УДК 621.391

СПОСОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ АНАЛОГОВЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СООБЩЕНИЙ

Андрашитов Дмитрий Сергеевич,
канд. техн. наук, доцент кафедры математики и информатики,
e-mail: dandrashitov@muiv.ru,
Московский университет им. С.Ю. Витте, г. Москва,

Чувикова Виктория Викторовна,
канд. экон. наук, доцент кафедры математики и информатики,
e-mail: vchuvikova@muiv.ru,
Московский университет им. С.Ю. Витте, г. Москва

В работе предлагается подход к оценке неизвестных постоянных параметров математической модели аналоговых сигналов, применяемых в современных измерительных системах. Учет физических особенностей подобных моделей приводит к уравнениям состояния в виде уравнений Лагранжа второго рода. Дальнейшая идентификация требует построения функционала невязки, минимум которого обеспечивается действительными значениями неизвестных параметров. Сформулированная задача – обратная некорректная по Адамару. Ее решение сводится к поиску стационарной точки, в которой обеспечивается минимум сглаживающего функционала. С этой целью применяется аппарат асинхронного варьирования траектории и игольчатого варьирования возмущения. Поиск условий минимума методом последовательного приближения к стационарной точке, а затем метода инвариантного погружения к двухточечной краевой задаче приводит к итерационному алгоритму идентификации параметров. Эффективность предложенного аппарата подтверждается численным моделированием в среде MathCad, сравнение полученных результатов оценки неизвестных параметров модели аналогового сигнала с результатами фильтра Калмана демонстрирует преимущество данного подхода.

Ключевые слова: информационное сообщение, математическая модель, идентификация параметров, итерационная регуляризация

METHOD OF IDENTIFICATION OF PARAMETERS OF ANALOG INFORMATION COMMUNICATION MODEL

Andrashitov D.S.,
candidate of technical sciences, Associate Professor,
e-mail: dandrashitov@muiv.ru,
Moscow University. S.Yu. Witte, Moscow,

Chuvikova V.V.,
candidate of economic sciences, Associate Professor,
e-mail: vchuvikova@muiv.ru,
Moscow University. S.Yu. Witte, Moscow

The paper proposes an approach to estimating the unknown constant parameters of the mathematical model of analog signals used in modern measurement systems. Accounting for the physical features of such models leads to equations of state in the form of Lagrange equations of the second kind. Further identification requires the construction of a residual functional, the minimum of which is provided by the actual values of the unknown parameters. The formulated task is the inverse incorrect according to Hadamard. Its solution is reduced to the search for a stationary point at which the minimum of the smoothing functional is provided. For this purpose, an apparatus for asynchronous variation of the trajectory and needle variation of the disturbance is used. The search for minimum conditions by the method of successive approximation to a stationary point, and then the *invariant immersion method to a two-point boundary value problem leads to an iterative algorithm for identifying parameters. The effectiveness of the proposed apparatus is confirmed by numerical simulation in the MathCad environment, a comparison of the results obtained by estimating the unknown parameters of the analog signal model with the results of the Kalman filter demonstrates the advantage of this approach.*

Keywords: informational message, mathematical model, parameter identification, iterative regularization

DOI 10.21777/2500-2112-2019-1-55-63

Введение

В современный период, на этапе широкого развития средств контроля, измерительных приборов и комплексов, значительное внимание уделяется точности и достоверности оценки параметров сигналов, предъявляются высокие требования к быстродействию процесса обработки большого объема измерительной информации, поступающей по измерительному каналу, что определяет актуальность и важность такого рода задач.

Существует множество методов оценки, однако их реализация для общего случая нелинейной математической модели сообщения представляет собой приближенные алгоритмы. К таким алгоритмам относится и алгоритм, известный как фильтр Калмана [5, 6], который дает точную оценку, лишь когда измерения и модель состояния объекта являются линейными и определены параметры формирующих гауссовских шумов, причем динамика процесса в этом случае описывается уравнениями первого порядка. При оценке параметров и состояния нелинейных систем возникают известные проблемы обеспечения сходимости и устойчивости алгоритма, которые усугубляются тем, что внешние воздействия часто сложно описать моделями Марковского типа из-за отсутствия информации об их параметрах, при этом размерность вектора состояния для систем, с которыми в настоящее время приходится работать, становится весьма высокой.

Попытки решения подобных проблем предпринимались в направлении градиентных процедур [6] и инвариантного погружения [5]. Однако сходимость процедуры идентификации методом инвариантного погружения к фактическим значениям параметров часто сложно обеспечить, кроме того, неадекватный выбор начальной матрицы ковариации может приводить к расходимости или слабой сходимости процедуры идентификации. Главным недостатком идентификации с помощью градиентных процедур является сложность записи аналитической формы градиента. Возникает актуальная задача использовать положительные свойства этих подходов в едином алгоритме.

Таким образом, **цель работы** – разработка способа и синтез алгоритма идентификации на основе использования инвариантного погружения и градиентных процедур.

Для достижения поставленной цели ставится задача и производится синтез уравнений идентификации динамических систем на основе регуляризации с использованием физических особенностей динамики сигналов, создающий новую базу для решения задач такого класса.

Оценку качества данного способа рассмотрим на основе численного моделирования в среде MathCad на примере задачи идентификации параметров первичного измерительного преобразователя.

Постановка задачи

Пусть аналоговое информационное сообщение представляет собой динамическую систему, описываемую нелинейной моделью вида:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \ \ \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}^0, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ и $\dot{\mathbf{x}} \in R^n$ – вектора координат и скоростей сигнала в момент времени t соответственно;

$\mathbf{z} \in R^m$ – вектор параметров модели, неизвестных для данного сигнала и требующих оценки;

$\mathbf{f}$ – вектор – функция, непрерывная и дифференцируемая по совокупности аргументов.

Допустим, что динамика, подлежащих идентификации параметров z определяется уравнением первого порядка вида:

$$\dot{\mathbf{z}} = \eta, \qquad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}^0, \tag{2}$$

здесь вектор неслучайных неизвестных возмущений $\eta \in R^m$ определяемый в пространстве $\eta(t) \in L_2^m[0,T]$.

Модель наблюдения информационного сообщения при условии $\mathbf{y} \in R^k$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(\mathbf{x},t) + \mathbf{n}(t), \tag{3}$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$ – вектор – функция непрерывная вместе с частными производными;

k, n, m – натуральные числа, $t \in [0,T]$;

$\mathbf{n}(t)$ – вектор белого гауссовского шума.

Учет физических особенностей динамики сигналов позволяет ввести ограничение по Гамильтону – Остроградскому [4] вида:

$$\delta' W = \delta S + \int_0^T \delta' A dt = \int_0^T [\delta L + \mathbf{Q}\delta\mathbf{x}] dt = 0, \tag{4}$$

где δ' обозначает бесконечно малую величину, а δ вариацию;

S – действие по Гамильтону на интервале $[0,T]$;

L – кинетический потенциал;

A – работа вектора обобщенных внешних сил $\mathbf{Q} \in R^n$.

Сформулируем задачу из условий (1)–(4) по оценки $\acute{\mathbf{z}}$ при условии минимизации функционала невязки:

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_0^T [\mathbf{y} - \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}(\acute{\mathbf{z}}),t)]^{\mathrm{T}} \mathbf{N}^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}(\acute{\mathbf{z}}),t] dt \to \min, \tag{5}$$

где $\mathbf{N} \in R^m \times R^m$ есть матрица шума наблюдения, описывающая интенсивность помех в канале наблюдений.

Решение

Сформулированная задача (1)–(5) по оценке параметров динамической системы является обратной, некорректно поставленной по Адамару. Для ее решения используется метод регуляризации А.Н. Тихонова [7].

Это требует рассмотрения условий минимума сглаживающего функционала:

$$J^\alpha[\mathbf{z},\mathbf{x}] = J_1 + \alpha\Omega[\eta], \tag{6}$$

где $\Omega[\eta] = \frac{1}{2}\int_0^T \eta^{\mathrm{T}}(t)\eta(t)dt$ стабилизирующий функционал [7];

α – некоторое положительное число.

Функционал $\mathrm{J}^\alpha[\mathbf{z},\mathbf{x}]$ неотрицательный, поэтому существует его нижняя грань и если $\{\alpha_n\}$ – убывающая последовательность положительных чисел, сходящихся к нулю $(\alpha_n \to 0)$, и соответствующая последовательность $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$, согласно [7], сходится к $\eta^*(t)$ при условии, то числовой параметр α удовлетворяет требованиям $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k = \infty, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 < \infty$.

Для дифференцируемого выпуклого функционала $\mathrm{J}^\alpha[\mathbf{z},\mathbf{x}]$ минимум находится путем определения стационарной точки, в которой:

$$grad_z \mathrm{J}^\alpha[\acute{\mathbf{z}},\acute{\mathbf{x}}] = grad_x \mathrm{J}^\alpha[\acute{\mathbf{z}},\acute{\mathbf{x}}] = 0, \tag{7}$$

при заданных (1)–(3) ограничениях.

Определение градиента в (7) возможно за счет рассмотрения и исследования асинхронного варьирования траектории $\mathbf{x}(t)$ согласно [4] и игольчатого варьирования возмущения $\eta(t)$ согласно [1].

Игольчатая вариация $\eta_\varepsilon(t)=\begin{cases}\mathbf{v}, & t\in[\tau,\tau+\varepsilon l],\\ \eta^*(t), & t\notin[\tau,\tau+\varepsilon l],\end{cases}$ позволит определить и рассмотреть вариацию возмущения $\eta_\varepsilon(t)-\eta^*(t)=\delta_\eta(t)$. При этом вариация параметров $\delta\mathbf{z}(t)$, вызывает вариацию траектории $\delta\mathbf{x}(t)$. Тогда введя обозначение траектории $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$, соответствующей $\eta_\varepsilon(t)$, $\mathbf{x}^*(t)$ – соответствующей $\eta^*(t)$ получим выражения для синхронной вариации траектории $\delta\mathbf{x}_c(t)=\mathbf{x}_\varepsilon(t)-\mathbf{x}^*(t)$, а асинхронной $\delta\mathbf{x}_a(t)=\mathbf{x}_\varepsilon(t+dt)-\mathbf{x}^*(t)=\dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{z}}\delta\mathbf{z}=\mathbf{G}\delta\mathbf{z}$, в уравнении $\mathbf{v}$ – некоторый постоянный вектор;

τ – известная произвольная точка непрерывности $\eta^*(t)$;

l, ε – известное и произвольное положительные числа соответственно, $\tau+\varepsilon l<T$.

Здесь **G** – матрица чувствительности системы (1) по вектору неизвестных параметров **z**, которая согласно [7] примет вид:

$$\ddot{\mathbf{G}}=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{G}}+\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{G}+\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{z}},\quad \mathbf{G}(0)=\dot{\mathbf{G}}(0)=0\cdot$$

Вариации $\delta\mathbf{x}_c(t)$ и $\delta\mathbf{x}_a(t)$ обладают следующими свойствами:

$$\delta\mathbf{x}_\mathbf{c}(t)=0,\quad t\in[0,\tau+\varepsilon l),$$
$$\delta\mathbf{x}_a(t)=0,\quad t\notin[\tau,\tau+\varepsilon l),$$
$$\delta\mathbf{x}_\mathbf{c}(t)=\delta\mathbf{x}_a(t),\quad t=\tau+\varepsilon l.$$

Пусть $\eta^*(t)$ – возмущение, доставляющее минимум функционалу (6). Найдем приращение функционала (6), обусловленное игольчатой вариацией $\eta_\varepsilon(t)$. Заметим, что на интервале $[\tau,\tau+\varepsilon l]$ за счет скачка $\eta_\varepsilon(t)$ возникает асинхронная вариация $\delta\mathbf{x}_a(t)$, а на интервале $[\tau+\varepsilon l,T]$ возникает синхронная $\delta\mathbf{x}_c(t)$, поскольку приращения обобщенных координат определяются решением дифференциальных уравнений в вариациях [1] при начальных условиях в момент времени $t=\tau+\varepsilon l$. Таким образом, имеем:

$$\Delta J=\int_\tau^{\tau+\varepsilon l}\left\{[-(\mathbf{y}-\mathbf{H}(\mathbf{x},t))^{\mathrm T}\mathbf{N}^{-1}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{x}}]\delta\mathbf{x}_a+\alpha\eta^{\mathrm T}\delta\eta+\mu\delta L_a+\mathbf{Q}\delta\mathbf{x}_a\right\}dt+$$
$$\int_{\tau+\varepsilon l}^{T}\left\{[-(\mathbf{y}-\mathbf{H}(\mathbf{x},t))^{\mathrm T}\mathbf{N}^{-1}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{x}}]\delta\mathbf{x}_c+\mu\delta L_c+\mathbf{Q}\delta\mathbf{x}_c\right\}dt\quad,$$

где δL_a и δL_c – вариации кинетического потенциала, связанные соответственно с $\delta\mathbf{x}_a(t)$ и $\delta\mathbf{x}_c(t)$.

Учитывая, что $\dot{\mathbf{z}}=\eta$, выполняя преобразования [2] с учетом

$\int_\tau^{\tau+\varepsilon l}\eta^{\mathrm T}\delta\dot{\mathbf{z}}dt=\eta^{\mathrm T}\delta\mathbf{z}\Big|_\tau^{\tau+\varepsilon l}-\int_\tau^{\tau+\varepsilon l}\dot\eta^{\mathrm T}\delta\mathbf{z}dt=-\int_\tau^{\tau+\varepsilon l}\dot\eta^{\mathrm T}\delta\mathbf{z}dt$, и поскольку $\delta\mathbf{z}(\tau)=0,\ \eta(\tau+\varepsilon l)=0$ получим:

$$\Delta J=\int_\tau^{\tau+\varepsilon l}[-(\mathbf{y}-\mathbf{H}(\mathbf{x},t))^{\mathrm T}\mathbf{N}^{-1}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{G}+\alpha\dot\eta^{\mathrm T}]\delta\mathbf{z}dt+$$
$$\int_{\tau+\varepsilon l}^{T}\left(-(\mathbf{y}-\mathbf{H}(\mathbf{x},t))^{\mathrm T}\mathbf{N}^{-1}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{x}}-\mu[\ddot{\mathbf{x}}-\mathbf{f}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\mathbf{z})]\right)\delta\mathbf{x}_c dt$$

откуда следует, что в точке минимума функционала:

$$grad_z\,\mathrm{J}^\alpha[\acute{\mathbf{z}},\acute{\mathbf{x}}]=-(\mathbf{y}-\mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}},\tau))^{\mathrm T}\mathbf{N}^{-1}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{G}+\alpha\dot\eta^{*\mathrm T}=0,$$
$$grad_x\,\mathrm{J}^\alpha[\acute{\mathbf{z}},\acute{\mathbf{x}}]=-(\mathbf{y}-\mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}},t))^{\mathrm T}\mathbf{N}^{-1}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{x}}-\mu[\acute{\ddot{\mathbf{x}}}-\mathbf{f}(\acute{\mathbf{x}},\acute{\dot{\mathbf{x}}},\acute{\mathbf{z}})]=0.\tag{8}$$

Используя эти условия стационарности получим:

$$\eta^*(\tau)=\alpha^{-1}\int_\tau^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm T}\frac{\partial\mathbf{H}^{\mathrm T}}{\partial\mathbf{x}}\left[\mathbf{y}-\mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}(\acute{\mathbf{z}},\tau),t)\right]dt\;,\;\acute{\ddot{\mathbf{x}}}=\mathbf{f}(\acute{\mathbf{x}},\acute{\dot{\mathbf{x}}},\acute{\mathbf{z}})-\mu^{-1}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{N}^{-1}\left(\mathbf{y}-\mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}(\acute{\mathbf{z}},\tau),t)\right)^{\mathrm T}.$$

Для поиска градиента следует определить точку $[\acute{\mathbf{z}},\eta^*]$.

Однако в условиях некорректности обратной задачи (1)–(5) нахождение данной точки затруднительно. Поэтому, для ее определения целесообразно применить, получившие широкое распространение на практике, методы последовательного приближения к стационарной точке.

Рассмотрим метод простой итерации:

$$\eta_{k+1} = \eta_k - \alpha_k grad_z \mathrm{J}^{\alpha}\left[\acute{\mathbf{z}}_{k+1}, \eta_k\right]. \tag{9}$$

Для сокращения записи вводится обозначение:

$$\mathbf{B}(\acute{\mathbf{z}},\tau) = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{H}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{x}}\left[\mathbf{y} - \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}(\acute{\mathbf{z}},\tau),t)\right]\cdot$$

Тогда с учетом (8) алгоритм (9) может быть представлен в виде:

$$\eta_{k+1}(\tau) = \eta_k(\tau)\left[1-\alpha_k\right] + \int_{\tau}^{T}\mathbf{B}(\acute{\mathbf{z}}_{k+1}(\tau),t)dt.$$

Далее, приняв $\eta_0 = 0$, запишем согласно [3] итерационную последовательность в развернутой форме:

$$\eta_0(\tau) = 0, \quad \dot{\acute{\mathbf{z}}}_0 = \eta_0(\tau),$$

$$\ddot{\acute{\mathbf{x}}}_0 = \mathbf{f}(\acute{\mathbf{x}}_0, \dot{\acute{\mathbf{x}}}_0, \acute{\mathbf{z}}_0) - \mu^{-1}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}_0}\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}_0(\acute{\mathbf{z}}_0,\tau),t))^{\mathrm{T}},$$

$$\eta_1(\tau) = \int_{\tau}^{T}\mathbf{B}(\acute{\mathbf{x}}_1(\acute{\mathbf{z}}_1,\tau),t)dt, \quad \dot{\acute{\mathbf{z}}}_1 = \eta_1(\tau),$$

$$\ddot{\acute{\mathbf{x}}}_1 = \mathbf{f}(\acute{\mathbf{x}}_1, \dot{\acute{\mathbf{x}}}_1, \acute{\mathbf{z}}_1) - \mu^{-1}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}_1}\mathbf{N}^{-1}\left(\mathbf{y} - \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}_1(\acute{\mathbf{z}}_1,\tau),t)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\eta_2(\tau) = [1-\alpha_1]\int_{\tau}^{T}\mathbf{B}(\acute{\mathbf{x}}_1(\acute{\mathbf{z}}_1,\tau),t)dt + \int_{\tau}^{T}\mathbf{B}(\acute{\mathbf{x}}_2(\acute{\mathbf{z}}_2,\tau),t)dt, \quad \dot{\acute{\mathbf{z}}}_2 = \eta_2(\tau)$$

$$\ddot{\acute{\mathbf{x}}}_2 = \mathbf{f}(\acute{\mathbf{x}}_2, \dot{\acute{\mathbf{x}}}_2, \acute{\mathbf{z}}_2) - \mu^{-1}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}_2}\mathbf{N}^{-1}\left(\mathbf{y} - \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}_2(\acute{\mathbf{z}}_2,\tau),t)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{10}$$

$$\eta_k(\tau) = -\int_{\tau}^{T}\sum_{i=1}^{k}\gamma_i^k\mathbf{B}(\acute{\mathbf{x}}_i(\acute{\mathbf{z}}_i,\tau),t)dt, \quad \dot{\acute{\mathbf{z}}}_k = \eta_k(\tau)$$

$$\ddot{\acute{\mathbf{x}}}_k = \mathbf{f}(\acute{\mathbf{x}}_k, \dot{\acute{\mathbf{x}}}_k, \acute{\mathbf{z}}_k) - \mu^{-1}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}_k}\mathbf{N}^{-1}\left(\mathbf{y} - \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}_k(\acute{\mathbf{z}}_k,\tau),t)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\acute{\mathbf{x}}_i(t_0) = \mathbf{x}(0), \quad \dot{\acute{\mathbf{x}}}_i(t_0) = \dot{\mathbf{x}}(0), \quad \acute{\mathbf{z}}_i(t_0) = \mathbf{z}(0), \quad \tau \in [0,T],$$

где γ_i^k определяется по правилу [3] $\gamma_i^k = \left[1-\alpha_{i-1}\right] \cdot\ldots\cdot \left[1-\alpha_{k-1}\right], \quad i = \overline{1,k}.$

Пусть задача оценки $\acute{\mathbf{z}}_k(\tau)$ процесса (1)–(3) рассматривается для момента времени τ когда желательно получить оценку, соответствующую точке *T* интервала наблюдения $[0,T]$, а *T* увеличивается. Требуется получить $\acute{\mathbf{z}}_k$ как функцию от *T*, доставляющую минимум критерию (5). Для решения данной задачи преобразуем уравнение (10) к виду двухточечной краевой задачи. Для этого продифференцируем правую часть уравнения (10) по параметру τ, в результате преобразований с учетом правила Лейбница получим:

$$\frac{d\eta_k(\tau)}{d\tau} = \sum_{i=1}^{k}\gamma_i^k\mathbf{B}(\tau, \acute{\mathbf{x}}_i(\acute{\mathbf{z}}_i(\tau))).$$

Полученная каждая *k*-тая двухточечная краевая задача выглядит следующим образом:

$$\acute{\dot{\mathbf{z}}}_k = \eta_k(\tau),$$
$$\dot{\eta}_k(\tau) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^k \mathbf{B}\left(\tau, \acute{\mathbf{x}}_i\right),$$
$$\ddot{\acute{\mathbf{x}}}_k = \mathbf{f}(\acute{\mathbf{x}}_k, \dot{\acute{\mathbf{x}}}_k, \acute{\mathbf{z}}_k) - \mu^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}_k} \mathbf{N}^{-1} \left(\mathbf{y} - \mathbf{H}\left(\acute{\mathbf{x}}_k(\acute{\mathbf{z}}_k, \tau), t\right)\right)^{\mathrm{T}},$$
$$\eta_k(T) = 0, \ \mathbf{z}_k(0) = \mathbf{z}^0 + \mathbf{P}^0 \eta_k(0),$$

где $\mathbf{P}^0$ – некоторая матрица размера $m \times m$, $i = \overline{1,k}$.

Применение метода инвариантного погружения позволяет получить итерационный алгоритм идентификации, который выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\dot{\acute{\mathbf{z}}}_0 = \mathbf{P}_0 \mathbf{G}_0^{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathbf{H}^{\mathrm{T}}}{\partial \acute{\mathbf{x}}} \mathbf{N}^{-1} \gamma_0^1 (\mathbf{y} - \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}_0(\acute{\mathbf{z}}_0), t)),\\
&\dot{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0 \mathbf{G}_0^{\mathrm{T}} \frac{\partial}{\partial \acute{\mathbf{x}}} \left\{ \frac{\partial \mathbf{H}^{\mathrm{T}}}{\partial \acute{\mathbf{x}}} \mathbf{N}^{-1} \gamma_0^1 (\mathbf{y} - \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}_0(\acute{\mathbf{z}}_0), t)) \right\} \mathbf{G}_0 \mathbf{P}_0,\\
&\ddot{\mathbf{G}}_0 = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\acute{\mathbf{x}}}} \dot{\mathbf{G}}_0 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \acute{\mathbf{x}}} \mathbf{G}_0 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \acute{\mathbf{z}}},\\
&\ddot{\acute{\mathbf{x}}}_0 = \mathbf{f}(\acute{\mathbf{x}}_0, \dot{\acute{\mathbf{x}}}_0, \acute{\mathbf{z}}_0) - \mu^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}^{\mathrm{T}}}{\partial \acute{\mathbf{x}}} \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}_0(\acute{\mathbf{z}}_0), t)),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (11)\\
&\dot{\acute{\mathbf{z}}}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{G}_k^{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathbf{H}^{\mathrm{T}}}{\partial \acute{\mathbf{x}}} \mathbf{N}^{-1} \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^k (\mathbf{y} - \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}_i(\acute{\mathbf{z}}_i), t)),\\
&\dot{\mathbf{P}}_k = \mathbf{I} - \mathbf{P}_k \mathbf{G}_k^{\mathrm{T}} \frac{\partial}{\partial \acute{\mathbf{x}}} \left\{ \frac{\partial \mathbf{H}^{\mathrm{T}}}{\partial \acute{\mathbf{x}}} \mathbf{N}^{-1} \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^k (\mathbf{y} - \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}_i(\acute{\mathbf{z}}_i), t)) \right\} \mathbf{G}_k \mathbf{P}_k,\\
&\ddot{\mathbf{G}}_k = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\acute{\mathbf{x}}}} \dot{\mathbf{G}}_k + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \acute{\mathbf{x}}} \mathbf{G}_k + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \acute{\mathbf{z}}}, \quad \mathbf{G}_k(0) = \dot{\mathbf{G}}_k(0) = 0,\\
&\ddot{\acute{\mathbf{x}}}_k = \mathbf{f}(\acute{\mathbf{x}}_k, \dot{\acute{\mathbf{x}}}_k, \acute{\mathbf{z}}_k) - \mu^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}^{\mathrm{T}}}{\partial \acute{\mathbf{x}}} \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}_i(\acute{\mathbf{z}}_i), t)),\\
&\mathbf{P}_i(t_0) = \mathbf{P}(0), \quad \acute{\mathbf{x}}_i(0) = \mathbf{x}(0), \ \dot{\acute{\mathbf{x}}}_i(0) = \dot{\mathbf{x}}(0). \ i = \overline{1,k}
\end{aligned}$$

где $\mathbf{I}$ –единичная матрица.

Первая группа уравнений (11) представляет собой рекуррентные уравнения последовательной идентификации, а каждое последующее уравнение оценки для $k+1$ использует в качестве входных параметров y, $\acute{z}_1, \ldots, \acute{z}_k$ и $\acute{x}_1, \ldots, \acute{x}_k$ что позволяет получить более точные значения идентифицируемых параметров.

Пример

Для рассмотрения эффективности и свойств разработанного подхода решим задачу по оценке неизвестны коэффициентов z_0 и z_1 модели аналогового сигнала, представленного дифференциальным уравнением вида:

$$\ddot{x}(t) + z_0 \dot{x}(t) + z_1 x(t) = P_u(t), \qquad (12)$$
$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

где $x(t)$ – координата сигнала в момент времени t;

$P_u(t)$ – внешнее воздействие на сигнал.

Информационные сообщения, зачастую, имеют такую форму сигнала.

Модель наблюдения выходного сигнала имеет вид:

$$y(t) = x(t)\,. \tag{13}$$

Необходимо провести оценку неизвестных наблюдателю параметров ($z_0 = 0.5$, $z_1 = 2$) информационного сообщения из условия минимума целевого функционала [8]:

$$J_1 = 0.5\int_0^T [y - \acute{x}(\acute{z}_0, \acute{z}_1, t)]^2 dt \to \min\,. \tag{14}$$

Решение задачи (12)–(14) потребует расширения пространства состояний до вида:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ z_0 x_1 + z_1 x_0 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

где $x_0 = x$, $x_1 = \dot{x}_0$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix}$.

Запишем с учетом (3) уравнения наблюдения (13) в форме:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}, t)\,, \tag{16}$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}, t) = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Для (15) функция чувствительности системы (12) примет вид:

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{G}} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \acute{\mathbf{x}}}\mathbf{G} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \acute{\mathbf{z}}}, \\ \mathbf{G}(0) = \dot{\mathbf{G}}(0) = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

С учетом приведенных выражений (15)–(17) алгоритм идентификации (11) для одной итерации будет определен следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{\acute{\mathbf{z}}} = \mathbf{P}\mathbf{G}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathbf{H}^{\mathrm{T}}}{\partial \acute{\mathbf{x}}}(\mathbf{y} - \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}, t)), \\ &\dot{\mathbf{P}} = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{G}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathbf{H}^{\mathrm{T}}}{\partial \acute{\mathbf{x}}}\mathbf{G}\mathbf{P},\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0, \\ &\dot{\mathbf{G}} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \acute{\mathbf{x}}}\mathbf{G} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \acute{\mathbf{z}}}, \mathbf{G}(0) = \dot{\mathbf{G}}(0) = 0, \\ &\dot{\acute{\mathbf{x}}} = \mathrm{F}(\acute{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) - \mu^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}^{\mathrm{T}}}{\partial \acute{\mathbf{x}}}(\mathbf{y} - \mathbf{H}(\acute{\mathbf{x}}, t)), \\ &\acute{\mathbf{x}}(0) = \dot{\acute{\mathbf{x}}}(0) = 0, \acute{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{z}^0, \mu = 45,\ \alpha = 0.63. \end{aligned} \tag{18}$$

Продемонстрировать эффективность предлагаемого подхода и оценить свойства алгоритма (11) возможно путем проведения вычислительного эксперимента в сравнении результатов с расширенным фильтром Калмана.

За входной измерительный сигнал примем единичную ступенчатую функцию вида:

$$P_u(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Численное моделирование алгоритма идентификации параметров модели информационного сообщения проведено с использованием среды математического программирования MathCad. Результаты приведены на рисунке 1.

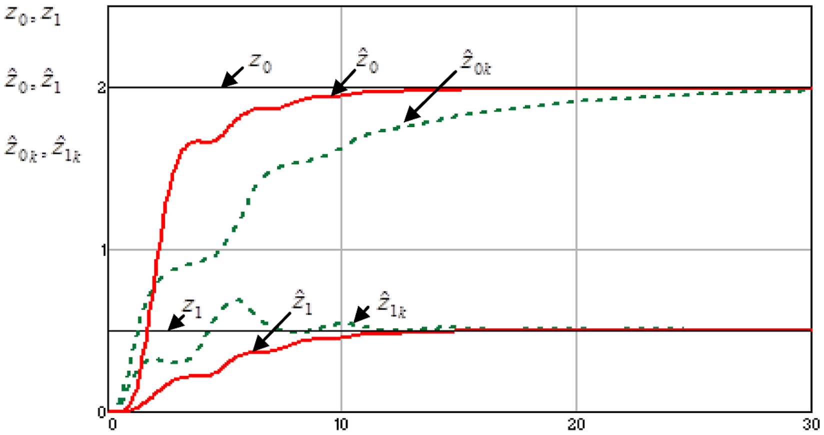

Рисунок 1 – Идентификация неизвестных параметров информационного сообщения

На рисунке 1 показаны прямой сплошной линией z_0 , z_1 действительные значения параметров сигнала, равные 0,5 и 2 соответственно, оценки сплошной линией $\hat{z}_0$, $\hat{z}_1$ модели (12) полученные с помощью рассматриваемого алгоритма (18), а также, для сравнения, оценки пунктирной линией $\hat{z}_{0k}$, $\hat{z}_{1k}$ расширенного фильтра Калмана [5].

Для оценки эффективности, в установившемся режиме при $t = 20$ определим относительную погрешность идентификации параметров (таблица 1).

Таблица 1 – Относительная погрешность оценки параметров z_0 , z_1

Относительная погрешность оценки параметра	**Рассматриваемый подход**	**Расширенный фильтр Калмана**
z_0	0,1%	1,5%
z_1	1,5%	6%

Для повышения точности оценки может применяться вторая и последующие итерации, согласно (11). В этом случае, к примеру, выигрыш в точности на второй итерации по отношению к первой составит $\delta z^0 = 4.3\%$ для первого параметра z_0 и $\delta z^1 = 6.1\%$ для второго параметра z_1 .

Вывод

Представленный подход позволил решить задачу по оценке параметров модели информационного сообщения и повысить точность получаемых оценок и скорость их сходимости за счет последовательного уточнения на каждой итерации.

Список литературы

1. *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Высш. шк., 1989. – 263 с.
2. *Костоглотов А.А., Лазаренко С.В., Андрашитов Д.С.* Регуляризированный алгоритм многопараметрической вариационной идентификации динамических систем / Сервис в России и за рубежом. – № 8(27) [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.rguts.ru/electronic_journal/number27/contents (дата обращения: 11.04.2019).
3. *Костоглотов А.А.* Синтез интеллектуальных измерительных процедур на основе принципа регуляризации А.Н. Тихонова. Измерительная техника. – 2001. – № 1.
4. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961. – 824 с.
5. *Сейдж Э.П.* Идентификация систем управления / Э.П. Сейдж, Д.Л Мелс. – М.: Наука, 1974. – 246 с.
6. Справочник по теории автоматического управления / под ред. Красовского А.А. – М.: Наука, 1987. – 712 с.

7. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
8. *Lazarenko S.V., Pugachev I.V., Kostoglotov A.A., Deryabkin I.V., Andrashitov D.S.* The synthesis of the algorithms for state estimation and the parameters of measurement converters based on the combined maximum principle in the problems of dynamic error correction// 2017 International Conference on Mechanical, System and Control Engineering, ICMSC 2017 2017. – С. 292–296.

References

1. *Aleksandrov A.G.* Optimal'nye i adaptivnye sistemy. – M.: Vyssh. shk., 1989. – 263 c.
2. *Kostoglotov A.A., Lazarenko S.V., Andrashitov D.S.* Regulyarizirovannyj algoritm mnogoparametricheskoj variacionnoj identifikacii dinamicheskih sistem / Servis v Rossii i za rubezhom, № 8(27). URL: http://www.rguts.ru/electronic_journal/number27/contents (date accessed:11.04.2019).
3. *Kostoglotov A.A.* Sintez intellektual'nyh izmeritel'nyh procedur na osnove principa regulyarizacii A.N. Tihonova. Izmeritel'naya tekhnika. – 2001. – № 1.
4. *Lur'e A.I.* Analiticheskaya mekhanika. – M.: Gos. izd. fiz.-mat. lit., 1961. – 824 s.
5. *Sejdzh Eh.P.* Identifikaciya sistem upravleniya / Eh.P. Sejdzh, D.L Mels. – M.: Nauka, 1974. – 246 c.
6. Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya/ pod red. Krasovskogo A.A. – M.: Nauka, 1987. – 712 s.
7. *Tihonov A.N., Arsenin V.Ya.* Metody resheniya nekorrektnyh zadach. – M.: Nauka, 1986. – 288 s.
8. *Lazarenko S.V.,* The synthesis of the algorithms for state estimation and the parameters of measurement converters based on the combined maximum principle in the problems of dynamic error correction// 2017 International Conference on Mechanical, System and Control Engineering, ICMSC 2017 2017. – S. 292–296.