

Предложение 2: Если выполнены условия (5), то оператор W_{Δ} аппроксимирует оператор W_{Ψ} в том смысле, что $\|W_{\Delta}[\Phi_{\Delta}(f)] - \Phi_{\Delta}(W_{\Psi}[f])\|_{\infty} \approx 0$.

Сформулированное предложение означает коммутативность диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{W_{\Psi}} & W_{\Psi}[f] \\ \downarrow \Phi_{\Delta} & & \downarrow \Phi_{\Delta_1} \\ \Phi_{\Delta}[f] & \xrightarrow{W_{\Delta}} & W_{\Delta}(\Phi_{\Delta}[f]) \end{array}$$

Данная теорема показывает, что непрерывное вейвлет-преобразование (1) можно аппроксимировать гиперконечным дискретным преобразованием при указанных выше условиях, налагаемых на сигнал, вейвлет и шаг дискретизации. На стандартном языке это означает, что при выполнении условий: $\Delta M \rightarrow \infty$ и $\Delta^2 M$ ограничено.

$$\lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \left(\Delta \cdot \frac{1}{|a|^{1/2}} \cdot \sum_{m=-M}^M f(\Delta m) \cdot \overline{\psi\left(\frac{\Delta m - k\beta\sigma^r}{\sigma^r}\right)} \right) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \cdot \int_{\mathbf{R}} f(t) \cdot \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt.$$

то есть вместо непрерывного сигнала можно взять таблицу его значений при достаточной мелкой сетке, а непрерывное вейвлетное преобразование заменить его конечномерным аналогом. При этом расхождение в результатах будет невелико.

Интересным является вопрос о восстановлении сигнала f по его образу при конечномерном вейвлетном преобразовании, однако этот вопрос пока не изучен.

Литература

1. Гордон Е.И. Инфинитезимальный анализ. В 2 ч. Ч. 2 / Е.И. Гордон, А.Г. Кусраев, С.С. Кутателадзе. – Новосибирск: изд-во Ин-та математики, 2001. – 247 с.
2. Гордон Е.И. О преобразовании Фурье в нестандартном анализе // Изв. вузов. Математика. 1989. №2. С. 17-25.
3. Здорovenko М.Ю. О гиперконечной аппроксимации преобразования Фурье // Деп. в ВИНТИ. 1994. № 691. В. 94. – 10 с.
4. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике / В.П. Дьяконов. – М.: Солон-Р, 2002. – 448 с.

Approximation of wavelet operator by its hyperfinite analogy

Marina Yur'evna Zdorovenko, Ph.D., associate Professor
Vyatka State University, Kirov.

The article deals with the problem of approximation of wavelet operator by its hyperfinite analogy. This problem is studied by the method of the non-standard analysis. It is proved that the hyperfinite wavelet operator is a bounded operator, its norm is less or equal to 1 and this operator approximates the continuous wavelet operator.

Keywords: wavelet operator, tabular approximation, hyperfinite operator.

УДК 28.17.19

МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ ГРУППЫ КРОВИ У РЕБЁНКА В СИСТЕМЕ АВ0

Виктор Григорьевич Кирий, профессор

Тел.: (3952)405107, e-mail: kiriy@istu.edu

Иркутский государственный технический университет, г. Иркутск

<http://www.istu.edu>

В статье предлагается использование математической модели в форме цепей Маркова для анализа процесса формирования группы крови у ребёнка в системе АВО. Приведены вероятностные зависимости финальных вероятностей и времени формирования групп крови от активности антигенов А и В.

Ключевые слова: Марковская модель, антигены А и В, сочетания групп крови родителей, финальные вероятности, время формирования, дисперсия, среднее значение.



В.Г. Курий

В работах [1-3] приведена таблица формирования группы крови у ребёнка в зависимости от группы крови родителей.

Группа крови – это взаимодействие двух антигенов А (доминантный ген) и В (рецессивный ген).

Согласно этому утверждению, процесс образования группы крови – это процесс взаимодействия двух противоположностей и, следовательно, он может быть описан с использованием теории амбивалентных систем [4].

Первая группа крови 1(0) – отсутствие антигенов; вторая группа крови 2(А) – наличие антигена А; третья группа крови 3(В) – наличие антигена В; четвертая группа крови 4(АВ) – смесь двух антигенов А и В, т.е. смесь двух противоположностей.

Таблица 1

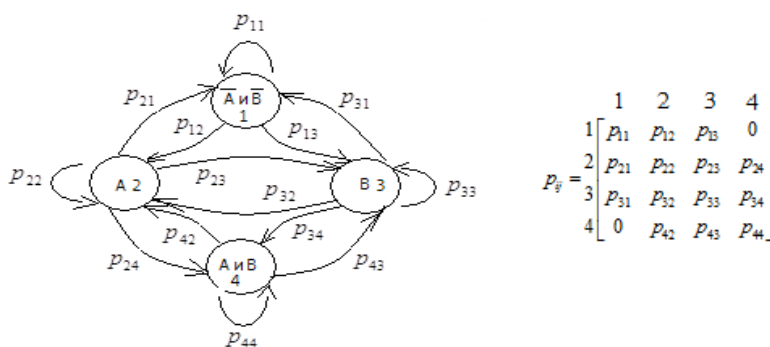
Таблица наследования группы крови ребенком в зависимости от группы крови матери и отца

Мама+папа	1гр.	2гр.	3гр.	4гр.
1+1	1(100%)	-	-	-
1+2	1(50%)	2(50%)	-	-
1+3	1(50%)	-	3(50%)	-
1+4	-	2(50%)	3(50%)	-
2+2	1(25%)	2(75%)	-	-
2+3	1(25%)	2(25%)	3(25%)	4(25%)
2+4	-	2(50%)	3(25%)	4(25%)
3+3	1(25%)	-	3(75%)	-
3+4	-	2(25%)	3(50%)	4(25%)
4+4	-	2(25%)	3(25%)	4(50%)

В данной статье предлагается Марковская модель процесса формирования групп крови у ребёнка для разных сочетаний групп крови родителей.

Рассмотрим процесс формирования при сочетании второй и третьей групп крови у родителей. Как известно, в этом случае образуется первая, вторая, третья и четвертая группа крови. В известных источниках по этому вопросу не учитывается влияние активности антигенов А и В на процесс формирования.

Нами предлагается модель такого процесса в виде цепи Маркова, для которой граф и матрица переходов имеет следующий вид:



Для нахождения финальных вероятностей применяем уравнения Маркова

$$P_1 = P_1 P_{11} + P_2 P_{21} + P_3 P_{31}$$

$$P_2 = P_1 P_{12} + P_2 P_{22} + P_3 P_{32} + P_4 P_{42}$$

$$P_3 = P_1 P_{13} + P_2 P_{23} + P_3 P_{33} + P_4 P_{43}$$

$$P_4 = P_2 P_{24} + P_3 P_{34} + P_4 P_{44}$$

$$1 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

Решая полученную систему алгебраических уравнений, находим зависимости финальных вероятностей от параметров процесса формирования групп крови у эмбриона при сочетании второй и третьей групп крови родителей.

$$\begin{aligned}
 p_2 &= \frac{1}{1 + c_1 + c_2 + \frac{p_{24}}{1 - p_{44}} + \frac{p_{34}}{1 - p_{44}} c_2} \\
 c_1 &= \frac{p_{21}(1 - p_{33})(1 - p_{44}) - p_{21}p_{34}p_{43} + p_{31}p_{23}(1 - p_{44}) + p_{24}p_{31}p_{43}}{(1 - p_{11})(1 - p_{33})(1 - p_{44}) - (1 - p_{11})p_{34}p_{43} - p_{31}p_{13}(1 - p_{44})} \\
 c_2 &= \frac{c_1 p_{13}(1 - p_{44}) + p_{23}(1 - p_{44}) + p_{24}p_{43}}{(1 - p_{33})(1 - p_{44}) - p_{34}p_{43}} \\
 p_1 &= c_1 p_2 \\
 p_3 &= c_2 p_2 \\
 p_4 &= 1 - c_1 p_2 - p_2 - c_2 p_2 = 1 - (1 + c_1 + c_2) p_2
 \end{aligned}$$

В качестве конкретного примера сделаем расчёт финальных вероятностей для следующей матрицы переходов:

$$p_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.4 & 0 \\ 0.1 & 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

$$c_1 = 0.64, c_2 = 0.52, p_2 = 0.353, p_1 = 0.224, p_3 = 0.182, p_4 = 0.241$$

Можно показать, что финальные вероятности зависят от вероятностей перехода и, следовательно, зависят от активности антигенов **A** и **B**, что не учитывается в различных публикациях по проблеме формирования групп крови. Далее покажем, что время формирования также зависит от сочетания групп крови и от активности антигенов.

Согласно теории регулярных Марковских цепей [5] время, за которое цепь впервые попадает в любое состояние из начального состояния конечно, и определяется с помощью матрицы **M** средних времен достижения.

$$M = (I - Z + EZ_{dg})D,$$

где **D**-диагональная матрица с диагональными элементами $d_{ii} = 1/\alpha_{ii}$, α_{ii} - диагональные элементы финальной матрицы **A**,

I - единичная матрица,

Z - фундаментальная матрица для регулярной цепи Маркова

$$Z = (I - (P - A))^{-1}$$

Z_{dg} - матрица, полученная из матрицы **Z** заменой всех элементов, не лежащих на главной диагонали, нулями,

E - матрица, все элементы которой равны единице.

В качестве конкретного примера приведём расчет матрицы **M** для выше рассмотренного процесса формирования группы крови ребёнка (1).

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4.54 & 6.33 & 3.07 & 12.99 \\ 9.13 & 2.85 & 5.92 & 11.42 \\ 6.11 & 5.44 & 5 & 10.75 \\ 10.77 & 6.92 & 5.15 & 4.34 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Учитывая, что в начальном состоянии вероятности второй и третьей групп крови родителей равны 0.5, получаем, что среднее время формирования первой группы у ребенка равно $0.5 \cdot 9.13 + 0.5 \cdot 6.11 = 7.7$ единиц времени, среднее время формирования второй группы у ребенка равно $0.5 \cdot 2.85 + 0.5 \cdot 5.44 = 4.1$ единиц времени, среднее время формирования третьей группы у ребенка равно $0.5 \cdot 5.92 + 0.5 \cdot 5.0 = 5.46$ и среднее время формирования четвертой группы у ребенка равно $0.5 \cdot 11.42 + 0.5 \cdot 10.75 = 6.1$.

Как видим время формирования существенно зависит от активности антигенов *A* и *B*. Для сравнения приведем расчет матрицы *M* для другой матрицы переходов, приведённой ниже.

$$p_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2)$$

Как видим, время формирования для первой и четвертой групп крови отличается от времени формирования для второй и третьей групп.

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4.0 & 4.0 & 4.0 & 8.0 \\ 6.0 & 4.0 & 4.0 & 6.0 \\ 6.0 & 4.0 & 4.0 & 6.0 \\ 8.0 & 4.0 & 4.0 & 4.0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Учитывая, что в начальном состоянии вероятности второй и третьей групп крови родителей равны 0.5, получаем, что среднее время формирования первой и четвертой группы у ребёнка равно 6.0 единицам времени, среднее время формирования второй и третьей группы у ребёнка равно 4.0 единицам времени.

Представляет интерес найти дисперсию моментов первого достижения, матрица дисперсий вычисляется по следующим формулам [5]:

$$M_2 = W - M_{sq}$$

$$W = M(2Z_{dg}D - I) + 2(ZM - E(ZM)_{dg}),$$

где M_{sq} – матрица, полученная из *M* возведением в квадрат каждого элемента.

Найдём численные значения дисперсии для конкретного примера с матрицей перехода (2).

Матрица дисперсии для этого случая равна

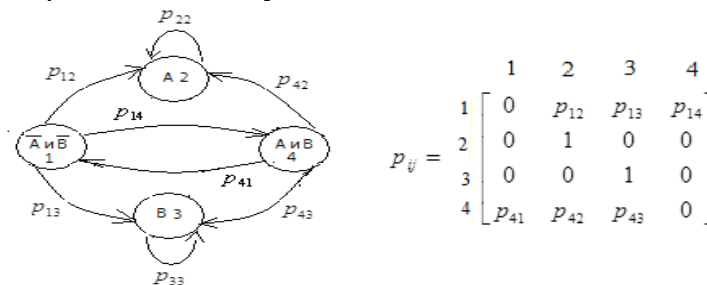
$$M_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 32 & 16 & 16 & 48 \\ 44 & 16 & 16 & 44 \\ 44 & 16 & 16 & 44 \\ 48 & 16 & 16 & 32 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Матрица среднеквадратических отклонений

$$\sigma = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5,65 & 4 & 4 & 6,98 \\ 6,6 & 4 & 4 & 6,6 \\ 6,6 & 4 & 4 & 6,6 \\ 6,98 & 4 & 4 & 5,65 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Учитывая, что начальные вероятности второго и третьего состояния равны 0.5, получаем, что разброс среднего времени формирования для 1-й и 4-й группы равен 6.6 единиц времени и для второй и третьей групп равен 4 единицам времени. Как известно, такое соотношение между средним временем и среднеквадратическим отклонением характерно для показательного закона распределения вероятностей времени наступления события.

Рассмотрим процесс формирования группы крови из сочетания *I+4*. Как известно, в результате такого сочетания эти группы крови исчезают, а вместо них появляются вторая или первая группа крови. Ниже представлен граф такого взаимодействия и матрица переходов, которые имеют следующий вид:



$$p_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

В отличие от предыдущего сочетания, данная цепь Маркова не является регулярной, а относится к классу поглощающих цепей.

Для такого рода цепей классическая форма матрицы имеет следующий вид:

$$P_{i\bar{j}} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix},$$

где I - единичная матрица, 0 - нулевая матрица, R - матрица поглощения, Q - матрица эргодических состояний.

$$P_{\bar{j}\bar{i}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ \hline p_{12} & p_{13} & | & 0 & p_{14} \\ p_{42} & p_{43} & | & p_{41} & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Для такой цепи фундаментальная матрица имеет следующий вид:

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -p_{14} \\ -p_{41} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - p_{14}p_{41}} & \frac{p_{14}}{1 - p_{14}p_{41}} \\ \frac{p_{41}}{1 - p_{14}p_{41}} & \frac{1}{1 - p_{14}p_{41}} \end{pmatrix}$$

Каждый элемент фундаментальной матрицы показывает среднее время пребывания в j -м состоянии, если цепь выходит из i -го состояния.

Зная матрицу N можно найти среднее время до поглощения в i -м состоянии, если цепь выходит из j -го состояния. Для этого умножим фундаментальную матрицу на единичный вектор столбец:

$$\tau = N \cdot 1 = \begin{pmatrix} \frac{1 + p_{14}}{1 - p_{14}p_{41}} \\ \frac{1 + p_{41}}{1 - p_{14}p_{41}} \end{pmatrix}$$

Зная матрицу N , находим матрицу вероятностей состояний поглощения цепи B , для чего умножаем фундаментальную матрицу на матрицу поглощения:

$$B = N \cdot R = \begin{pmatrix} \frac{p_{12} + p_{14}p_{41}}{1 - p_{14}p_{41}} & \frac{p_{13} + p_{14}p_{43}}{1 - p_{14}p_{41}} \\ \frac{p_{41}p_{12} + p_{42}}{1 - p_{14}p_{41}} & \frac{p_{41}p_{13} + p_{43}}{1 - p_{14}p_{41}} \end{pmatrix}$$

В качестве конкретного примера найдем характеристики для процесса формирования группы крови ребенка из сочетания 1+4 групп крови родителей при следующей матрице переходов:

$$P_{\bar{j}\bar{i}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ \hline 0,3 & 0,3 & | & 0 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & | & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1.19 & 0.476 \\ 0.476 & 1.19 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1.66 \\ 1.66 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

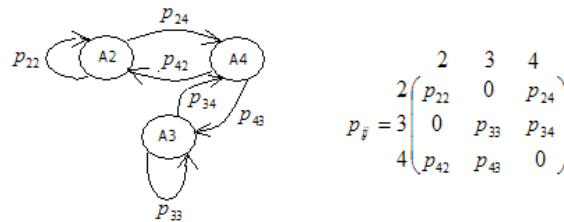
Из вектора τ видно, что время формирования второй и третьей групп крови одинаково и равно 1.66 единиц времени. Вероятности получения второй и третьей групп крови также одинаковы и равны 0.5. Эти данные получаются только при условии, что активности антигенов A и B одинаковы.

Для сравнения приведем расчеты при разных значениях активности антигенов, содержащихся в четвертой группе крови.

$$P_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

При условии, что в начальном состоянии вероятности первой и четвертой групп крови одинаковы и равны 0.5, получаем, что вероятность появления второй группы у ребёнка равна 0.675, а вероятность появления третьей группы равна 0.325, т.е. ещё раз подтверждается вывод, что вероятности появления группы крови у эмбриона зависят от активности антигенов. Такой же вывод можно сделать и относительно времени формирования группы крови.

Для сочетания 2+4 и 3+4 предлагается следующая Марковская модель, граф и матрица переходов для которых имеют следующий вид:



$$P_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} p_{22} & 0 & p_{24} \\ 0 & p_{33} & p_{34} \\ p_{42} & p_{43} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Данная цепь Маркова является регулярной цепью и для неё можно найти финальные вероятности получения групп крови ребенком из уравнений Маркова:

$$\begin{aligned} p_2 &= p_2 p_{22} + p_4 p_{42} \\ p_3 &= p_3 p_{33} + p_4 p_{43} \\ p_4 &= p_2 p_{24} + p_3 p_{34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{p_{34} p_{42}}{(1 - p_{22} - p_{24} p_{42})(1 + p_{34}) + (1 + p_{24}) p_{34} p_{42}} \\ p_3 &= \frac{1 - p_2(1 + p_{24})}{1 + p_{34}} \\ p_4 &= \frac{(1 - p_{22}) p_2}{p_{42}} \end{aligned}$$

Исходя из этих уравнений, можно найти такие вероятности переходов для сочетания 2+4 и 3+4, при которых финальные вероятности равны вероятностям, указанных в приведенной выше таблице 1 наследования групп крови.

Для сочетания 2+4: Для сочетания 3+4:

$$P_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad P_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

В первом случае финальные вероятности равны $p_2 = 0.5$ $p_3 = p_4 = 0.25$

Во втором случае финальные вероятности равны $p_3 = 0.5$ $p_2 = p_4 = 0.25$.

Также как и для других сочетаний представляет интерес найти среднее время формирования групп крови, т. е. матрицу M .

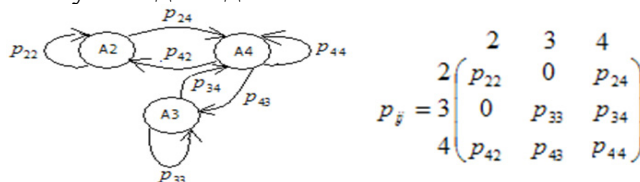
$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 10 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 10 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Принимая во внимание то, что начальные вероятности сочетания групп крови равны 0,5 получаем окончательно, что :

- для сочетания 2+4 среднее время формирования для 2-й группы равно 2 единицам времени, для третьей группы равно 8 единицам времени и для 4-й группы 4 единицам времени;

- для сочетания 3+4 среднее время формирования для 3-й группы равно 3 единицам времени, для второй группы равно 8 единицам времени и для 4-й группы равно 4 единицам времени.

Рассмотрим Марковскую модель для сочетания 4+4.



$$p_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} p_{22} & 0 & p_{24} \\ 0 & p_{33} & p_{34} \\ p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Отличие от предыдущего сочетания заключается в появлении перехода от 4-й группы в эту же группу крови.

Финальные вероятности получения групп крови равны:

$$p_4 = \frac{1}{1 + \frac{p_{42}}{1-p_{22}} + \frac{p_{43}}{1-p_{33}}}$$

$$p_2 = p_4 \frac{p_{42}}{1-p_{22}}$$

$$p_3 = p_4 \frac{p_{43}}{1-p_{33}}$$

Для получения финальной вероятности для 4-й группы крови равной 0.5, как указано в таблице 1 наследования групп крови, из приведённых уравнений получаем, что вероятности перехода в матрице должны удовлетворять условию:

$$\frac{p_{42}}{1-p_{22}} + \frac{p_{43}}{1-p_{33}} = 1$$

Если активности антигенов *A* и *B*, находящихся в 4-й группе крови одинаковы, т.е. $p_{42} = p_{43}$, тогда

$$p_{42} = 0.5(1-p_{22})$$

$$p_{43} = 0.5(1-p_{33})$$

и $p_{22} = 0.5, p_{33} = 0.5, p_{42} = 0.25, p_{43} = 0.25$. Матрица переходов в этом случае равна

$$p_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

При других значениях активности антигенов получаются другие вероятности получения групп крови. В таблице 2 приведены значения вероятности получения 4-й, 3-й и 2-й групп крови при изменении активности антигенов *A* и *B* и при $p_{22} = 0.5, p_{33} = 0.5$.

Таблица 2

$p_{42} = p_{43}$	1/10	1/5	1/4	1/3	1/2
p_4	5/7	5/9	1/2	3/7	1/3
p_3	1/7	2/9	1/4	2/7	1/3
p_2	1/7	2/9	1/4	2/7	1/3

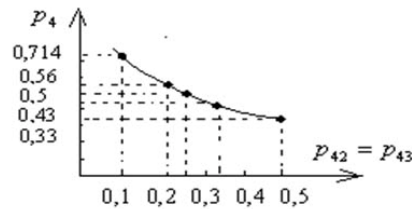


Рис.1. Зависимость вероятности формирования 4-й группы крови от активности антигенов А и В

В таблице 3 приведены значения вероятностей формирования указанных групп крови при разных значениях интенсивности антигенов А и В и при $p_{22} = 0.5, p_{33} = 0.5$.

Таблица 3

p_{42}	0,1	0,2	0,3	0,3
p_{43}	0,2	0,3	0,4	0,2
p_4	0,625	0,5	0,416	0,5
p_2	0,125	0,2	0,2496	0,3
p_3	0,25	0,3	0,3328	0,2

Таким образом, ещё раз подтверждается вывод, что вероятности получения той или иной группы крови зависят от активности антигенов.

Найдем матрицу М средних времен первого достижения указанных состояния для случая, когда вероятность получения 4-й группы равна 0,5.

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 8 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Так как начальная вероятность для 4-й группы равна 1, то из матрицы М видим, что время формирования 2-й и 3-й групп крови равно 6 единицам времени, а среднее время формирования 4-й группы крови равно 2 единицам времени.

Найдем матрицу дисперсий времени формирования для такого сочетания групп крови.

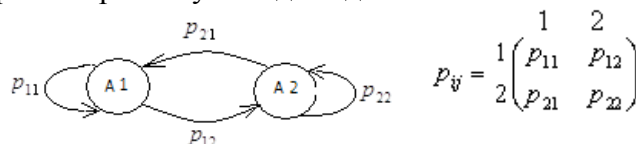
$$M_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 28 & 40 & 2 \\ 40 & 28 & 2 \\ 38 & 38 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Матрица среднеквадратических отклонений времени формирования для такого сочетания равна:

$$\sigma = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 5,3 & 6,3 & 1,4 \\ 6,3 & 5,3 & 1,4 \\ 6,2 & 6,2 & 1,4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Как видим, среднее время формирования примерно равно среднеквадратическому отклонению, что приводит к выводу о том, что закон распределения вероятности для времени формирования групп крови близок к экспоненциальному. Очевидно, что параметр этого закона для каждой группы крови будет разным и, также, зависит от активности антигенов А и В.

Рассмотрим Марковскую модель для сочетания 2+2.



Финальные вероятности равны:

$$p_1 = 1 - p_2$$

$$p_2 = \frac{p_{12}}{p_{21} + p_{12}}$$

Если принять условие, что вероятность получения второй группы равна 0,75 (взято из таблицы 1), то получаем следующее соотношение между вероятностями переходов

$$p_{21} = \frac{1}{3} p_{12}$$

и, тогда матрица переходов равна:

$$P_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 - 3p_{21} & 3p_{21} \\ p_{21} & 1 - p_{21} \end{pmatrix}$$

На рис.2 представлен график зависимости вероятности формирования 2-й группы от значений вероятностей переходов.

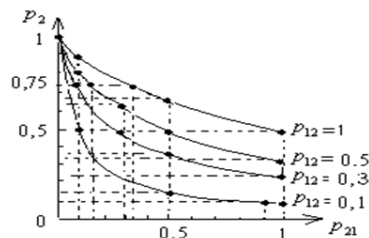


Рис.2. График зависимости P_2 от p_{21} и от p_{12} .

Значение вероятности для второй группы равной 0,75 получается при различных значениях p_{21} , например, при $p_{21}=0,25$ ($p_{12} = 0,75$) и при $p_{21}=0,33$ ($p_{12} = 1,0$). Но, если при первом значении $p_{21}=0,25$ время формирования второй группы крови равно одной единице времени, то при втором значении $p_{21}=0,33$ время формирования равно уже 1,3 единицам времени:

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 1,3 \end{pmatrix}$$

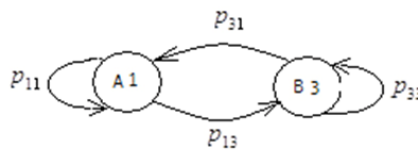
Матрица дисперсий времен формирования для 1-й и 2-й групп крови равна

$$M_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \\ 6 & 0,24 \end{pmatrix}$$

Матрица среднеквадратических отклонений времен формирования для 1-й и 2-й групп крови равна

$$\sigma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2,45 & 0 \\ 2,45 & 0,49 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим Марковскую модель для сочетания 3+3



$$p_1 = 1 - p_3$$

$$p_3 = \frac{p_{13}}{p_{31} + p_{13}}$$

Если принять условие, что вероятность получения третьей группы равна 0,75, как указано в таблице 1, то получаем следующее соотношение между вероятностями переходов

$$p_{31} = \frac{1}{3} p_{13}$$

$$p_{ij} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1-3p_{31} & 3p_{31} \\ p_{31} & 1-p_{31} \end{pmatrix}$$

Значение вероятности для третьей группы равной 0,75 получается при различных значениях p_{31} , например, при $p_{31}=0,25$ и при $p_{31}=0,33$. Но, если при первом значении $p_{31}=0,25$ время формирования третьей группы крови равно одной единице времени, то при втором значении $p_{31}=0,33$ время формирования равно уже 1,3 единицам времени:

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1,3 \end{pmatrix}$$

Матрица дисперсий времен формирования для 1-й и 3-й групп крови равна

$$M_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 0,24 \end{pmatrix}$$

Матрица среднеквадратических отклонений времен формирования для 1-й и 3-й групп крови равна

$$\sigma = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2,45 & 0 \\ 2,45 & 0,49 \end{pmatrix}$$

Согласно полученным результатам, как для сочетания 2+2 так и для сочетания 3+3, закон распределения вероятностей для времени формирования групп крови уже не подчиняется показательному закону и, очевидно, имеет другой вид.

Литература

1. Группа крови ребенка. [Электронный ресурс]. URL: www.missfit.ru/berem/blood
2. Словари и энциклопедии на академике. [Электронный ресурс]. URL: dic.academic.ru/dic.nsf/enc_medicine/9727/Группы
3. Группы крови человека / Б.Ф. Садыков. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.biorepet-ufa.ru/osnovy-genetiki/gruppy-krovi-cheloveka.html>
4. Кирий В.Г. Теория амбивалентных систем и её применение. – Иркутск:изд-во ИрГТУ, 2012. – 157с.
5. Дж. Кемени, Дж. Снелл. Конечные цепи Маркова. – М.: Наука, 1970. – 186 с.

The Markov model of the process of formation of the blood group of a child in the system AB0

Victor Grigor'evich Kiriy, Professor

National Research Irkutsk State Technical University, Irkutsk

The article shows the use of the mathematical model in the form of Markov chains to analyze the process of formation of the blood group of a child in the system AB0. Probabilistic dependencies of the final probabilities and time of formation of blood groups on the activity of the antigens A and B are given.

Keywords: Markov model, A and B antigens, parents' blood groups combinations, final probability, time of formation, dispersion, average value.