Keywords: S&T reserves, Public-Private Partnership, federal target programs, program-oriented planning, Government program of arms.

***Karine Surenovna Khachaturian**, Ph.D., Professor, Department of Finance and Credit, Moscow Vitte University*
***Alexsey Evgenievich Nikolaev**, Ph.D., Associate Professor, Department of Economic Theories and Military Economy, Military University, Moscow*

УДК 519.217

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОМПОНЕНТОВ ХЕДЖИРУЮЩЕГО ПОРТФЕЛЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПЛАТЕЖНЫХ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ, ЗАДАННЫХ В ФИНАЛЬНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ ФИНАНСОВОГО РЫНКА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

***Виктория Викторовна Шамраева**, к.ф.-м.н., зам. зав. кафедрой математики и информатики*
Тел.: 783-68-48 (доб. 4129), e-mail: vshamraeva@miemp.ru,
Московский университет им. С.Ю. Витте
http://www.muiv.ru

Определение самофинансируемого портфеля, реплицирующего некоторое платежное обязательство f является одним из важнейших направлений исследования финансовых рынков. В данной работе на одной модели рынка с бесконечным числом состояний просчитаны компоненты хеджирующего портфеля для некоторых платежных обязательств.

Ключевые слова: финансовый рынок, бесконечное число состояний, мартингальные меры, ослабленное свойство универсальной хааровской единственности (ОСУХЕ), ослабленное условие несовпадения барицентров (ОУНБ), самофинансируемый портфель, полный капитал, платежное обязательство.

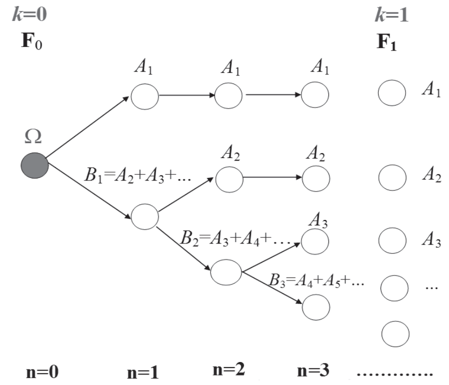
В.В. Шамраева

Рассмотрим одношаговый (B,S)-рынок, заданный на стохастическом базисе (Ω,F). Здесь, B – детерминированные цены банковского счета; S – цены акций; Ω – счетное пространство элементарных событий; $F=(F_0,F_1)$ – одношаговая фильтрация (интерпретируется как «поток информаций», доступных на рынке в начальный и финальный момент времени). Отметим, что начальная σ-алгебра тривиальна, то есть $F_0=\{\Omega\varnothing\}$, а F_1 порождена разбиением Ω на счетное число атомов A_i, $i=1,2,\dots$ (понимаемых как различные состояния рынка). Рассмотрим **F**-адаптированный случайный процесс $Z=(Z_k,F_k)_{k=0}^{l}$, который мы мыслим как дисконтированную стоимость акции ($Z_0=a,\ Z_1(A_i)=b_i$, $i\in N$). Обозначим через $\mathrm{P}(Z,\mathbf{F})$ множество невырожденных мартингальных мер этого рынка, совпадающее с множеством решений следующей системы:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i=1\\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i p_i=a\\ p_i>0,\ i\in N.\end{cases}$$

О стратегиях на финансовом рынке, приносящих прибыль при нулевых начальных затратах, говорят, что они имеют *арбитражные* стратегии. (**B,S**)-рынок, на котором отсутствуют такие стратегии, называется *безарбитражным*. Если любое платежное обязательство (п.о.) реплицируемо, то (**B,S**)-рынок называется *полным*. Будем предполагать, что $\inf_i b_i < a < \sup_i b_i$, что гарантирует безарбитражность и неполноту исходного финансового рынка.

Рассмотрим на $(\Omega, \mathbf{F})$ специальные хааровские фильтрации (с.х.ф.) $\mathbf{H} = (\mathrm{H}_n)_{n=0}^{\infty}$, где $\mathbf{H_0} = \mathbf{F}_0$, $\mathbf{H}_{\infty} = \mathbf{F}_1$ и у которых каждая σ-алгебра H_n порождается разбиением Ω на ровно n+1 атом, причем на каждом шагу дробится тот атом, который был получен в результате дробления на предыдущем шаге. Таким образом, каждая такая фильтрация $\mathbf{H}$ интерполирует фильтрацию $\mathbf{F}$. На рисунке представлена типичная схема специальной хааровской интерполяции):



Если для любой специальной хааровской фильтрации $\mathbf{H}$ фильтрации $\mathbf{F}$ соответствующий процесс $Y_n = E^P[Z_1|\mathrm{H}_n]$ допускает единственную мартингальную меру, совпадающую с исходной мерой P, то будем говорить, что мера $P \in \mathsf{P}(Z, \mathbf{F})$ обладает *ослабленным свойством универсальной хааровской единственности* (ОСУХЕ). Заметим, что это свойство равносильно ослабленному условию несовпадения барицентров (ОУНБ) [1]. В [2] для рассматриваемой модели финансового рынка найдены достаточные условия того, что рынок обладает мартингальными мерами, удовлетворяющими ОСУХЕ. Там же смоделирован рынок и мартингальная мера на нем с удобными для вычислений значениями параметров.

Пусть мера $P \in \mathsf{P}(Z, \mathbf{F})$ удовлетворяет ОСУХЕ. Покупатель и продавец платежного обязательства (п.о.) договорились исчислять его цену усреднением п.о. по этой мере. Количество единиц банковского счета обозначим через $\beta_n = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_n^k I_{A_k} + \beta_n^n I_{B_{n-1}}$, а количество акций в момент времени n через $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_n^k I_{A_k} + \gamma_n^n I_{B_{n-1}}$. Определим *портфель* π как двумерную предсказуемую последовательность $(\beta_n, \gamma_n)_{n=0}^{\infty}$, где $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$ и $(\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ предсказуемые относительно H_n последовательности ([4], гл.II, §1b). При этом $\beta_n = \beta_n^n = \beta_n^{n+1} = \dots$, $\gamma_n = \gamma_n^n = \gamma_n^{n+1} = \dots$, $\forall n = 0,1,2,3,\dots$ Для канонического хеджа получены ([7]) следующие вычислительные формулы компонент самофинансируемого портфеля π:

$$\gamma_n^k = 0,\ k=1,2,\dots,n\text{-}1,\ \gamma_n^n = \frac{c_n - \hat{c}_{n-1}}{b_n - \hat{b}_{n-1}} = \frac{\hat{c}_n - \hat{c}_{n-1}}{\hat{b}_n - \hat{b}_{n-1}}$$

и

$$\beta_n^k = c_k,\ k = 1,2,...,n-1,\ \beta_n^n = c_n - \gamma_n^n b_n = \hat{c}_n - \gamma_n^n \hat{b}_n,$$

где $\hat{c}_n = \dfrac{\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k p_k}{\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k}$, $\hat{b}_n = \dfrac{\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k p_k}{\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k}$, а $f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i I_{A_i}$ – ограниченное п.о.

Процесс $X = (X_n, Н_n)_{n=0}^{\infty}$ есть полный капитал портфеля $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n=0}^{\infty}$, где $X_n = E^P[f|Н_n]$. Реплицирование п.о. f и полноту интерполирующего рынка Y будет обеспечивать выполнение P-п.н. равенства $\lim_{n\to\infty} X_n = f$ (последнее вытекает из общей теоремы 1.17 в [3]).

Возьмем в качестве меры P, b_i и a значения из примера, построенного в [2]. А именно, пусть P=(2/3; 1/4;1/16;1/64; …), $b_1=1 < a=5/3 < b_2=2 < b_3=4 < b_4=8 < b_5=16 <$ ….. В [2] показано, что такая мера P, b_i и a, обладает ОСУХЕ. Вычислим $\hat{b}_n$ для n=0,1,2,… Имеем,

$$\hat{b}_0 = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} b_k p_k}{\sum_{k=1}^{\infty} p_k} = a = \frac{5}{3},\quad \hat{b}_1 = \frac{\sum_{k=2}^{\infty} b_k p_k}{\sum_{k=2}^{\infty} p_k} = \frac{1}{1/3} = 3,$$

$$\hat{b}_2 = \frac{\sum_{k=3}^{\infty} b_k p_k}{\sum_{k=3}^{\infty} p_k} = \frac{1/2}{1/12} = 6,\quad \hat{b}_3 = \frac{\sum_{k=4}^{\infty} b_k p_k}{\sum_{k=4}^{\infty} p_k} = \frac{1/4}{1/48} = 12, \ldots,$$

$$\hat{b}_n = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k p_k}{\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k} = \frac{1/2^{n-1}}{1/3\cdot 4^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot 3\cdot 4^{n-1} = 3\cdot 2^{n-1},$$

Просчитаем компоненты самофинансируемого портфеля $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ для некоторых п.о. (в [6, 7] компоненты таких п.о. приведены в окончательном виде без вспомогательных выкладок).

1. Пусть п.о. $f = I_{A_k}$. Имеем, начальный капитал $X_0 = p_k = 1/4^{k-1}$, $X_n = I_{A_n}$, $n=k,k+1,$…. Рисковые и безрисковые составляющие портфеля имеют вид:

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_n^k I_{A_k} + \gamma_n^n I_{B_{n-1}} = \begin{cases} \dfrac{p_k}{b_1 p_1}, & n = 1 \\ \dfrac{p_{k-1}}{b_2 p_1} I_{B_1}, & n = 2 \\ \dfrac{p_{k-2}}{b_3 p_1} I_{B_2}, & n = 3 \\ \ldots & \\ \dfrac{p_{k-m+1}}{b_m p_1} I_{B_{m-1}}, & n = m, \\ \ldots & \\ \dfrac{p_2}{b_{k-1} p_1} I_{B_{k-2}}, & n = k-1, \\ -\dfrac{1}{3 b_k p_1} I_{B_{k-1}}, & n = k \\ 0, & n \geq k+1 \end{cases}$$

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_n^k I_{A_k} + \beta_n^n I_{B_{n-1}} = \begin{cases} -\dfrac{p_k}{p_1}, & n=1 \\ -\dfrac{p_{k-1}}{p_1} I_{B_1}, & n=2 \\ -\dfrac{p_{k-2}}{p_1} I_{B_2}, & n=3 \\ \ldots & \\ -\dfrac{p_{k-m+1}}{p_1} I_{B_{m-1}}, & n=m \\ \ldots & \\ -\dfrac{p_2}{p_1} I_{B_{k-2}}, & n=k-1 \\ \dfrac{1}{p_1} I_{B_{k-1}}, & n=k \\ I_{A_k}, & n \ge k+1 \end{cases}$$

В частности, если п.о. $f = I_{A_1}$. Имеем, $\hat{c}_0 = \dfrac{\sum_{k=1}^{\infty} c_k p_k}{\sum_{k=1}^{\infty} p_k} = p_1 = \dfrac{2}{3}$, $\hat{c}_1 = 0$, значит $\gamma_1^1 = \dfrac{\hat{c}_1 - \hat{c}_0}{\hat{b}_1 - \hat{b}_0} = \dfrac{-2/3}{3 - \frac{5}{3}} = -\dfrac{1}{2}$ и $\beta_1^1 = \hat{c}_1 - \gamma_1^1 \hat{b}_1 = 0 - \left(-\dfrac{1}{2}\right) 3 = \dfrac{3}{2}$. Поскольку $\hat{c}_n = 0$, n=2,3,…, то $\gamma_n^k = 0$, $\forall k$ и $\beta_n^1 = c_1 = 1$, $\beta_n^k = 0$, для n=2,3,…, k=2,3,…. Окончательно,

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_n^k I_{A_k} + \gamma_n^n I_{B_{n-1}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & n=1 \\ 0, & n \ge 2 \end{cases}, \quad \beta_n = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_n^k I_{A_k} + \beta_n^n I_{B_{n-1}} = \begin{cases} \dfrac{3}{2}, & n=1 \\ I_{A_1}, & n \ge 2 \end{cases}.$$

При этом начальный капитал $X_0 = p_1 = 2/3$, $X_n = I_{A_1}$, n=1,2,…

Для п.о. $f = I_{A_2}$, имеем:

$$\hat{c}_0 = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} c_k p_k}{\sum_{k=1}^{\infty} p_k} = p_2 = \frac{1}{4}, \quad \hat{c}_1 = \frac{\sum_{k=2}^{\infty} c_k p_k}{\sum_{k=2}^{\infty} p_k} = \frac{p_2}{1/3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{4}, \quad \hat{c}_n = 0, \ n=2,3,\ldots$$

Значит

$$\gamma_1^1 = \frac{\hat{c}_1 - \hat{c}_0}{\hat{b}_1 - \hat{b}_0} = \frac{3/4 - 1/4}{3 - \frac{5}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}, \quad \beta_1^1 = \hat{c}_1 - \gamma_1^1 \hat{b}_1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{8} 3 = \frac{6-9}{8} = -\frac{3}{8}$$

и

$$\gamma_2^2 = \frac{\hat{c}_2 - \hat{c}_1}{\hat{b}_2 - \hat{b}_1} = \frac{0 - 3/4}{6-3} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}, \quad \beta_2^2 = \hat{c}_2 - \gamma_2^2 \hat{b}_2 = 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) 6 = \frac{3}{2}.$$

Таким образом,

$\gamma_1^1 = \dfrac{3}{8}$, $\gamma_2^2 = -\dfrac{1}{4}$, $\gamma_n^k = 0$, $\forall k<n$, k=1,2,…., n=2,3,… и $\beta_1^1 = -\dfrac{3}{8}$, $\beta_2^2 = \dfrac{3}{2}$, $\beta_n^2 = c_2 = 1$,

$\beta_n^k = 0$, для n=3,4,…, $\forall$ $k<n$, $k \neq 2$.

Окончательно,

$$\gamma_n=\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_n^k I_{A_k}+\gamma_n^n I_{B_{n-1}}=\begin{cases}\dfrac{3}{8}, & n=1\\ -\dfrac{1}{4}I_{B_1}, & n=2\\ 0, & n\ge 3\end{cases},\quad \beta_n=\sum_{k=1}^{n-1}\beta_n^k I_{A_k}+\beta_n^n I_{B_{n-1}}=\begin{cases}-\dfrac{3}{8}, & n=1\\ \dfrac{3}{2}I_{B_1}, & n=2\\ I_{A_2}, & n\ge 3\end{cases}.$$

При этом начальный капитал $X_0=p_2=1/4$, $X_1=3/4\,I_{B_1}$, $X_n=I_{A_2}$, $n=2, 3, \ldots$

2. Рассмотрим опцион-call европейского типа с п.о.

$$f=(Z_1-Z_0)^+=\begin{cases}Z_1-Z_0, & \text{если } Z_1>Z_0\\ 0, & \text{если } Z_1\le Z_0\end{cases},$$

где контрактная цена $K=Z_0=5/3$. Поскольку $Z_1(A_i)=b_i=2^{i-1}>Z_0=a=5/3$, $i\ge 2$, а $Z_1(A_1)=b_1=1<Z_0=a=5/3$, то $f=\sum_{i=2}^{\infty}(b_i-a)\cdot I_{A_i}$. В этом случае $c_1=0$, $c_i=b_i-a$, $i\ge 2$,

$$\hat c_0=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}c_i p_i}{\sum_{i=1}^{\infty}p_i}=\frac{\sum_{i=2}^{\infty}(b_i-a)p_i}{\sum_{i=1}^{\infty}p_i}=\sum_{i=2}^{\infty}(b_i-a)p_i=\sum_{i=2}^{\infty}b_i p_i-a\sum_{i=2}^{\infty}p_i=$$

$$=a-b_1p_1-a(1-p_1)=a-b_1p_1-a+ap_1=p_1(a-b_1),$$

$$\hat c_{n-1}=\frac{\sum_{i=n}^{\infty}c_i p_i}{\sum_{i=n}^{\infty}p_i}=\frac{\sum_{i=n}^{\infty}(b_i-a)p_i}{\sum_{i=n}^{\infty}p_i}=\frac{\sum_{i=n}^{\infty}b_i p_i-a\sum_{i=n}^{\infty}p_i}{\sum_{i=n}^{\infty}p_i}=\frac{\sum_{i=n}^{\infty}b_i p_i}{\sum_{i=n}^{\infty}p_i}-a,$$

$$\hat b_0=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}b_i p_i}{\sum_{i=1}^{\infty}p_i}=a,\quad \hat b_{n-1}=\frac{\sum_{i=n}^{\infty}b_i p_i}{\sum_{i=n}^{\infty}p_i}.$$

Значит,

$$\gamma_1^1=\frac{c_1-\hat c_0}{b_1-\hat b_0}=\frac{0-p_1(a-b_1)}{b_1-a}=p_1,$$

$$\gamma_n^k=0,\ k=1,2,\ldots,n-1,\ n=2,3,\ldots$$

$$\gamma_n^n=\frac{c_n-\hat c_{n-1}}{b_n-\hat b_{n-1}}=\frac{b_n-a-\left(\dfrac{\sum_{i=n}^{\infty}b_i p_i}{\sum_{i=n}^{\infty}p_i}-a\right)}{b_n-\dfrac{\sum_{i=n}^{\infty}b_i p_i}{\sum_{i=n}^{\infty}p_i}}=1,\ n=2,3,\ldots$$

а

$$\beta_1^1=c_1-\gamma_1^1 b_1=0-p_1b_1=-p_1b_1,$$

$$\beta_n^k=c_k=\begin{cases}0, & k=1\\ b_k-a, & k=2,\ldots,n-1\end{cases},\ n=2,3,\ldots,$$

$$\beta_n^n=c_n-\gamma_n^n b_n=b_n-a-b_n=-a.$$

Таким образом,

$$\gamma_n=\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_n^k I_{A_k}+\gamma_n^n I_{B_{n-1}}=\begin{cases}p_1, & n=1,\\ I_{B_{n-1}}, & n\ge 2,\end{cases}\quad \beta_n=\sum_{k=1}^{n-1}\beta_n^k I_{A_k}+\beta_n^n I_{B_{n-1}}=\begin{cases}-p_1b_1, & n=1,\\ \sum_{k=2}^{n-1}(b_k-a)I_{A_k}-aI_{B_{n-1}}, & n\ge 2.\end{cases}$$

При этом начальный капитал

$$X_0 = E^P\left[f \middle| \mathrm{H}_0\right] = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} c_k p_k}{\sum_{k=1}^{\infty} p_k} = \sum_{k=2}^{\infty}(b_k - a)p_k = \sum_{k=2}^{\infty} b_k p_k - a\sum_{k=2}^{\infty} p_k =$$

$$= a - b_1 p_1 - a(1 - p_1) = p_1(a - b_1) = \frac{2}{3}\left(\frac{5}{3} - 1\right) = \frac{4}{9}.$$

Таким образом, с применением процедуры хеджирования платежного обязательства, использующей интерполяцию неполного безарбитражного рынка полным рынком (метод хааровских интерполяций), определены эволюции капиталов некоторых финансовых обязательств и рассчитаны компоненты соответствующих реплицирующих самофинансируемых портфелей.

Литература

1. *Данекянц А.Г., Павлов И.В.* Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности // ОПиПМ. – М.: ТВП, 2004. Т. 11. Вып. 3. С. 506-508.

2. *Павлов И.В., Цветкова И.В., Шамраева В.В.* Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров // Вестник РГУПС. 2012. № 3. С. 177-181.

3. *Ширяев А.Н., Чёрный А.С.* Векторный стохастический интеграл и фундаментальные теоремы теории арбитража // Труды математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2002. Т. 237. С. 7-11.

4. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели. – М: ФАЗИС, 1998. Т. 1. – 512 с.

5. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Теория. – М.: ФАЗИС, 1998. Т.2. – 544 с.

6. *Цветкова И.В., Шамраева В.В.* Расчёт компонентов хеджирующего портфеля с помощью процедуры хааровской интерполяции // Науковедение: Интернет-журнал. 2013. №3 (16).

7. *Павлов И.В., Цветкова И.В., Шамраева В.В.* Хеджирование одношаговых (B,S)-рынков с бесконечным числом состояний с помощью хааровских интерполяций (научный доклад) // ОПиПМ, М.: ТВП, 2013, Т. 20. Вып. 2. С. 151-152.

The calculation of components of hedging portfolio for payment obligations fixed at final time moment of financial market with infinite number of states

Finding the self-financing portfolio replicating some payment obligation f is one of important directions of financial market research. The method of the calculation of components of hedging portfolio for several kinds of payment obligations for the model of financial market with infinite number of states is presented in the article.

Ключевые слова: Financial market, martingale measure, the weakened property of the universal Haar uniqueness, self-financing portfolios, capital of portfolio, contingent claim

***Victoria Victorovna Shamraeva**, Associate Professor, «Mathematics and Informatics» Chair, Moscow Vitte University*