УДК 519.7

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ ВУЗА С ПРИМЕНЕНИЕМ ПОДХОДА ДИССИММЕТРИИ И АППАРАТА ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Парфенова Мария Яковлевна,
д-р техн. наук, профессор,
проректор по научной работе,
e-mail: mparfenova@muiv.ru,
Московский университет имени С.Ю. Витте

Управление образовательной системой в динамично изменяющихся внешних и внутренних условиях связано с систематической оценкой и анализом ее устойчивости и конкурентоспособности, необходимостью совершенствования механизмов управления с учетом современных требований. В работе решается научная задача по развитию математического обеспечения процессов управления образовательной системой вуза. В рамках решения научной задачи предложено применить подход диссимметрии к управлению, которая проявляется во взаимосвязи выделенных статической и динамической частей, и создание математической модели, отражающей взаимное влияние статической и динамической частей на результативность образовательной деятельности вуза. Предложена математическая модель на основе аппарата цепных дробей и дискретно-непрерывных преобразований, которая позволяет на системном уровне выявить отклонения в реализации образовательной деятельности вуза и детализировать их по уровням управления. Рассмотрены числовые примеры применения математической модели для анализа соотношения потенциалов статической и динамической частей по уровням декомпозиции в форме нормированных интегральных показателей, представленных в виде подходящих дробей и преобразованных в пространство изображений.

Ключевые слова: образовательная система, устойчивость, диссимметрия, цепные дроби, дискретно-непрерывные преобразования

MATHEMATICAL MODEL OF MANAGEMENT OF THE EDUCATIONAL SYSTEM OF THE UNIVERSITY USING THE APPROACH OF DISSYMMETRY AND THE APPARATUS OF CHAIN FRACTIONS

Parfenova M.Ya.,
doctor of technical sciences, professor,
Vice-rector for scientific,
e-mail: mparfenova@muiv.ru,
Moscow Witte University

Management of educational system in dynamically changing external and internal conditions is connected with systematic assessment and analysis of its stability and competitiveness, necessity of improvement of management mechanisms taking into account modern requirements. The paper solves the scientific problem of improvement of mathematical support of the processes of management of the educational system of the University. Within the framework of solving the scientific problem, it is proposed to apply the approach of dissymmetry to management, which is manifested in the relationship of the selected static and dynamic parts, and the creation of a mathematical model that reflects the mutual influence of static and dynamic parts on the effectiveness of educational activi-

ties of the University. A mathematical model based on the apparatus of chain fractions and discrete-continuous transformations, which allows at the system level to identify deviations in the implementation of educational activities of the University and detail them at the levels of management, is proposed. Numerical examples of application of mathematical model for the analysis of the ratio of potentials of static and dynamic parts on levels of decomposition in the form of the normalized integral indicators presented in the form of suitable fractions and transformed into space of images are considered.

Keywords: educational system, stability, dissymmetry, chain fractions, discrete-continuous transformations

DOI 10.21777/2500-2112-2019-3-57-64

Объект управления образовательной системы рассматривается в виде взаимодействующих статической и динамической частей [5]. Компоненты статической части определяют устойчивость образовательного процесса в условиях внутренних и внешних возмущающих воздействий. Компоненты динамической части направлены на развитие и поддержание уровня конкурентоспособности. В образовательной системе вуза в качестве статической части рассматривается обеспечение требований к условиям, которые вуз должен создавать для достижения студентами предполагаемых результатов обучения, под динамической частью рассматривается процесс управления образовательной деятельностью, направленный на адаптацию образовательной системы вуза к изменяющимся условиям и ее развитие [6]. Образовательная система вуза может быть декомпозирована на подсистемы управления отдельными образовательными программами, реализация которых в настоящее время определяется требованиями ФГОС и профессиональных стандартов. В ходе управления образовательной программой статическая часть характеризуется показателями выполнения требований ФГОС к условиям реализации образовательной программы. Динамическая часть характеризуется результирующими показателями образовательной деятельности. Целевые функции образовательной системы вуза реализуются путем взаимодействия статической и динамической частей в ходе образовательной деятельности. Принадлежность отдельных компонент к статической или динамической части не является неизменной во времени, а также может меняться в зависимости от цели управления и уровня декомпозиции системы.

В работе рассматривается подход диссимметрии к управлению, направленный на поддержание устойчивости и конкурентоспособности образовательной системы. В рамках данного подхода определяется уровень подвижного равновесия нормированных интегральных показателей статической и динамической частей [5]. В текущих ситуациях производится анализ влияния статической и динамической частей на образовательный процесс и оценка степени рассогласования их потенциалов (интегральных показателей). Под рассогласованием уровней потенциалов рассматривается разность между интегральными показателями, характеризующими текущее состояние статической и динамической частей. В зависимости от уровня рассогласования формируются управленческие решения, направленные на достижение заданного уровня состояния в статической части для обеспечения устойчивости образовательного процесса, или на изменение целевой функции динамической части в направлении развития и адаптации образовательной системы к новым внешним условиям.

Моделирование взаимного влияния статической и динамической частей на устойчивость образовательной системы в целом на начальном этапе выполняется в дискретном пространстве. Для выявления скрытых закономерностей дискретные модели трансформируются в непрерывное пространство изображений с применением дискретно-непрерывных преобразований [1]. В едином непрерывном пространстве изображений исследуется изменение нормированных интегральных показателей и взаимное влияние статической и динамической частей на образовательный процесс и устойчивость системы в целом. Для статической и динамической частей определяются интегральные показатели в соответствии с уровнями декомпозиции на основе построенных системы показателей, дерева критериев и формализованного информационного пространства. Несоответствие нормированных интегральных показателей, характеризующих уровень потенциалов взаимодействующих частей, отражает их влияние на устойчивость образовательной системы в целом. Для сопоставления уровней потенциалов и определения уровня их подвижного равновесия применим аппарат цепных дробей [4].

Каждому вещественному числу a соответствует единственная цепная дробь, имеющая это число своим значением [4, 7]. Таким образом, соотношение уровней потенциалов взаимодействующих частей в соответствии с их декомпозицией, представленных в виде весовых функций, можно выразить в виде конечной цепной дроби:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2} + \dots + \cfrac{1}{a_n}} \tag{1}$$

или в виде

$$[\,a_0; a_1, a_2, \dots, a_n\,]. \tag{2}$$

Элементами $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ представляются соотношения уровней потенциалов статической и динамической частей в соответствии с уровнями обобщения показателей. В случае, если в (2) все элементы равны единице, то (1) отображает отношение равных потенциалов, что характеризует устойчивое состояние образовательной системы вуза. Для нуль-членной цепной дроби $[a_0] = a_0$ принимается цепная дробь $a_0/1$.

Всякая конечная цепная дробь представляет собою результат конечного числа рациональных действий над ее элементами, поэтому конечная цепная дробь выражает собою либо вещественное, либо рациональное число. Всякая конечная цепная дробь как результат конечного числа рациональных действий над ее элементами есть рациональная функция этих элементов и, следовательно, может быть представлена как отношение двух многочленов:

$$\frac{D(a_0; a_1, a_2, \dots, a_n)}{Q(a_0; a_1, a_2, \dots, a_n)},$$

относительно $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ с целыми коэффициентами.

Цепная дробь имеет $n+1$ подходящих дробей (порядков $0, 1, 2, \dots, n$), которые представляются в виде отношения многочленов:

$$\delta_k = \frac{D_k}{Q_k} = \frac{a_k d_{k-1} + d_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}, \quad k > 1. \tag{3}$$

Представление цепной дроби в виде (3) отражает иерархическое упорядочивание интегральных показателей по уровням декомпозиции. Элементы цепной дроби (3) отражают соотношение потенциалов статической и динамической частей в нормированных единицах. При начальных значениях $d_0 = 1,\ q_0 = 0$ выражение (3) представляется в виде схемы, приведенной в таблице 1.

Таблица 1 – Схема представления цепной дроби в виде подходящих дробей

a_k		a_0	a_1	a_2		…	a_{k-1}	a_k	…	a_n
D_k	1	d_1	d_2	d_3		…	d_{k-2}	d_{k-1}	…	a
Q_k	0	q_1	q_2	q_3		…	q_{k-2}	q_{k-1}	…	b

Два последних столбца в таблице 1 записываются только в том случае, когда $\alpha_n = a/b$ – несократимая рациональная дробь с положительным знаменателем. В соответствии с ситуацией, представленной в виде $[\,a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\,]$, формируются управленческие решения, определяемые значениями подходящих дробей p_k / q_k.

В методе цепных дробей выполняется при $k > 1$ по меньшей мере одно из следующих неравенств:

$$\left|\alpha - \frac{d_k}{q_k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2}, \quad \left|\alpha - \frac{d_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_{k-1}^2}, \quad \left|\alpha - \frac{d_{k-2}}{q_{k-2}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_{k-2}^2}, \tag{4}$$

где левая часть неравенств представляется разностью между отношением нормированных интегральных показателей (числом) α и его отображением d_k/q_k в форме подходящих дробей на верхний иерархический уровень системы показателей. Из (4) видно, что по знаменателю q_k можно, задаваясь значениями d_k, подобрать d_k/q_k и при $k=n$ найти рациональную несократимую дробь a/b, определяющую α.

Интегральные показатели на основе сверток межуровневой трансформации данных характеризуют определенный тип возникающих ситуаций [2, 3]. Каждый из объектов образовательной системы характеризуется своим набором показателей. Характер изменения показателей по уровням обобщения, характеризующих потенциалы статической и динамической частей, можно представить с помощью соответствующих подходящих дробей d_k и q_k в виде:

$$d_k = a_k d_{k-1} + d_{k-2},$$
$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \quad (5)$$

где a_k – элементы цепной дроби при $k \geq 2$, которые получаются как неполные частные от последовательных делений числителя на знаменатель несократимой рациональной дроби, и отражают соотношение показателей.

Для моделирования уровней динамического равновесия статической и динамической частей соответствующие исходные дискретные функции (5) трансформируются в непрерывное пространство изображений с применением дискретно-непрерывных преобразований. Дискретно-непрерывные преобразования используют универсальное распределение вероятностей Пойа $F_n(N,b;S)$ [1]. Распределение вероятностей Пойа применяется в качестве нормированного ядра дискретно-непрерывного преобразования [4], которое имеет общий вид:

$$P(N,b;S) = \sum_{n-0}^{N} F_n(N,b,;S) f_n ,$$

где n – номер испытания;

N – число испытаний;

b – параметр распределения вероятностей;

S – математическое ожидание распределения вероятностей;

f_n – исходная дискретная функция.

Для N испытаний дискретно-непрерывное преобразование представляется в виде:

$$P_n(N,b;S) = \prod_{K=0}^{N-1} \frac{1+K}{1+bK} \prod_{K=0}^{n-1} \frac{\frac{S}{N}+bK}{1+K} \prod_{K=0}^{N-1-n} \frac{1-\frac{S}{N}+bK}{1+k}, \quad n=0,\ldots,N. \quad (6)$$

Задаваясь в (6) значениями *N, b, S*, можно получить различные виды преобразований, имеющие названия от конкретных видов распределения вероятностей [1].

Например, при $N \to \infty, b=1$ получается геометрическое преобразование $P(S)_1 = \frac{1}{1+S} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{S}{1+S}\right)^n f_n$

При $N \to \infty, b=0$ получается пуассоновское преобразование $P(S)_2 = e^{-S} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^n}{n!} f_n$

Путем обобщения различных преобразований, получается дискретно-непрерывное преобразование для исходной дискретной функции в общем виде [4]:

$$P\{f(n)\} \equiv F_p(S) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\varphi^n(S) p_n\right) \{f(n)\},$$

где $\varphi^n(S)$ – ядро дискретного преобразования;

p_n – настроечная функция (в частном случае соответствует b);

$f(n)$ – исходная дискретная функция с n элементами;

S – параметр преобразования;

n – текущий номер члена под знаком суммы.

В данной работе для создания модели управления устойчивостью образовательной системы вуза применяется пуассоновское преобразование.

То есть для трансформации исходных дискретных функций (5) в пространство изображений используется пуассоновское дискретно-непрерывное преобразование:

$$P(S)_2 = e^{-S}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^n}{n!}f_n .$$

Результаты преобразования соответственно для d_k и q_k представляются в общем виде:

$$P(d_k) = e^{-S}\left(\frac{S^0}{0!}d_0 + \frac{S^1}{1!}d_1 + \frac{S^2}{2!}d_2 + \frac{S^3}{3!}d_3 + \ldots + \frac{S^k}{k!}d_k\right),$$

$$P(q_k) = e^{-S}\left(\frac{S^0}{0!}q_0 + \frac{S^1}{1!}q_1 + \frac{S^2}{2!}q_2 + \frac{S^3}{3!}q_3 + \ldots + \frac{S^k}{k!}q_k\right).$$

Исходя из (3) и с учетом начальных условий $d_0 = 1$, $d_1 = a_0$ определяются элементы d_k через коэффициенты цепной дроби $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$d_2 = a_2 + 1$, $d_3 = a_3a_2 + a_3 + a_0$, $d_4 = a_4a_3a_2 + a_4a_3 + a_4a_0 + a_2 + 1$,

$d_5 = a_5a_4a_3a_2 + a_5a_4a_3 + a_5a_4a_0 + a_5a_2 + a_5 + a_3a_2 + a_3 + a_0$,

……………………………………………………………………..

Преобразование для d_k имеет вид:

$$P(d_k) = e^{-S}\Big(1 + \frac{S^1}{1!}a_0 + \frac{S^2}{2!}(a_2+1) + \frac{S^3}{3!}(a_3a_2 + a_3 + a_0) + + \frac{S^4}{4!}(a_4a_3a_2 + a_4a_3 + a_4a_0 + a_2 + 1) + + \frac{S^5}{5!}(a_5a_4a_3a_2 + a_5a_4a_3 + a_5a_4a_0 + a_5a_2 + a_5 + a_3a_2 + a_3 + a_0) + \ldots\Big).$$

Исходя из (3) и с учетом начальных условий $q_0 = 0$, $q_1 = 1$ определяются элементы q_k через коэффициенты цепной дроби $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$q_2 = a_2$, $q_3 = a_3a_2 + 1$, $q_4 = a_4a_3a_2 + a_4 + a_2$,

$q_5 = a_5a_4a_3a_2 + a_5a_4 + a_5a_2 + 1\cdot$

…………………………………………………………

Преобразование для q_k имеет вид:

$$P(q_k) = e^{-S}\left(\frac{S^1}{1!}1 + \frac{S^2}{2!}a_2 + \frac{S^3}{3!}(a_3a_2+1) + \frac{S^4}{4!}(a_4a_3a_2 + a_4 + a_2) + + \frac{S^5}{5!}(a_5a_4a_3a_2 + a_5a_4 + a_5a_2 + 1) + \ldots\right)$$

С применением преобразований можно анализировать изменение соотношений потенциалов статической и динамической частей. Ниже рассматриваются числовые примеры представления цепной дроби через подходящие дроби.

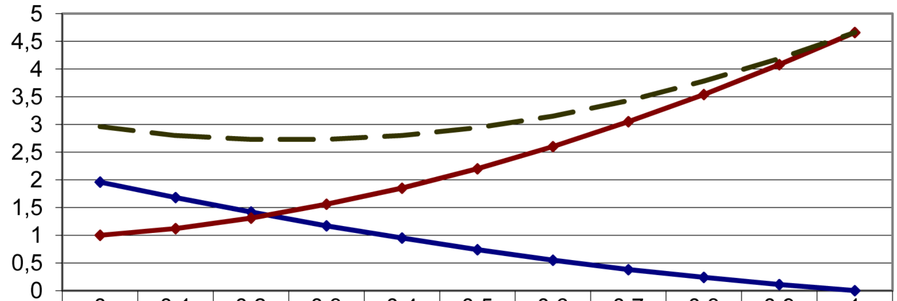
Имеется цепная дробь для соотношения величин $\frac{78}{35} \Rightarrow [2;4,2,1,2]$,

характеризующая устойчивость образовательного процесса, реализуемого в рамках исследуемой образовательной программы вуза. С учетом полученных подходящих дробей получим таблицу 2 на основе схемы, представленной в таблице 1.

Таблица 2 – Числовой пример представления цепной дроби через подходящие дроби

a_k		**2**	**4**	**2**	**1**	**2**
D_k	1	2	9	20	29	78
Q_k	0	1	4	9	13	35

Характер поведения статической и динамической частей по уровням декомпозиции, представленных в виде подходящих дробей и преобразованных в пространство изображений, показан на рисунке 1.



	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
P(qk)	1,96	1,68	1,42	1,17	0,95	0,74	0,55	0,38	0,24	0,11	0
P(dk)	1	1,12	1,31	1,56	1,85	2,2	2,6	3,05	3,54	4,08	4,66
P(S)	2,96	2,8	2,73	2,73	2,8	2,94	3,15	3,43	3,78	4,19	4,66

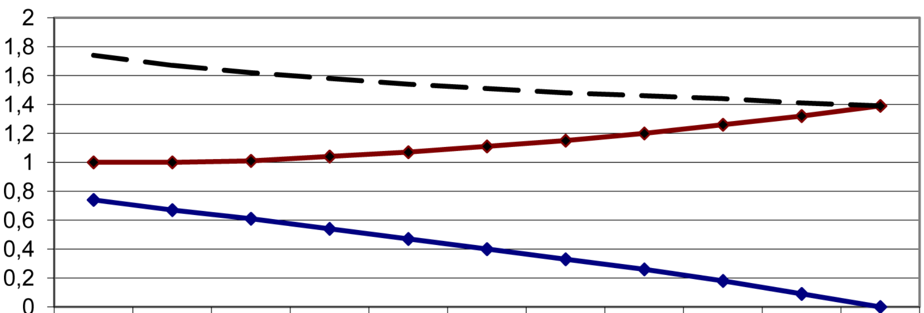
Рисунок 1 – Характер поведения статической и динамической частей по уровням декомпозиции

В точке пересечения функций изображений $P(d_k)$ и $P(q_k)$ достигается уровень подвижного равновесия потенциалов взаимодействующих частей. Результирующая пунктирная линия P(S) отображает тенденцию образовательного процесса к состоянию устойчивости. В данном примере устойчивость образовательного процесса уменьшается при увеличении вероятности возникновения данной ситуации (отклонение от 1).

Цепная дробь для соотношения потенциалов, заданного по правилу золотого сечения, имеет значения коэффициентов, равные 1, кроме последнего элемента. Изменение соотношений потенциалов взаимодействующих частей по уровням их декомпозиции носит устойчивый характер и приемлем для организации устойчивого образовательного процесса.

На рисунке 2 показано изображение исходных дискретных функций на примере соотношения по золотому сечению $\frac{89}{55} \Rightarrow [1;1,1,1,1,1,1,1,2]$.

Результирующая пунктирная линия P(S) отображает тенденцию повышения устойчивости образовательного процесса при увеличении вероятности возникновения исследуемой ситуации (стремится к 1).

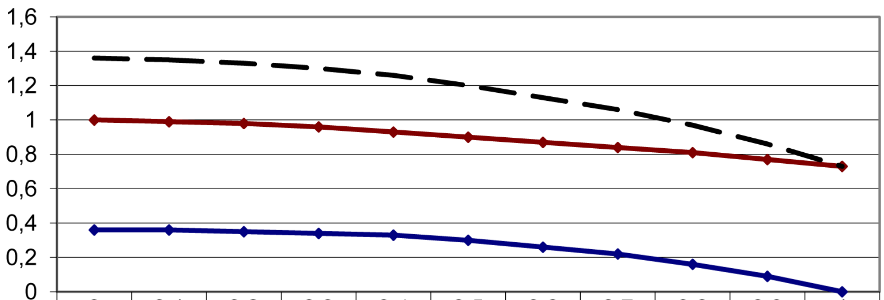


	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
P(qk)	0,74	0,67	0,61	0,54	0,47	0,4	0,33	0,26	0,18	0,09	0
P(dk)	1	1	1,01	1,04	1,07	1,11	1,15	1,2	1,26	1,32	1,39
P(S)	1,74	1,67	1,62	1,58	1,54	1,51	1,48	1,46	1,44	1,41	1,39

Рисунок 2 – Характер изменения соотношений потенциалов взаимодействующих частей, представленных в соответствии с правилом золотого сечения

В этом случае уровень потенциала статической части образовательной системы превышает в 1,62 раза уровень потенциала динамической части. Такой подход к управлению образовательной системой характеризует высокую степень соответствия требованиям к условиям реализации образовательных программ и недостаточную эффективность процесса управления образовательной деятельностью [8]. В этом случае возникает необходимость наращивания динамической части.

Для повышения конкурентоспособности и развития вуза требуются новые подходы к управлению, новые образовательные технологии и средства. Таким образом, это связано с необходимостью повышения уровня потенциала динамической части, что в свою очередь вызывает повышение уровня потенциала статической части. Анализ результатов моделирования уровней потенциалов статической и динамической части в структуре образовательной системы вуза и их соотношение, представленных в графической форме на рисунках 1 и 2, приводит к выводу об уровнях динамического равновесия и рациональном соотношении потенциалов для обеспечения устойчивости вуза. Уровни динамического равновесия потенциалов взаимодействующих частей в эталонной модели управления определяются их равным соотношением. В этом случае, устойчивость образовательного процесса не уменьшается с увеличением вероятности возникновения данной ситуации, что показано на рисунке 3. Кроме того, динамическая часть имеет резерв для наращивания потенциала без нарушения устойчивости образовательного процесса.



	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
P(qk)	0,36	0,36	0,35	0,34	0,33	0,3	0,26	0,22	0,16	0,09	0
P(dk)	1	0,99	0,98	0,96	0,93	0,9	0,87	0,84	0,81	0,77	0,73
P(S)	1,36	1,35	1,33	1,3	1,26	1,2	1,13	1,06	0,97	0,86	0,73

Рисунок 3 – Уровни динамического равновесия потенциалов взаимодействующих частей в эталонной модели управления

Таким образом, уровень динамического равновесия потенциалов статической и динамической частей образовательной системы вуза показывает необходимость и возможность развития той или иной части.

Заключение

Предложена математическая модель для оценки устойчивости образовательной системы вуза с применением аппарата цепных дробей и дискретно-непрерывных преобразований. Данная модель позволяет трансформировать дискретные модели в пространство изображений и проводить анализ поведения выделенных в структуре образовательной системы статической и динамической частей. Уровни динамического равновесия статической и динамической частей в эталонной модели определяются их равным соотношением, реальная модель поведения сравнивается с эталонной, по результатам анализа отклонений формируются управленческие решения. Сравнение текущих значений уровней потенциалов статической и динамической частей с эталонным значением уровня динамического равновесия позволяет оценить результативность образовательной деятельности при заданном уровне выполнения требований к условиям реализации образовательных программ.

Список литературы

1. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и инженерные приложения. – М.: Наука, 1991.
2. *Мыльник В.В., Титаренко Б.П., Волочиенко В.А.* Исследование систем управления. – М.: Академический Проект; Трикста, 2004.
3. *Новиков Д.А.* Введение в теорию управления образовательными системами. – М.: Эгвес, 2009.
4. *Парфенов И.И.* Цепные дроби – ожерелье мехатроники. – М.: КомКнига, 2007.
5. *Парфенова М.Я., Семенов А.В.* Модель управления производственной системой // Патент России № 153307. – 2015. – Бюл. № 19.
6. *Солодова Е.А.* Новые модели в системе образования: синергетический подход. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.
7. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978.
8. *Харламова Е.Е.* Современные подходы к оценке эффективности деятельности образовательной организации высшего профессионального образования // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – № 8-1. – С. 90–91. – URL: http://www.expeducation.ru/ru/article/view?id=5809 (дата обращения: 06.09.2019).

References

1. *Ventcel' E.S., Ovcharov L.A.* Teoriya sluchajnyh processov i inzhenernye prilozheniya. – M.: Nauka, 1991.
2. *Myl'nik V.V., Titarenko B.P., Volochienko V.A.* Issledovanie sistem upravleniya. – M.: Akademicheskij Proekt; Triksta. 2004.
3. *Novikov D.A.* Vvedenie v teoriyu upravleniya obrazovatel'nymi sistemami. – M.: Egves, 2009.
4. *Parfenov I.I.* Cepnye drobi – ozherel'e mekhatroniki. – M.: KomKniga, 2007.
5. *Parfenova M.Ya.,* Semenov A.V. Model' upravleniya proizvodstvennoj sistemoj // Patent Rossii № 153307. – 2015. – Byul. № 19.
6. *Solodova E.A.* Novye modeli v sisteme obrazovaniya: sinergeticheskij podhod. – M.: Knizhnyj dom "LIBROKOM", 2012.
7. *Hinchin A.Ya.* Cepnye drobi. – M.: Nauka, 1978.
8. *Harlamova E.E.* Sovremennye podhody k ocenke effektivnosti deyatel'nosti obrazovatel'noj organizacii vysshego professional'nogo obrazovaniya // Mezhdunarodnyj zhurnal eksperimental'nogo obrazovaniya. – 2014. – № 8-1. – S. 90–91. – URL: http://www.expeducation.ru/ru/article/view?id=5809 (data obrashcheniya: 06.10.2019).