y \times A_3) \cup (B_1 \times B_2 \times Z).$$

С помощью C–систем удобно представлять дизъюнктивные нормальные формы конечных предикатов. C–система, состоящая из одной строки, называется ***C - кортежем*** (аналог вектор-строки в алгебре матриц). В логике C–кортежу соответствует отдельный конъюнкт.

D–система обозначается матрицей компонент-множеств, ограниченной перевернутыми прямыми скобками. С помощью D–систем можно легко вычислять дополнение C-систем. Для этого достаточно заменить все компоненты C-системы их дополнениями, а прямые скобки – на перевернутые. Так, дополнением C-системы $T[XYZ]=\begin{bmatrix} A & * & C \\ D & E & * \end{bmatrix}$ является D-система $\overline{T}[XYZ] = \left]\begin{matrix} \overline{A} & \varnothing & \overline{C} \\ \overline{D} & \overline{E} & \varnothing \end{matrix}\right[$. D-систему $\overline{T}$ можно представить в виде обычного отношения по формуле:

$$\overline{T}[XYZ] = ((\overline{A} \times Y \times Z) \cup (X \times Y \times \overline{C})) \cap ((\overline{D} \times Y \times Z) \cup (X \times \overline{E} \times Z)).$$

D-система, состоящая из одной строки, называется ***D-кортежем***. В логике D-кортежу соответствует отдельный дизъюнкт, а D-системе – конъюнктивная нормальная форма.

Правила выполнения операций объединения и пересечения для C- и D-структур имеют свою специфику, они подробно описаны в [4]. При их выполнении используются свойства декартова произведения множеств, в силу чего нет необходимости в их преобразовании в множества элементарных кортежей.

Для выполнения операций с АК-объектами, имеющими разные схемы отношений, вводятся ***операции с атрибутами***, в частности, ***добавление фиктивного атрибута*** (+*Atr*) и ***элиминация атрибута*** (–*Atr*). Операция +*Atr* соответствует ***правилу обобщения*** в исчислении предикатов, поэтому семантика отношений при ее выполнении не нарушается. Операция производится добавлением имени нового атрибута в схему отношения АК-объекта и нового столбца с фиктивными компонентами – в матричное представление. При этом в *C*-структуры добавляются фиктивные компоненты «*», а в *D*-структуры – «$\varnothing$».

Операция –*Atr* выполняется как удаление из схемы отношения атрибута *Atr*, а из матричного представления – столбца, соответствующего этому атрибуту. Семантика этой операции зависит от типа АК-объекта: для *C*-систем она соответствует навешиванию квантора $\exists$ для соответствующей логической формулы и переменной, для *D*-систем – навешиванию квантора $\forall$. Вычисление ***проекций АК-объектов*** выполняется как элиминация соответствующих (лишних) атрибутов из *C*-систем.

Операция +*Atr* часто используется для приведения разнотипных АК-объектов к одной схеме отношения за счёт добавления недостающих атрибутов в АК-объекты. С учётом этого введены ***обобщенные операции*** ($\cap_G$, $\cup_G$ и операция дополнения), которые семантически соответствуют логическим связкам конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, и обобщённые отношения ($\subseteq_G$ и $=_G$). Доказано, что алгебра отношений с обобщёнными операциями и отношениями изоморфна обычной алгебре множеств. Тем самым в теории отношений было снято ограничение, что законы алгебры множеств выполняются только для отношений, определённых на одном и том же декартовом произведении.

Логический вывод в алгебре кортежей

В теоретических основах АК разработаны алгебраические методы решения следующих задач дедуктивного анализа:

1) проверка корректности определённого следствия *B* для заданных посылок A_i;

2) вывод возможных следствий из заданных посылок A_i с учетом семантических ограничений (например, наличие в следствии определённых переменных или их сочетаний, минимизация состава значащих переменных в следствии и т.д.).

Решение таких задач в АК основано не на правилах вывода, оптимальный порядок применения которых заранее трудно предсказать, а на определённых типовых алгоритмах. Переход к алгебраическому представлению становится понятным, если учесть, что АК-объекты моделируют область истинности логических формул.

Пусть задано множество посылок $\{A_i\}$ и предполагаемое следствие *B*. Тогда алгоритм проверки правильности следствия *B* при использовании разнотипных структур АК заключается в вычислении обобщённых пересечений и проверке обобщённого включения

$$(A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n) \subseteq_G B \qquad (1)$$

Если соотношение (1) выполняется, *B* есть следствие посылок A_i, в противном случае – нет. Из (1) следует, что вывод совокупности следствий $\{B_j\}$ из посылок A_iв АК можно выполнять, используя соотношение: для любого B_j справедливо $A \subseteq_G B_j$, где $A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$. Значит, корректное следствие из системы посылок A_i моделируется АК-объектом, являющимся надмножеством *A*. Для его построения в АК разработано несколько методов. Здесь приведём лишь два из них.

1) Вычисление проекций АК-объекта *A* наиболее просто выполнить, когда *A* является *C*-системой. Тогда B_j получаются элиминацией атрибутов из *A*. Этот метод позволяет формировать следствия с заданным набором атрибутов.

2) Если A представлено D-системой, то она преобразуется в C-систему, после чего следствия формируются по предыдущему методу. Недостаток в том, что алгоритм преобразования D-системы в C-систему в общем случае экспоненциален по вычислительной сложности, и при большой размерности Aтребуются значительные ресурсы времени.

Рассмотрим пример. Даны посылки $x \vee y$ и $y \supset z$. Можно ли из этих посылок вывести формулу, содержащую только переменные x и z? Пусть $A_1 = x \vee y$; $A_2 = y \supset z$. Переведём посылки в структуры АК:

$$A_1[XY] =]\{1\}\ \{1\}[;\quad A_2[YZ] =]\{0\}\ \{1\}[.$$

Вычислим

$$A[XYZ]=A_1[XY] \cap_G A_2[YZ] =]\{1\}\ \{1\}\ \varnothing[\cap_G]\varnothing\ \{0\}\ \{1\}[= \left]\begin{matrix}\{1\} & \{1\} & \varnothing \\ \varnothing & \{0\} & \{1\}\end{matrix}\right[.$$

Теперь необходимо вычислить проекцию $[XZ]$ для $A[XYZ]$. Поскольку A – D-система, то вначале преобразуем D-систему в C-систему согласно методу 2. В результате имеем

$$A[XYZ] = \begin{bmatrix}\{1\} & \{0\} & * \\ * & \{1\} & \{1\}\end{bmatrix}.$$

Для нахождения проекции, содержащей атрибуты X и Z, элиминируем из $A[XYZ]$ атрибут Y. Тогда получим $B[XZ] = \begin{bmatrix}\{1\} & * \\ * & \{1\}\end{bmatrix}$, что соответствует логической формуле $x \vee z$. Таким образом, доказана справедливость вывода $(x \vee y) \wedge (y \supset z) \models x \vee z$.

Предложенная система вывода облегчает построение следствий, содержащих только заданный набор атрибутов (переменных), либо показывает невозможность такого построения. Решение этой задачи с использованием правил вывода требует полного перебора вариантов.

Особенности и наглядность алгебраического подхода к логическому выводу позволяют предложить методы качественной оценки получаемых следствий. В формуле (1) АК-объект $A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$ можно считать ***наименьшим*** (по объёму понятий) ***следствием***, поскольку любое уменьшение объёма A ведёт к невыводимости полученного АК-объекта из посылок $\{A_i\}$. Для вывода следствия, отличающегося от наименьшего, необходимо увеличить объем A – это согласуется также с правилом введения дизъюнкции в натуральном исчислении [5].

Из этого правила и из соотношения (1), в частности следует, что любое добавление к A даёт формально правильное следствие. Однако многое из того, что выходит за пределы A, повышает неопределённость выводимых знаний. Например, в наименьшем следствии содержится однозначное утверждение «Завтра будет солнечная погода», но формально правильным следствием будет и утверждение «Завтра будет солнечная погода или завтра будет дождь». Отсюда ясно, что расширение A приводит к росту неопределённости следствия.

Расширение A при формировании следствий из посылок $\{A_i\}$, по-видимому, может быть полезно, когда нужно выполнить индуктивное обобщение по некоторым атрибутам – в АК для этого берутся проекции A. Так, в приведённом выше примере вывода формулы $x \vee z$из формул $x \vee y$ и $y \supset z$ в АК-объекте $A[XYZ] = \begin{bmatrix}\{1\} & \{0\} & * \\ * & \{1\} & \{1\}\end{bmatrix}$ для каждого из значений атрибута Y представлены не все варианты соотношения $x \vee z$, а при элиминации атрибута Y получается полный набор вариантов. Так, в $A[XYZ]$ для $Y = 0$ содержатся только два набора значений для X и Z: (1, 0) и (1, 1), хотя формула $x \vee z$ должна содержать ещё один набор (0, 1).

Наши исследования показали, что некоторые правила и многие примеры логического вывода при моделировании в структурах АК вычисляются с помощью взятия проекций минимального следствия, т.е. во всех этих случаях имеет место индуктивное обобщение.

Моделирование правдоподобных рассуждений

При переходе к рассуждениям, в которых существенную роль играет анализ некорректностей (например, несоответствие результатов фактам или общепринятым утверждениям), оказывается, что некорректности в современной классической логике регламентируются только формальной противоречивостью, когда из посылок выводится одновременно следствие и его отрицание. Это слишком сильное ограничение, и многие ситуации, которые в повседневной практике рассматриваются как противоречие или парадокс, не соответствуют формальной противоречивости. Например, вывод из некоторых заданных посылок двух утверждений «Все страусы летают» и «Все страусы не летают» не является формальным противоречием – из этого только следует, что страусов не существует.

Но означает ли это, что для анализа ситуаций такого рода мы должны использовать неклассическую логику? Здесь предполагается, что эту трудность можно обойти, если аналогичные ситуации рассматривать не с точки зрения формальной непротиворечивости, а с точки зрения семантической корректности. В частности, для данного примера очевидно, что рассуждение семантически некорректно, поскольку вопрос о существовании страусов не подлежит сомнению.

В качестве обобщённого критерия семантической некорректности предлагается использовать термин «коллизия». Коллизии впервые были введены при анализе рассуждений типа полисиллогистики [3]. Были определены три типа коллизий (парадокса, цикла и неадекватности).

Коллизия парадокса распознается как вывод из посылок суждения типа «всем A не присуще A», из чего следует, что $A = \varnothing$.

Коллизия цикла характеризует ситуацию, когда из посылок выводится соотношение типа $A \subseteq B \subseteq \ldots \subseteq A$, что означает эквивалентность терминов, входящих в данный цикл.

Третий тип коллизий не относится к формальным, поскольку распознается не на самой модели, а только в сравнении с моделируемым объектом. Если можно установить, что полученные следствия не соответствуют некоторым бесспорным фактам или обоснованным утверждениям, то данная семантическая некорректность называется ***коллизией неадекватности***.

В отличие от формального противоречия формальная коллизия не всегда означает семантическую некорректность. Например, для некоторой моделируемой системы полученное в результате вывода равенство $R = \varnothing$ означает отрицание существования объекта R, без которого функционирование данной системы невозможно, в то же время в другой системе, где существование R необязательно, равенство $R = \varnothing$ дает новую информацию о моделируемой системе. В первом случае система посылок требует изменений, во втором – полученный результат уточняет наше знание.

Понятие коллизии было распространено и на логические системы, выходящие за рамки силлогистики [4]. Коллизиями в этих системах могут быть следующие ситуации:

1) «Вырождение» знаний – знание оказывается тождественно ложным при вводе новых знаний. В АК эта ситуация распознается как равенство $A_1 \cap_G A_2 \cap_G \ldots \cap_G A_n = \varnothing$. В логике данная ситуация соответствует правилу Дунса Скотта «из лжи можно вывести все, что угодно».

2) «Вырождение» атрибутов – при вводе новых знаний из некоторых атрибутов исчезают элементы, без которых существование моделируемой системы невозможно или не имеет смысла.

3) При вводе новых знаний некоторые различные атрибуты становятся тождественными по составу элементов, что в некоторых случаях противоречит семантике системы (аналог коллизии цикла).

4) Несоответствие полученных результатов с трудно формализуемыми ограничениями, описанными в постановке задачи.

Трудно предусмотреть заранее все возможные разновидности коллизий – в некоторых системах они могут быть уникальными. Предложим следующее краткое их определение.

Коллизии – это ситуации, которые возникают в пересматриваемых рассуждениях при вводе новых знаний (гипотез) и распознаются как нарушение некоторых формально выраженных правил или ограничений, регулирующих целостность или смысловое содержание системы.

Рассмотрим пример из [6]. Речь там идёт о так называемом парадоксе Никсона, в котором утверждается, что президент Никсон был одновременно квакером (т.е. по умолчанию пацифистом) и республиканцем (т.е. по умолчанию не пацифистом). В [6] этот парадокс выражен с помощью заданных по умолчанию правил типа

P: $J_1,\ldots,J_n$ / C,

где P – предпосылка, C – заключение, а $J_1,\ldots,J_n$ – обоснования: если можно доказать, что любое из них ложно, то заключение вывести нельзя. Тогда парадокс выражается с помощью одного утверждения (S) и двух правил с умолчаниями – (R1) и (R2):

(S) $\mathit{Republican}(\mathit{Nixon}) \wedge \mathit{Quaker}(\mathit{Nixon})$

(R1) $\mathit{Republican}(x)$: $\neg \mathit{Pacifist}(x)$ / $\neg \mathit{Pacifist}(x)$

(R2) $\mathit{Quaker}(x)$: $\mathit{Pacifist}(x)$ / $\mathit{Pacifist}(x)$

В то же время, если использовать рассмотренный выше подход, этот парадокс можно сформулировать как утверждение (S), а вместо правил вывода с умолчаниями проверить гипотезу: (H) $(\mathit{Republican}(x) \supset \neg \mathit{Pacifist}(x)) \wedge (\mathit{Quaker}(x) \supset \mathit{Pacifist}(x))$.

Выразим посылку (S) и гипотезу (H) посредством АК-объектов и найдем их обобщенное пересечение, выбрав следующие атрибуты *N* – *Nixon*, *R*–*Republican*, *Q*–*Quaker*, *P*– *Pacifist*. Учитывая, что предложение (S) можно выразить в виде формулы $(\mathit{Nixon} \supset \mathit{Republican}) \wedge (\mathit{Nixon} \supset \mathit{Quaker})$, получим следующие АК-объекты для (S) и (H):

$\mathrm{S}[NRQ] = \left]\begin{matrix} \{0\} & \{1\} & \varnothing \\ \{0\} & \varnothing & \{1\} \end{matrix}\right[$; $\mathrm{H}[RQP] = \left]\begin{matrix} \{0\} & \varnothing & \{0\} \\ \varnothing & \{0\} & \{1\} \end{matrix}\right[$. Далее выполним вычисления (промежуточные расчеты не показаны)

$$\mathrm{S}[NRQ] \cap_G \mathrm{H}[RQP] = \left]\begin{matrix} \{0\} & \{1\} & \varnothing & \varnothing \\ \{0\} & \varnothing & \{1\} & \varnothing \end{matrix}\right[\cap \left]\begin{matrix} \varnothing & \{0\} & \varnothing & \{0\} \\ \varnothing & \varnothing & \{0\} & \{1\} \end{matrix}\right[= \begin{bmatrix} \{0\} & \{0\} & * & \{1\} \\ \{0\} & * & \{0\} & \{0\} \end{bmatrix}.$$

В полученной *C*-системе атрибут *Nixon* представлен только негативными значениями, что соответствует коллизии парадокса для этого атрибута. Данная коллизия свидетельствует о семантической некорректности, поэтому возникает необходимость уточнить правильность утверждения (S) или гипотезы (H), используя дополнительную информацию, т.е., по сути, выполнить семантический анализ ситуации.

Целесообразность использования коллизий в пересматриваемых рассуждениях вместо немонотонных правил вывода диктуется следующими соображениями:

1) по содержанию коллизии более широки и более конкретны по сравнению с ситуациями, моделируемые средствами немонотонных логик, поэтому их использование позволяет осуществить семантический анализ информации в большем объеме;

2) соединение в одной системе логического анализа различных логик влечет ряд трудностей. В частности, в [6] отмечается, что для систем с большим числом заданных

правил по умолчанию трудно определить, каковым является приемлемое множество таких правил, следствием чего является отсутствие модульности.

Использование коллизий позволяет дать формальное определение гипотез в терминах АК. Пусть задана система посылок $A_1, \ldots, A_n$, представленных как АК-объекты, и вычислен АК-объект $A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$.

Гипотезой называется АК-объект H, удовлетворяющий двум условиям:

1) $A \subseteq_G H$ не подтверждается (в противном случае в соответствии с (1) H есть следствие);

2) при добавлении H в качестве посылки к $A_1, \ldots, A_n$ не возникает коллизий.

Первое условие можно выразить иначе: $A \setminus_G H \neq \varnothing$. Во втором условии предполагается, что гипотеза играет роль аксиомы или посылки. Рассмотрим пример.

В занимательной книге известного логика Раймонда Смаллиана [7] есть серия задач об узнике, который должен был, используя определённые подсказки, определить, в какой из комнат находится принцесса, и открыть эту комнату. Сложность заключается в том, что, по крайней мере, в одной из комнат находился тигр, встреча с которым для узника явно нежелательна. В то же время встреча с принцессой сулит узнику не только освобождение, но и возможность жениться на принцессе. Задачи, которая приведена в этом примере, в книге Смаллиана нет, но ситуация аналогичная.

Перед узником три комнаты. В одной из них находится тигр, в другой – принцесса, а третья комната пуста. Узнику даны две подсказки, причём одна из них истинная, а другая ложная, но какая именно – неизвестно.

Подсказка 1: во второй комнате нет тигра, а третья комната не пуста.

Подсказка 2: первая комната не пуста, а во второй нет тигра.

Коллизией будем считать ситуации, когда в разных комнатах одинаковое содержимое (тигр, принцесса или пустая комната).

Выразим подсказки в виде C-кортежей. Для этого введём обозначения: P – в комнате принцесса; T – в комнате тигр; E – комната пуста.

Тогда подсказки M_1 и M_2 можно выразить как C-кортежи:

$$M_1 = [* \; \{P, E\} \; \{P, T\}]; \quad M_2 = [\{P, T\} \; \{P, E\} \; *].$$

Для решения задачи достаточно исследовать две гипотезы:

Гипотеза 1: M_1 – истинно; M_2 – ложно;

Гипотеза 2: M_1 – ложно; M_2 – истинно.

Рассмотрим первую из них. Эта ситуация может быть описана с помощью следующих выражений:

$$\overline{M_2} =]\{E\} \; \{T\} \; \varnothing[= \begin{bmatrix} \{E\} & * & * \\ * & \{T\} & * \end{bmatrix}.$$

$$M_1 \cap \overline{M_2} = [* \; \{P, E\} \; \{P, T\}] \cap \begin{bmatrix} \{E\} & * & * \\ * & \{T\} & * \end{bmatrix} = [\{E\} \; \{P, E\} \; \{P, T\}].$$

Если вычислить декартово произведение $\{E\} \times \{P, E\} \times \{P, T\}$, то окажется, что из четырёх полученных элементарных кортежей только один – (E, P, T) – не является коллизией. Следовательно, принцесса во второй комнате.

Теперь проверим вторую гипотезу.

$$\overline{M_1} =]\varnothing \; \{T\} \; \{E\}[= \begin{bmatrix} * & \{T\} & * \\ * & * & \{E\} \end{bmatrix}.$$

$$\overline{M_1} \cap M_2 = \begin{bmatrix} * & \{T\} & * \\ * & * & \{E\} \end{bmatrix} \cap [\{P, T\} \; \{P, E\} \; *] = [\{P, T\} \; \{P, E\} \; \{E\}].$$

Здесь условиям задачи удовлетворяет элементарный кортеж (T, P, E), который хоть и отличается от полученного ранее, но оставляет неизменным местонахождение принцессы. Таким образом, обе гипотезы приводят к одному результату: принцесса находится во второй комнате.

Рассмотрим методы поиска абдуктивных заключений. ***Абдукция*** – это процесс формирования объясняющей гипотезы, когда известны посылки и предполагаемое следствие, которое при формальной проверке не следует из посылок, но, тем не менее, подтверждается фактами или обоснованными аргументами. Прототип абдукции – задача диагностики.

Дадим формальное определение абдукции. Пусть $A_1, \ldots, A_n$– посылки, из которых предположительно должно следовать утверждение B. При этом оказывается, что соотношение $A \subseteq_G B$, где $A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$,не подтверждается. Тогда формула H будет допустимым абдуктивным заключением, если соблюдаются два условия:

1) H– корректная гипотеза (т.е. $H \cap_G A$не содержит коллизий);

2) $(H \cap_G A) \subseteq_G B$(т.е. при добавлении Hв систему посылок предполагаемое следствие B становится выводимым).

С учётом сказанного сформируем следующий

Алгоритм поиска абдуктивных заключений:

1. Вычислить «остаток» $R = A \setminus_G B$;

2. Построить промежуточный объект R_iтакой, чтобы соблюдалось $R \subseteq_G R_i$;

3. Вычислить $H_i = \overline{R_i}$ (тогда R_i далее можно обозначить как $\overline{H_i}$);

4. Вычислить $H_i \cap_G A$ и выполнить проверку на наличие коллизий; если коллизии обнаружены, то возвратиться к шагу 2, иначе конец алгоритма.

Рассмотрим пример[8]. Проверить правильность логического вывода для следующего рассуждения: «Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжёт. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжёт. Следовательно, Смит был убийцей». Сначала выразим данное рассуждение на языке исчисления высказываний. Введём обозначения:

A – Джонс встречал этой ночью Смита;
B – Смит был убийцей;
C – Джонс лжёт;
D – убийство имело место после полуночи.

Тогда заданное рассуждение можно сформулировать так:

- первое предложение: $\neg A \supset (B \oplus C)$;
- второе предложение: $\neg B \supset (\neg A \wedge D)$;
- третье предложение: $D \supset (B \oplus C)$;
- следствие: B.

Преобразуем первые три предложения так, чтобы избавиться в них от импликации и строгой дизъюнкции. Получаем:

$$1)\ \neg A \supset (B \oplus C) = A \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C);$$
$$2)\ \neg B \supset (\neg A \wedge D) = B \vee (\neg A \wedge D);$$
$$3)\ D \supset (B \oplus C) = \neg D \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C).$$

Для представления этих формул АК-объектами используем универсум $X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4 = \{0, 1\}^4$, где $A = B = C = D = 1$ и $\neg A = \neg B = \neg C = \neg D = 0$. Тогда посылки, которые являются ДНФ, выражаются C-системами:

$$P_1 = \begin{bmatrix} \{1\} & * & * & * \\ * & \{1\} & \{0\} & * \\ * & \{0\} & \{1\} & * \end{bmatrix};\ P_2 = \begin{bmatrix} * & \{1\} & * & * \\ \{0\} & * & * & \{1\} \end{bmatrix};\ P_3 = \begin{bmatrix} * & * & * & \{0\} \\ * & \{1\} & \{0\} & * \\ * & \{0\} & \{1\} & * \end{bmatrix},$$

а следствие – C-кортежем $S[X_2] = [\{1\}]$.

Для решения задачи необходимо проверить соотношение

$$(P_1 \cap_G P_2 \cap_G P_3) \subseteq_G S[X_2].$$

Сначала вычислим:

$$P[X_1X_2X_3X_4] = P_1 \cap_G P_2 \cap_G P_3 = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ * & \{1\} & \{0\} & * \\ \{0\} & \{0\} & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}.$$

Для проверки включения добавим недостающие атрибуты в S:

$$S[X_1X_2X_3X_4] = [*\ \{1\}\ *\ *].$$

Проверка показывает, что третий C-кортеж из P не включен в S, то есть вывод неверный. Ясно, что предполагаемое следствие (Смит был убийцей) не выводимо. Чтобы подтвердить или опровергнуть правильность вывода, требуется уточнить некоторые обстоятельства. Поиск таких обстоятельств можно сформулировать как задачу поиска абдуктивного заключения.

Предположим, что вывод правильный. Тогда необходимо найти подходящие гипотезы, которые можно использовать в качестве посылок. Запишем в новых обозначениях промежуточные результаты примера.

Пересечение посылок: $A[X_1X_2X_3X_4] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ * & \{1\} & \{0\} & * \\ \{0\} & \{0\} & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}$;

предполагаемое следствие: $B[X_1X_2X_3X_4] = [*\ \{1\}\ *\ *]$.

Далее используем алгоритм.

1. $R = A \setminus_G B = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ * & \{1\} & \{0\} & * \\ \{0\} & \{0\} & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix} \cap_G [*\ \{0\}\ *\ *] = [\{0\}\ \{0\}\ \{1\}\ \{1\}]$.

2. Здесь можно выбрать в качестве R_i любую проекцию R. Пусть это будет $R[X_4]$. Тогда получим $R_i = [*\ *\ *\ \{1\}]$.

3. $H_i = \overline{R_i} = [*\ *\ *\ \{0\}]$.

4. Поскольку коллизии нам не заданы, проверим, вырождается ли общая предпосылка A при полученной гипотезе:

$$A \cap_G H_i = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ * & \{1\} & \{0\} & * \\ \{0\} & \{0\} & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix} \cap_G [*\ *\ *\ \{0\}] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ * & \{1\} & \{0\} & \{0\} \end{bmatrix}.$$

Проверка подтверждает корректность гипотезы. На естественном языке данная гипотеза означает, что убийство произошло до полуночи. Отсюда следует, что вывод будет правильным, если после уточнения времени убийства окажется, что оно соответствует гипотезе.

Заключение

Использование алгебраического подхода на основе алгебры кортежей при моделировании рассуждений позволяет, помимо дедуктивного анализа, применять некоторые модели правдоподобных рассуждений, не нарушая при этом законы классической логики.

В настоящее время ведутся исследования в области применения алгебры кортежей для моделирования и анализа неопределённостей в рассуждениях.

Литература

1. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. – М.: Наука, 1983. – 360 с.

2. *Плоткин Б.И.* Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных. – М.: Наука, 1991. – 448 с.

3. *Кулик Б.А.* Логика естественных рассуждений. – СПб., 2001. – 128 с.

4. *Кулик Б.А., Зуенко А.А., Фридман А.Я.* Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний. – СПб.: изд-во Политехн. ун-та, 2010.– 235 с.

5. *Генцен Г.* Исследования логических выводов//Математическая теория логического вывода: сб. переводов. – М.: Наука, 1967. С. 9-74.

6. *Рассел С., Норвиг П.* Искусственный интеллект: современный подход. –2-е изд. / пер. с англ./ ред. К. А. Птицына. –М.: изд. дом «Вильямс», 2006. – 1408 с.

7. *Смаллиан Р.* Принцесса или тигр? – М.: Мир, 1985. – 221 с.

8. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику / пер. с англ. Ф.А. Кабакова / под ред. С.И. Адяна. – М.: Наука, 1971. – 320 с.

Algebraic methods to model reasoning

Boris Alexanrovich Kulik,Dr.Sci. (Math.), leading scientific researcher,
Institute of Problems in Mechanical Engineering of RAS

Alexander Anatol'evich Zuenko,Ph.D. (Tech.), scientific researcher

Alexander YakovlevichFridman,Dr.Sci. (Tech.), leading scientific researcher,
Institute for Informatics and Mathematical Modelling of Technological Processes of RAS

Boolean algebra is a widely known algebraic method in logic. This algebra is a counterpart of the propositional calculus. To model the predicate calculus, Lindenbaum-Tarski algebra, polyadic Halmos algebra and other algebras were proposed. However, these algebras are too abstract and complicated for algorithmization. In the given paper, we describe our n-tuple algebra that can be thought of as a generalization of mathematical theory of relations.

Keywords: n-tuple algebra, logical inference, defeasible reasoning, collisions

УДК 735.29

О ВЛИЯНИИ ШКАЛЫ НА РЕЗУЛЬТАТЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА В МЕТОДОЛОГИИ AHP Т. СААТИ

***Никита Сергеевич Бескорсый**, аспирант*
Тел.: 903 922 5020, e-mail: besn1989@gmail.com
***Борис Васильевич Олейников**, канд. филос. н., доц.,*
доц. базовой кафедры вычислительных и информационных технологий
Тел.: (902)990-25-97, e-mail: oleynik48@mail.ru
Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирский Федеральный Университет
http://www.sfu-kras.ru

В статье рассмотреновлияния шкалы на результаты многокритериального выбора в методологии AHP (AnalyticHierarchyProcess) Томаса Саати. Рассматриваются вопросы перехода к различным шкалам при решении прямой и обратной задач Саати. Исследуются результаты таких переходов на примере решения задачи проверки классификации.