УДК 53.088.6 + 62-50

СИНТЕЗ РЕКУРРЕНТНЫХ АЛГОРИТМОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ НА БАЗЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ

Андрашитов Дмитрий Сергеевич,
кандидат технических наук,
e-mail: dima-andrahitov@rambler.ru,
доцент кафедры математики и информатики,
Московский университет им. С.Ю. Витте,
+7 (495) 500-03-63,
https://www.muiv.ru

Предложены алгоритмы параметрической идентификации, которые отличаются от традиционных решений за счет использования вариационного принципа в процедуре синтеза. Их эффективность подтверждается результатами математического моделирования задачи идентификации параметров акселерометра.

Ключевые слова: динамическая система, математическая модель, параметрическое оценивание, обратная измерительная задача

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-06-00486 А

Введение

Стремление к миниатюризации и снижению стоимости современных измерительных преобразователей и датчиков привело к тому, что технология MEMS – компонентов находит широкое применение в различных областях радиоэлектроники.

Использование MEMS датчиков в автомобильной технике позволило улучшить функциональность и надежность его систем, в том числе, систем безопасности водителя и пассажиров. В компьютерной и бытовой технике они применяются в качестве устройств контроля, обеспечивающих оптимальную работу его блоков [1].

Однако наибольший интерес вызывают микроэлектромеханические датчики угла поворота и перемещения (гироскопы и акселерометры), магнитометры и датчики давления. Их применение в медицинской и спортивной технике в качестве кардиостимуляторов, дефибрилляторов, нейростимуляторов, счетчиков калорий и измерителей пульса, систем жизнеобеспечения выводит их практическую значимость на новый уровень [1; 2].

Эффективность использования инерционных MEMS-датчиков напрямую зависит от адекватности математической модели, максимально соответствующей реальной системе и точности определения параметров измерительных сигналов [3; 4]. Первое решается применением для построения модели дифференциальных уравнений высших порядков. Оценивая, повысить точность позволяют алгоритмы идентификации, которые легко разрешимы с использованием мощностей современных вычислительных систем.

В этих условиях новое направление развития получили алгоритмы параметрической идентификации на базе вариационных принципов и методов регуляризации. Особенностью данных алгоритмов выступает гипотеза в отношении протекающих динамических процессов, которая состоит в том, что они удовлетворяют принципу Гамильтона-Остроградского. Это позволило синтезировать целый ряд эффективных в плане точности и скорости сходимости к истинным значениям алгоритмов идентификации [9–13].

Общая постановка задачи для данных алгоритмов заключается в построении расширенного функционала, учитывающего через множитель Лагранжа невязку в виде действия по Гамильтону. Дальнейшее исследование приращения полученного функционала при условии его минимизации позволяет построить уравнения процедуры параметрической идентификации. Отличие в постановке синтезируемых алгоритмов заключается в построении модели динамики процесса идентификации параметров.

Цель исследований – провести анализ влияния модели динамики процесса идентификации синтезированных алгоритмов параметрической идентификации на базе вариационных принципов и методов регуляризации на точность и скорость сходимости к оцениваемым параметрам.

Результаты исследования следует подтвердить математическим моделированием путем сравнения их с классическим фильтром.

1 Постановка задачи

Пусть изменение состояния динамической системы происходит под действием вектора причинных характеристик Q, имеющего смысл обобщенных сил. При этом выполняется принцип Гамильтона-Остроградского для интеграла действия [6]

$$\delta' W = \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T\left(q, \dot{q}\right) + \delta' A\left(q, \dot{q}\right)\right) dt = 0\,, \tag{1}$$

где T – кинетическая энергия динамической системы;

$q, \dot{q}$ – выходные переменные состояния – вектора обобщенных координат и скоростей размерности n;

A – работа обобщенных внешних сил;

t_0, t_1– время начала и окончания процесса;

δ' – знак, обозначающий бесконечно малую величину, не являющуюся вариацией.

Из требования (1) следует математическая модель протекающих в информационно – управляющей системе процессов в форме дифференциального уравнения Лагранжа второго рода [6]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T\left(q, \dot{q}\right)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T\left(q, \dot{q}\right)}{\partial q} = Q(q, \dot{q}, z), \quad Q \in L_2^n\left[t_0, t_1\right]. \tag{2}$$

Пусть форма уравнения (2) известна и определяется следующим выражением:

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, z, t), \quad q(t_0) = q(0), \quad \dot{q}(t_0) = \dot{q}(0)\,, \tag{3}$$

где $z \in R^n$ – вектор неизвестных параметров;

k – натуральное число, определяющее количество неизвестных параметров;

f – вектор-функция, непрерывная вместе со своими частными производными.

Уравнение измерения имеет вид:

$$y = H(q, t) + n(t)\,, \tag{4}$$

где $y \in Rk$– вектор измерений;

$H(q,t)$ – непрерывная вместе с частными производными вектор-функция;

k – натуральное число, определяющее количество измерительных каналов информационно-управляющей системы;

$n(t)$ – вектор белого гауссовского шума с известными локальными характеристиками.

$$M[n(t)] = 0, \quad M[n(t)n^{\mathrm{T}}(\tau)] = \frac{1}{2} N\,\delta(t-\tau)\,,$$

где N – матрица односторонней спектральной плотности шума измерения;

δ(·) – векторная дельта-функция.

Требуется определить вектор оценок $\hat{z}$ параметров z динамической системы (3) из условия минимума функционала невязки:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left[y - H\left(\hat{q}(\hat{z}, t)\right)\right]^{\mathrm{T}} N^{-1}\left[y - H\left(\hat{q}(\hat{z}, t)\right)\right] dt \to \min\,. \tag{5}$$

Поставленная задача идентификации параметров динамических систем (3) – (5) является обратной, некорректно поставленной [7 – 9, 10].

2 Синтез алгоритмов параметрической идентификации

Рассматриваются два подхода к решению поставленной задачи. В рамках первого подхода предполагается, что динамика процесса идентификации параметров z удовлетворяет следующему векторному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\dot{z} = u, \quad z(t_0) = z(0), \tag{6}$$

где u – вектор неизвестных неслучайных возмущений, удовлетворяющий требованиям физической реализуемости $u \in L_2^m[t_0, t_1]$;

m – натуральное число, определяющее количество параметров измерительного преобразо-вателя.

Для решения задачи (3)–(5) при ограничениях (1), (6), следующих из принятых допущений о дина-мике протекающих процессов в (2), предлагается воспользоваться известной процедурой регуляризации А.Н. Тихонова и методом неопределенных множителей Лагранжа. Тогда расширенный целевой функционал принимает вид

$$J^*[z,q] = J + \mu W + \alpha \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} u^{\mathrm{T}}(t)u(t)dt, \tag{7}$$

где α – параметр регуляризации.

Минимизация (7) позволяет получить необходимое условие экстремума в форме двухточеч-ной краевой задачи. Ее решение требует использования процедуры инвариантного погружения, что приводит к уравнениям вариационного метода многопараметрической идентификации [4, 7]

$$\begin{gathered}
\dot{\hat{z}} = PG^{\mathrm{T}}\frac{\partial H^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{q}}N^{-1}\left(y - H\left(\hat{q}(\hat{z}),t\right)\right), \quad \hat{z}(t_0) = z(0),\\
\dot{P} = \alpha^{-1}\cdot I - PG^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial \hat{q}}\left\{\frac{\partial H^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{q}}N^{-1}\left(y - H\left(\hat{q}(\hat{z}),t\right)\right)\right\}GP, \quad P(t_0) = P(0),\\
\ddot{G} = \frac{\partial f}{\partial \dot{\hat{q}}}\dot{G} + \frac{\partial f}{\partial \hat{q}}G + \frac{\partial f}{\partial \hat{z}}, \quad \dot{G}(t_0) = \dot{G}(0), G(t_0) = G(0),\\
\ddot{\hat{q}} = f(\dot{\hat{q}},\hat{q},z) - \mu^{-1}\frac{\partial H^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{q}}N^{-1}\left(y - H\left(\hat{q}(\hat{z}),t\right)\right), \quad \dot{\hat{q}}(t_0) = \dot{q}(0), \quad \hat{q}(t_0) = q(0),
\end{gathered} \tag{8}$$

где P – матрица размера m×m;

μ – множитель Лагранжа;

G – матрица чувствительности системы (3) по вектору параметров z.

Постановка задачи идентификации во втором случае отличается тем, что динамика процесса идентификации параметров z удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{z} = u, \quad z(t_0) = z(0), \quad \dot{z}(t_0) = \dot{z}(0) \tag{9}$$

для которого также справедлив принцип Гамильтона-Остроградского. В соответствии с ним

$$\delta' R = \int_{t_0}^{t_1}\left(\delta\theta(z,\dot{z}) + \delta' a(z,\dot{z})\right)\mathrm{d}t = 0, \tag{10}$$

где θ – аналог кинетической энергии для динамики параметров;

$$\delta' a = \sum_{i=1}^{m}\theta_i \delta z_i \text{ – работа возмущения.}$$

Тогда для задачи (3)–(5) при ограничениях (1), (10), следующих из принятых допущений о динамике протекающих процессов (2), (9), поиск необходимых условий минимума (5) осуществля-ется на основе аппарата негладкого анализа методом объединенного принципа максимума из условия минимума расширенного целевого функционала [5, 8–11]

$$J^{**}[z,q] = J + \mu W + \lambda R, \tag{11}$$

где λ – множитель Лагранжа. В результате получен алгоритм идентификации следующего вида:

$$\begin{gathered}
\ddot{\hat{z}} = \lambda^{-1}\left(\frac{-\left|\dot{\hat{z}}\right|\dot{\hat{z}}}{L\left|\hat{z}\right|} - N^{-1}G\frac{\partial H}{\partial \hat{q}}\left(y - H(\hat{q}(\hat{z}),t)\right)\right), \quad \hat{z}(t_0) = \hat{z}(0), \quad \dot{\hat{z}}(t_0) = \dot{\hat{z}}(0),\\
\ddot{G} = \frac{\partial f}{\partial \dot{\hat{q}}}\dot{G} + \frac{\partial f}{\partial \hat{q}}G + \frac{\partial f}{\partial \hat{z}}, \quad \dot{G}(t_0) = \dot{G}(0), G(t_0) = G(0),
\end{gathered} \tag{12}$$

$$\ddot{\hat{q}} = \hat{f}(\dot{\hat{q}},\hat{q},z) - \mu^{-1}N^{-1}\frac{\partial H^T}{\partial \hat{q}}\left(y - H(\hat{q}(\hat{z}),t)\right), \quad \hat{q}(t_0) = \hat{q}(0), \quad \dot{\hat{q}}(t_0) = \dot{\hat{q}}(0), \tag{12}$$

где L – константа Липшица.

Пусть уравнения (2) описывают динамику процессов, протекающих в MEMS – акселеро-метре и представлены следующим образом [3]:

$$m\ddot{q}(t) + z_0\dot{q}(t) + z_1 q(t) = mP(t), \tag{13}$$

$$q(t_0) = 2, \quad \dot{q}(t_0) = 0, \quad m = 1,$$

где m – величина инерционной массы; z_0 – жесткость упругого элемента; z_1– коэффициент сопро-тивления; q(t) – смещение инерционной массы внутри датчика относительно нулевого положения в рассматриваемой системе координат; $P(t) = sin(t)$, $mP(t) = Q(t)$ – ускорение движения объекта [1]. Подобными уравнениями описывается подавляющее большинство датчиков, применяемых в авто-, аэро- и космической технике [1–4].

Уравнение измерения имеет вид:

$$y(t) = q(z_0, z_1, t)\,. \tag{14}$$

Требуется оценить параметры жесткости $z_0 = 2$ и сопротивления $z_1 = 5$ из условия минимума целевого функционала

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} N^{-1}\left\{y(t) - \hat{q}(z_0, z_1, t)\right\}^2 dt \to \min, \tag{15}$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 2000,$$

характеризующего точность измерений.

Обозначив $q_0 = q$, $q_1 = \dot{q}$ и применив процедуру расширения состояния, запишем (8) как

$$\dot{\hat{z}} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_{00} & G_{01} \\ G_{10} & G_{11} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} N^{-1}\left(y - \hat{q}_0\right), \quad \hat{z}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$\dot{P} = \begin{bmatrix} \alpha^{-1} & \alpha^{-1} \\ \alpha^{-1} & \alpha^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_{00} & G_{01} \\ G_{10} & G_{11} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix} -N^{-1}\left[G_{00}P_{00} + G_{01}P_{10}\right] & -N^{-1}\left[G_{00}P_{01} + G_{01}P_{11}\right] \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P(t_0) = 10\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 10 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\dot{G} = \begin{bmatrix} G_{10} & G_{11} \\ G_{00}\hat{z}_0 - \hat{q}_1 + G_{10}\hat{z}_1 & G_{01}\hat{z}_0 - \hat{q}_0 + G_{11}\hat{z}_1 \end{bmatrix}, G(t_0) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\hat{q}} = \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ -\hat{z}_0\hat{q}_1 - \hat{z}_1\hat{q}_0 - mP - \mu^{-1}N\left(y - \hat{q}_0\right) \end{bmatrix}, \hat{q}(t_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Обозначив $x_0 = z_0, x_1 = \dot{z}_0, x_2 = z_1, x_3 = \dot{z}_1$ и применив процедуру расширения состояния, запишем (12) в виде:

$$\dot{\hat{z}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \lambda^{-1}\left[\dfrac{-|\hat{x}_1|\hat{x}_1}{L_0|\hat{x}_0|} - N^{-1}G_0\left(y - \hat{q}_0\right)\right] \\ \hat{x}_3 \\ \lambda^{-1}\left[\dfrac{-|\hat{x}_3|\hat{x}_3}{L_0|\hat{x}_2|} - N^{-1}G_1\left(y - \hat{q}_0\right)\right] \end{bmatrix}, \hat{z}(t_0) = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \\ 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$\dot{G} = \begin{bmatrix} G_{10} & G_{11} \\ G_{00}\hat{x}_0 - \hat{q}_1 + G_{10}\hat{x}_2 & G_{01}\hat{x}_0 - \hat{q}_0 + G_{11}\hat{x}_2 \end{bmatrix}, G(t_0) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\hat{q}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ -\hat{x}_0\hat{q}_1 - \hat{x}_2\hat{q}_0 - Q - \mu^{-1}N^{-1}\left(y - \hat{q}_0\right) \end{bmatrix}, \hat{q}(t_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3 Результаты математического моделирования

Результаты математического моделирования процесса идентификации параметров z_0 и z_1 для исследуемых методов (8), (12) и фильтра Калмана [12] приведены на рисунке 1.

Начальные условия для моделирования приняты следующие: λ = 0.9, α = 0.9, μ = 0.79, $L_0 = 0.9 \times 10^{-3}$, $L_0 = 0.05 \times 10^{-3}$, $N = 0.5$.

При t = 1200 определена относительная погрешность идентификации первого и второго параметров, которая равна 2.09%, 0.88% соответственно для исследуемого метода (8); 4.22%, 0.02% для метода (12) и 12.7%, 3.8% для фильтра Калмана. При этом как видно из рисунков скорость сходимости оценок к их действительным значениям у разработанных авторами алгоритмов идентификации выше, чем у фильтра Калмана.

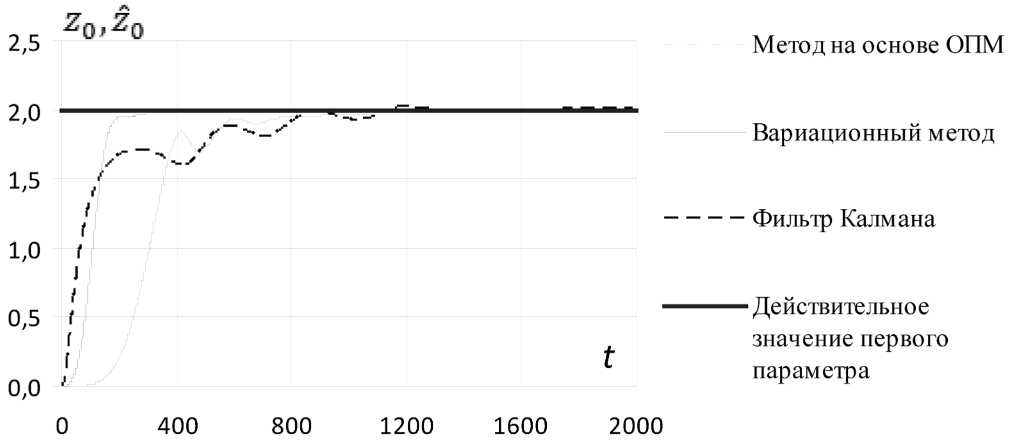

Рисунок 1 – Процесс оценки параметров $\hat{z}_0$

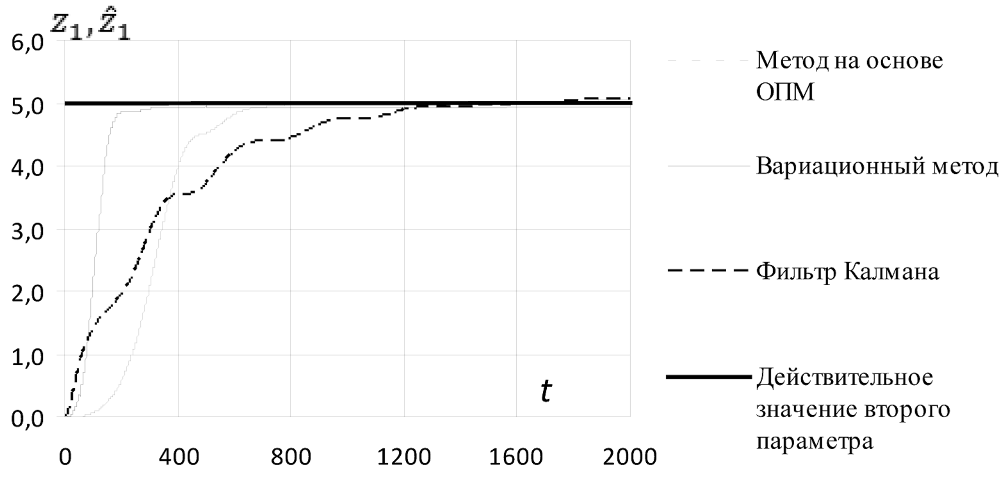

Рисунок 2 – Процесс оценки параметров $\hat{z}_1$

Синтезированные алгоритмы превосходят фильтр Калмана по критерию точности в условиях малых ошибок измерений. Это подтверждается результатами математического моделирования, приведенного в [13].

Вывод. Таким образом, математическое моделирование доказало конструктивность предла-гаемого подхода. Использование принципа Гамильтона-Остроградского позволяет синтезировать эффективные с точки зрения скорости сходимости и ошибок оценивания в условиях, когда уровень погрешности измерений не превышает 15%, алгоритмы параметрической идентификации MEMS-датчиков.

Новизной работы следует считать синтезированные алгоритмы оценивания параметров на базе вариационных принципов, практическая значимость которых заключается в повышении точ-ности идентификации параметров MEMS-датчиков.

Данные исследования применимы в области радиоэлектроники.

Список литературы

1. *Гавриков В.* Универсалы для быта и промышленности: новая линейка MEMS-гироскопов от MAXIM // Новости электроники. – 2013. – № 10. – С. 14–19.
2. *Барулина М.А., Панкратов В.М.* Моделирование динамических процессов в микромехани-ческих датчиках инерциальной информации и их компонентах с помощью специализиро-ванного программного обеспечения // Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – Т. 14. – № 2. – С. 223–231.
3. *Диденко В.А., Поленко В.Н., Бондаренко А.Ф.* Математическая модель MEMS – акселеро-метра // Сборник трудов Донбасского государственного технического университета. – 2011. – № 35. – С. 21 – 30.
4. *Вавилов В.Д., Волков В.Л., Улюшкин А.В.* Оптимизация параметров микромеханического акселерометра // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. – 2010. – № 3 (82). – С. 308–314.
5. *Андрашитов Д.С.* и др. Метод коррекции динамической погрешности акселерометра с те-кущей идентификацией его параметров на основе объединенного принципа максимума / Д.С. Андрашитов, И.В. Дерябкин, А.А. Костоглотов, С.В. Лазаренко, Б.М. Ценных // Радио-техника. – 2014. – № 12. – С. 17–24.
6. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 453 с.
7. *Шаврин В.В., Конаков А.С., Тисленко В.И.* Калибровка микроэлектромеханических датчи-ков ускорений и угловых скоростей в бесплатформенных инерциальных навигационных системах // Электроника, измерительная техника, радиотехника и связь. – 2012. – № 1 (25). – С. 265–269.
8. *Андрашитов Д.С.* и др. Синтез алгоритма автономного управления математическим маятником на основе объединенного принципа максимума / Д.С. Андрашитов, И.В. Дерябкин, А.А. Костоглотов, А.А. Кузнецов, С.В. Лазаренко // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2010. – № 3. – С. 9–14.
9. *Андрашитов Д.С.* и др. Многопараметрическая идентификация конструктивных па-раметров методом объединенного принципа максимума [Электронный ресурс] / Д.С. Андрашитов, А.А. Костоглотов, А.И. Костоглотов, С.В. Лазаренко // Инженерный вестник Дона: [сайт]. [2011]. URL: http://www.ivdon.ru/magazine/issue/97?page=2 (дата обращения 08.08.2013).
10. *Андрашитов Д.С.* и др. Многопараметрическая вариационная идентификация дина-мических систем на основе объединенного принципа максимума / Д.С. Андрашитов, А.А. Костоглотов, А.И. Костоглотов, С.В. Лазаренко // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2012. – № 4. – С. 68–76.
11. *Андрашитов Д.С.* и др. Вариационный метод многопараметрической идентификации дина-мических систем на основе итерационной регуляризации / Д.С. Андрашитов, И.В. Деряб-кин, А.А. Костоглотов, С.В. Лазаренко // Успехи современной радиоэлектроники. – 2012. – № 6. – С. 67–72.
12. *Сейдж Э.П., Мелс Д.Л.* Идентификация систем управления. – М.: Наука, 1974. – 246 с.
13. *Андрашитов Д.С.* и др. Анализ функционирования алгоритмов параметрической идентифи-кации информационно-управляющих систем, удовлетворяющих принципу Гамильтона-Остроградского / Д.С. Андрашитов, И.В. Дерябкин, А.А. Костоглотов, С.В. Лазаренко // Динамика сложных систем – XXI век. – 2014. – Т. 8. – № 2. – С. 90–95.

SYNTHESIS OF RECURRENT ALGORITHMS FOR PARAMETRIC IDENTIFICATION BASED ON VARIATIONAL PRINCIPLES

Andrashitov Dmitry Sergeevish,
candidate of technical sciences,
e-mail: dima-andrahitov@rambler.ru,
associate professor of the Department of mathematics and informatics,
Moscow University S.U. Witte,
+7 (495) 500-03-63,
https://www.muiv.ru

Proposals are algorithms for parametric identification, which differ from solutions for using the variational principle in the synthesis procedure. Their effectiveness is confirmed by the results of mathematical modeling of accelerometer parameters determination tasks.

Keywords: dynamic system, mathematical model, parametric estimation, inverse measurement problem