УДК 519.14

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Бондаренко Леонид Николаевич,
канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой гуманитарных
и естественно-научных дисциплин,
e-mail: leobond5@mail.ru,
Московский университет им. С.Ю. Витте, филиал в г. Сергиевом Посаде

Рассматривается метод моделирования комбинаторных последовательностей с использованием особых последовательностей таблиц, состоящих из целых положительных чисел. Эти последовательности называются Т-моделями и строятся рекурсивно с помощью специальных отображений. Для Т-моделей вводятся q-аналоги, позволяющие моделировать отвечающие им q-аналоги комбинаторных последовательностей. Также определяются частично упорядоченные множества и соответствующие им Т-диаграммы. С помощью этих частично упорядоченных множеств и Т-диаграмм рассматриваются многочисленные дополнительные свойства моделируемых комбинаторных последовательностей. Приводятся примеры Т-моделей последовательностей обобщенных факториалов, чисел Каталана и чисел Белла. Строятся их q-аналоги и Т-диаграммы. Это дает возможность исследовать также свойства баллотировочных чисел, чисел Стирлинга второго рода и их q-аналогов. Строение Т-моделей комбинаторных последовательностей позволяет применять при их моделировании известные пакеты аналитических вычислений Mathematica и Maple. Поэтому Т-модели можно использовать при обучении студентов отдельным разделам дискретной математики и информатики, а также получать с их помощью комбинаторные результаты.

Ключевые слова: Т-модель, *T*(*q*)-модель, посет, Т-диаграмма, дистрибутивная решетка, обобщенные факториалы, числа Каталана, числа Белла, коды Лемера, RG-слова

MODELING OF COMBINATOR SEQUENCES

Bondarenko L.N.,
candidate of engineering sciences, Associate Professor,
head of the sub-department of humanities and natural science disciplines,
e-mail: leobond5@mail.ru,
Moscow Witte University, a branch in the city of Sergiev Posad

The method of modeling combinatorial sequences using special sequences of tables consisting of positive integers is considered. These sequences are called T-models and are constructed recursively using special mappings. For T-models, q-analogues are introduced, which allow modeling the q-analogs of combinatorial sequences corresponding to them. Partially ordered sets and the corresponding T-diagrams are also defined. With the help of these partially ordered sets and T-diagrams, numerous additional properties of the simulated combinatorial sequences are considered.

Examples of T-models of sequences of generalized factorials, Catalan numbers and Bell numbers are given. Their q-analogues and T-diagrams are constructed. This makes it possible to investigate also the properties of balloting numbers, Stirling numbers of the second kind and their q-analogues.

The structure of T-models of combinatorial sequences makes it possible to use the well-known analytical calculation packages Mathematica and Maple in their modeling. Therefore, T-models can be used in teaching students to separate sections of discrete mathematics and computer science, as well as to obtain with their help combinatorial results.

Keywords: T-model, *T*(*q*)-model, poset, T-diagram, distributive lattice, generalized factorials, Catalan numbers, Bell numbers, Lehmer codes, RG-words

DOI 10.21777/2500-2112-2019-2-64-73

Введение

Разнообразные комбинаторные проблемы возникают во многих областях современной математики и ее приложений к практическим задачам структуризации, классификации, оптимизации и т.п.

Перечислительная комбинаторика является одним из основных разделов комбинаторного анализа и занимается подсчетом числа элементов в конечном множестве. Благодаря огромным усилиям ряда выдающихся математиков, многие задачи теории перечислений удалось описать на единой основе и превратить комбинаторику в составную часть магистрального направления современной математики [6, 7].

К важнейшим областям практической применимости полученных в теории перечислений результатов традиционно относятся математическая статистика и информатика, а уникальная «The on-line encyclopedia of integer sequences» (OEIS) [12], основанная Нилом Слоуном в 1964 г., содержит в настоящее время около 300000 статей по числовым последовательностям, встречающимся в комбинаторике, теории графов и т.д.

В статьях OEIS имеются ссылки на самые разнообразные комбинаторные методы, используемые для изучения свойств и классификации этих последовательностей, среди которых следует особо выделить классические подходы, базирующиеся на применении рекуррентных соотношений и мощнейшего аппарата производящих функций.

Для моделирования ряда числовых последовательностей, описываемых в OEIS, в [1] было введено понятие *T*-модели как рекурсивно генерируемой последовательности таблиц T_1, T_2,... состоящих из целых положительных чисел. Это понятие часто позволяет при анализе *T*-модели получать простые рекуррентные соотношения и находить естественные ее связи с другими комбинаторными моделями.

T-модели и их свойства

При рекурсивном описании последовательности таблиц T_1, T_2,..., состоящих из целых положительных чисел, необходимо иметь первый член этой последовательности, правило преобразования ее членов и ограничения на элементы генерируемых таблиц.

Определение 1. Зададим *T*-модель тройкой (S, θ, T_1) с алфавитом $S \subseteq \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$, отображением $\theta : s \to j_1 j_2 \ldots j_s$, где символ $s \in S$, и выполнены неравенства $1 \le j_1 \le j_2 \le \ldots \le j_s$, а также фиксированной начальной таблицей T_1. Отображение θ преобразует каждый элемент $s \in T_n$ в числовую неубывающую последовательность (строку) $j_1 j_2 \ldots j_s$ длины $\left|\theta(s)\right| = s$ последующей таблицы T_{n+1}, вычисляемой рекурсивно по формуле:

$$T_{n+1} = \theta(T_n), \ n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Для описания свойств *T*-модели степени образов $\theta^i(s)$ элементов $s \in T_n$ при $i \ge 0$ названы в [1] блоками *i*-го ранга таблиц T_{n+i}. Также введен вес $\left|\theta^i(s)\right|$ каждого блока $\theta^i(s)$ при $i \ge 1$, равный числу содержащихся в нем блоков $(i - 1)$-го ранга, а $\left|\theta^0(s)\right| = s$. Эти понятия и соотношение (1) позволяют определить i-й вес таблицы T_{n+i} выражением:

$$\left|T_{n+i}\right|_i = \left|\theta^i(T_n)\right| = \sum_{s \in T_n} \left|\theta^i(s)\right|, i \ge 0, n \in \mathbf{N},$$

с помощью которого и простого равенства $\left|\theta^i(s)\right| = s$ при $i \ge 0$ для всех $n \in \mathbf{N}$ несложно получить важное свойство инвариантности $\left|T_{n+i}\right|_i = \left|T_n\right|_0$, характеризующее последовательность весов таблиц *T*-модели.

В частности, веса $\left|T_n\right|_i$ при $n > i$, где $i = 0, 1, \ldots$, равны, соответственно, сумме элементов, числу элементов, числу строк и т.д. таблицы T_n.

Веса таблиц *T*-модели образуют возрастающую последовательность целых положительных чисел, которая соответствует этой *T*-модели. Поэтому удобно называть *T*-модель по имени отвечающей ей числовой последовательности, и появляется возможность моделирования с помощью *T*-моделей многих комбинаторных последовательностей из OEIS.

С каждой таблицей T-модели также несложно связать двухиндексную числовую последовательность. Для этого необходимо ввести соответствующий многочлен, являющийся производящей функцией данной двухиндексной последовательности.

Определение 2. Сопоставим каждой таблице T_n данной T-модели многочлен $\sum_{s\in T_n} t^s$ и с помощью равенства $\theta(t^s)=t^{j_1}+t^{j_2}+\ldots+t^{j_s}$ перенесем на него действие θ из определения 1 по следующему правилу:

$$\sum_{s\in T_{n+1}} t^s=\theta\left(\sum_{s\in T_n} t^s\right)=\sum_{s\in T_n}\theta(t^s).$$

Очевидно, что при $t=1$ значения введенных в определении 2 многочленов и их производных совпадают с $|T_n|_1$ и, соответственно, с $|T_n|_0$. Запись этих многочленов рационально модифицировать путем умножения на фиксированную степень t (чаще других применяется умножение на t^{-1}), а также при $n=0$ ввести многочлен, равный единице.

В качестве примеров использования введенных понятий рассмотрим три типовые числовые последовательности, описываемые при $n\in\mathbf{N}$ следующими формулами:

а) последовательность обобщенных факториалов $((r-1)(n-1)+1)!^{(r-1)}$, где параметр $r\in\mathbf{N}$;

б) последовательность чисел Каталана C_n [12; A000108], а также

в) последовательность чисел Белла $\sum_{k=1}^{n}\left\{ n \atop k \right\}$ [12; A000110], где числа $\left\{ n \atop k \right\}$ являются числами Стирлинга второго рода.

Для записи семейства последовательностей а), зависящего от параметра $r\in\mathbf{N}$, использовано обобщение символа факториала [5].

$$(rm+1)!^{(r)}=1\cdot(r+1)\cdot(2r+1)\ldots(rm+1),\ m\in\mathbf{N}\cup\{0\},$$

дающее возможность записывать аналоги факториалов с шагом $r\in\mathbf{N}$.

Последовательность б) чисел Каталана C_n в комбинаторике может рассматриваться как «лакмусова бумажка», так как для нее известно огромное число комбинаторных моделей [3, 7, 11], а ее члены имеют вид:

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

где круглые скобки, как обычно, использованы для обозначения часто используемых в комбинаторике биномиальных коэффициентов [3, 6].

При обозначении часто применяемых чисел Стирлинга второго рода [12; A008277] во многих современных работах по аналогии с биномиальными коэффициентами применяются фигурные скобки [3].

Пример 1. (T-модели обобщенных факториалов) Рассмотрим параметризованное семейство T-моделей, задаваемое тройкой $(S^{(r)},\theta_r,T_1^{(r)})$ с алфавитом $S^{(r)}$ из символов S вида $(r-1)n+1$ при $n\in\mathbf{N}$ и элементами $\theta_r: s\to(s+r-1)^s$, $T_1^{(r)}=(r)$, зависящими от параметра $r\in\mathbf{N}$.

В частности, случай $r=1$ тривиален, при $r=2$ получаем последовательность таблиц $T_1^{(2)},T_2^{(2)},T_3^{(2)},T_4^{(2)},\ldots$ следующего вида:

$$(2),\ (33),\ \begin{pmatrix}444\\444\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5555 & 5555\\5555 & 5555\\5555 & 5555\end{pmatrix},\ldots,$$

а при $r=3$, соответственно, последовательность $T_1^{(3)},T_2^{(3)},T_3^{(3)},T_4^{(3)},\ldots$:

$$(3),\ (555),\ \begin{pmatrix}77777\\77777\\77777\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}9999999 & 9999999 & 9999999\\9999999 & 9999999 & 9999999\\9999999 & 9999999 & 9999999\\9999999 & 9999999 & 9999999\\9999999 & 9999999 & 9999999\end{pmatrix},\ldots.$$

По определению 2 (при выборе множителя t^{-1}) этому семейству отвечает последовательность одночленов $((r-1)(n-1)+1)!^{(r-1)}t^{(r-1)n}$, а последовательность весов таблиц этого семейства $|T_n^{(r)}|_1 = ((r-1)(n-1)+1)!^{(r-1)}$ соответствует последовательности а) обобщенных факториалов, зависящей от параметра $r \in \mathbf{N}$. Такие последовательности при $r = 2,3,4,5,6,\ldots$ имеются в OEIS [12; A000142, A001147, A007559, A007696, A008548 и т.д.].

Пример 2. (*T*-модель Каталана) При алфавите $S = \mathbf{N} - \{1\}$, отображении $\theta : s \to 23\ldots s+1$ и начальной таблице $T_1 = (2)$ по определению 1 получаем *T*-модель, состоящую из таблиц $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, \ldots$:

$$(2),\ (23),\ \begin{pmatrix} 23 \\ 234 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 23 & 23 \\ 234 & 234 \\ & 2345 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\ 234 & 234 & 234 & 234 & 234 \\ & 2345 & & 2345 & 2345 \\ & & & & 23456 \end{pmatrix},\ldots,$$

в которой $|T_5|_0 = 132,\ |T_5|_1 = 42,\ |T_5|_2 = 14,\ |T_5|_3 = 5,\ |T_5|_4 = 2$, а $|T_n|_n = 1$.

Для этой *T*-модели по определению 2 строятся многочлены:

$$B_0(t) = 1,\ B_n(t) = t^{-1}\sum_{s\in T_n} t^s = \sum_{k=0}^{n-1} B_{n,k}\, t^{n-k},\ n \in \mathbf{N},$$

для которых из таблиц *T*-модели легко вычисляются выражения:

$$B_1(t) = t,\ B_2(t) = t^2 + t,\ B_3(t) = t^3 + 2t^2 + 2t,\ B_4(t) = t^4 + 3t^3 + 5t^2 + 5t,\ldots,$$

в которых $B_{n,0} = 1$ при $n \in \mathbf{N}$. Также при $s \in S$ с использованием простого тождества $(1-t)\theta(t^s) = t^2(1-t^s)$ находится рекуррентное соотношение:

$$B_0(t) = 1,\ (1-t)B_n(t) + t^2 B_{n-1}(t) = tB_{n-1}(1),\ n \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

С помощью формулы (2) в [1] доказано, что коэффициенты $B_{n,k}$ многочлена $B_n(t)$ совпадают с известными баллотировочными числами [8]:

$$B_{n,k} = \frac{n-k}{n+k}\binom{n+k}{n},\ k = 0,\ldots,n-1,\ n \in \mathbf{N},$$

которые имеются в OEIS [12; A009766], а их сумма $B_n(1) = |T_n|_1$ равна числу Каталана C_n, т.е. *T*-модели отвечает последовательность чисел Каталана.

Анализ *T*-модели Каталана позволил на базе соотношений вида (2) разработать новый метод нахождения производящей функции числовой последовательности, отвечающей рассматриваемой *T*-модели [1]. В частности, для *T*-модели Калана выражение (2) приводит к известной формуле:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n u^n = \frac{1-\sqrt{1-4u}}{2u}.$$

Пример 3. (*T*-модель Белла) При алфавите $S = \mathbf{N} - \{1\}$ отображении $\theta : s \to s^{s-1}(s+1)$ и начальной таблице $T_1 = (2)$ по определению 1 получаем *T*-модель, состоящую из таблиц $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, \ldots$:

$$(2),\ (23),\ \begin{pmatrix} 23 \\ 334 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 23 & 334 \\ 334 & 334 \\ & 4445 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 23 & 334 & 334 & 334 & 4445 \\ 334 & 334 & 334 & 334 & 4445 \\ & 4445 & 4445 & 4445 & 4445 \\ & & & & 55556 \end{pmatrix},\ldots,$$

в которой $\left|T_5\right|_0 = 203, \left|T_5\right|_1 = 52, \left|T_5\right|_2 = 15, \left|T_5\right|_3 = 5, \left|T_5\right|_4 = 2$, а $\left|T_n\right|_n = 1$.

Для этой T-модели по определению 2 строятся многочлены:

$$E_0(t) = 1,\ E_n(t) = t^{-1}\sum_{s\in T_n} t^s = \sum_{k=1}^{n} E_{n,k}\, t^k,\ n\in\mathbf{N},$$

для которых из таблиц T-модели легко вычисляются выражения:

$$E_1(t) = t,\ E_2(t) = t^2 + t,\ E_3(t) = t^3 + 3t^2 + t,\ E_4(t) = t^4 + 6t^3 + 7t^2 + t, \ldots,$$

а также непосредственно по таблицам T-модели получаются равенства $E_{n,1} = E_{n,n} = 1$, и по индукции за счет простоты отображения θ легко находится рекуррентное соотношение для коэффициентов этих многочленов:

$$E_{0,k} = \delta_{0,k},\ E_{n,k} = k\,E_{n-1,k} + E_{n-1,k-1},\ k\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{N}, \tag{3}$$

в котором символ Кронекера $\delta_{0,k} = 1$ при $k = 0$ и $\delta_{0,k} = 0$, в противном случае, а индекс k пробегает все целые числа $\mathbf{Z}$.

Так как выражение (3) совпадает с формулой, определяющей числа Стирлинга второго рода [3, 6], то имеем $E_{n,k} = \left\{ {n \atop k} \right\}$, $E_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$,

а для экспоненциальных многочленов $E_n(t)$ справедлива рекуррентная формула:

$$E_0(t) = 1,\ E_n(t) = t(E_{n-1}(t) + E'_{n-1}(t)),\ n\in\mathbf{N},$$

с помощью которой просто находится производящая функция:

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(t)u^n = e^{t(e^u - 1)}.$$

q-аналоги *T*-моделей и их свойства

Естественное получение q-аналогов T-моделей основано на замене натурального числа $n\in\mathbf{N}$ его q-аналогом $[n] = 1 + q + \ldots + q^{n-1}$, где q – параметр, причем $[n]! = [1]\cdot[2]\cdots[n]$ является q-аналогом факториала $n!$.

Определение 3. Тройка $(S, \theta_q, T_1(q))$, задающая последовательность таблиц $T_1(q), T_2(q), \ldots$ аналогично формуле (1) по правилу:

$$T_{n+1}(q) = \theta_q(T_n(q)),\ n\in\mathbf{N},$$

где $S\subseteq\mathbf{N}$, $T_1(q)$ – фиксированная начальная таблица, а отображение:

$$\theta_q : q^k[s] \to q^k[j_1]\ldots q^{k+s-1}[j_s],\ k\ge 0,\ 1\le j_1\le\ldots\le j_s,$$

называется $T(q)$-моделью или q-аналогом T-модели определения 1 [1].

Степени отображения θ_q легко связать с блоками таблиц $T_n(q)$, что при $n\in\mathbf{N}$ и $i\ge 0$ приводит к равенству $\left|T_{n+i}(q)\right|_i = \left|T_n(q)\right|_0$, в котором $\left|T_n(q)\right|_0$ означает сумму элементов таблицы $T_n(q)$.

Соответственно, q-аналоги многочленов, введенных в определении 2, получаются заменой q-чисел $[s]$ в таблицах $T_n(q)$ на t^s и суммированием полученных элементов таблиц, что дает при $t = 1$ веса $\left|T_n(q)\right|_1$.

Пример 4. По определению 3 q-аналогом семейства T-моделей примера 1 служит тройка $(S^{(r)}, \theta_r(q), T_1^{(r)}(q))$ с $T_1^{(r)}(q) = ([r])$, отображением $\theta_r(q): q^k[s] \to q^k[s+r-1]\, q^{k+1}[s+r-1] \ldots q^{k+s-1}[s+r-1]$, где $k \geq 0$, и имеем при $n \in \mathbf{N}$ последовательность (t,q)-полиномов $[((r-1)(n-1)+1)]!^{(r-1)}\, t^{(r-1)n}$.

Пример 5. q-аналог T-модели Каталана при $T_1(q) = ([2])$, отображении $\theta_q : q^k[s] \to q^k[2]\, q^{k+1}[3] \ldots q^{k+s-1}[s+1]$, где $k \geq 0$, имеет следующий вид:

$$([2]),\ ([2]q[3]),\ \begin{pmatrix} [2]\ q[3] & \\ q[2]q^2[3]q^3[4] & \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} [2]\ q[3] & q[2]q^2[3] \\ q[2]q^2[3]q^3[4] & q^2[2]q^3[3]q^4[4] \\ & q^3[2]q^4[3]q^5[4]q^6[5] \end{pmatrix}, \ldots,$$

многочлены $B_0(t,q) = 1,\ B_n(t,q) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{n,k}(q)\, t^{n-k}$ при $B_{n,0}(q) = q^{\binom{n}{2}}$ и $n \in \mathbf{N}$ являются q-аналогами соответствующих многочленов примера 2, причем:

$$B_1(t,q) = t,\ B_2(t,q) = qt^2 + t,\ B_3(t,q) = q^3t^3 + (q^2+q)t^2 + (q+1)t,$$

$$B_4(t,q) = q^6t^4 + (q^5+q^4+q^3)t^3 + (q^4+q^3+2q^2+q)t^2 + (q^3+q^2+2q+1)t, \ldots,$$

а q-обобщением выражения (2) служит рекуррентная формула:

$$B_0(t,q) = 1,\ (1-qt)B_n(t,q) + qt^2 B_{n-1}(qt,q) = tB_{n-1}(1,q),\ n \in \mathbf{N},$$

проверяемая с помощью равенства $(1-qt)\theta_q(t^s) = t^2(1-q^s t^s)$.

Таким образом, числа $C_n(q) = B_n(1,q)$ являются q-аналогами чисел Каталана [1], которые также описаны в [8].

Пример 6. $T(q)$-модели Белла при $n \in \mathbf{N}$ отвечает последовательность весов соответствующих таблиц $\left|T_n(q)\right|_1 = E_n(1,q)$, в которой числа $E_n(1,q)$ являются q-аналогами чисел Белла. Вычисление чисел $E_n(1,q)$ производится с помощью q-аналогов экспоненциальных многочленов:

$$E_0(t,q) = 1,\ E_n(t,q) = \sum_{k=1}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_q t^k,\ n \in \mathbf{N},$$

коэффициентами которых служат q-аналоги чисел Стирлинга второго рода [9], вычисляемые по рекуррентной формуле:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ k \end{Bmatrix}_q = \delta_{0,k},\ \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_q = [k]\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}_q + q^{k-1}\begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}_q,\ k \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}.$$

T-диаграммы и их свойства

Для приложения мощного аппарата частично упорядоченных множеств [6] к T-модели определения 1 следует сопоставить каждой ее таблице T_n локально конечное частично упорядоченное множество (посет) P_n.

Будем считать, что начальная таблица T-модели (S, θ, T_1) содержит только один элемент, больший единицы. При этом условии рекурсивно зададим нумерацию элементов таблиц этой T-модели следующим образом: положим номер ν единственного элемента T_1, равным 1; считая $s, s' \in S$ и $n \geq 2$, сопоставим элементу $s' \in T_n$ строки $\theta(s)$ номер (слово) $\nu = \nu_1 \ldots \nu_{n-1} \nu_n$ с префиксом $\nu_1 \ldots \nu_{n-1}$, равным номеру элемента $s \in T_{n-1}$, и суффиксом ν_n, равным порядковому номеру элемента s' в строке $\theta(s)$.

Определение 4. На множестве номеров P_n таблицы T_n, рассматриваемых как векторы, определим частичный порядок, полагая, что номер $\nu' \in P_n$ покрывает $\nu \in P_n$, если вектор $\nu' - \nu$ имеет все нулевые координаты, кроме одной, равной единице. Диаграмму Хассе посета P_n обозначим L_n и назовем ее T-диаграммой таблицы T_n.

Обозначая $\rho(\nu) = (\nu_1 - 1) + \ldots + (\nu_n - 1)$ ранг номера $\nu \in P_n$, получим $\rho(\nu) = 0$ для наименьшего номера $\nu \in P_n$, $\rho(\nu') - \rho(\nu) = 1$ для номеров $\nu, \nu' \in P_n$, где ν' покрывает ν.

Также введем для посета P_n рангово-производящий многочлен $\sum_{\nu \in P_n} q^{\rho(\nu)}$.

Теорема 1. Ранг $\rho(\nu)$ номера $\nu \in P_n$ таблицы T_n совпадает со степенью k параметра q соответствующего элемента $q^k[j]$ таблицы $T_n(q)$.

Теорема 1 позволяет вычислять рангово-производящие многочлены посетов P_n с помощью $T(q)$-модели. Ее справедливость легко проверяется с помощью индукции. Действительно, при $n = 1$ утверждение теоремы 1 верно, а, предполагая его справедливость при $n \in \mathbf{N}$, по записи отображения θ_q в определении 3 сразу получаем его правильность и для $n+1$.

Для T-модели (S, θ, T_1) отображение $\theta: s \to j_1 j_2 \ldots j_s$ назовем регулярным, если для всех $s_1, s_2, \ldots \in S$, где $s_1 < s_2 < \ldots$, все столбцы таблицы:

$$s_1 \to j_{11} j_{12} \ldots j_{1 s_1}$$

$$s_2 \to j_{21} j_{22} \ldots j_{2 s_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

являются неубывающими числовыми последовательностями.

В частности, легко проверить, что в примерах 1 – 3 все отображения θ являются регулярными.

Теорема 2. Для T-модели (S, θ, T_1) с регулярным отображением θ все посеты P_n при $n \geq 2$ являются дистрибутивными решетками.

Требование регулярности отображения θ T-модели (S, θ, T_1) приводит к тому, что все посеты P_n при $n \geq 2$ являются решетками, содержащими наименьший и наибольший элементы. Поэтому справедливость теоремы 2 следует из того, что вследствие определения 1 эти решетки не могут содержать подрешеток в форме диаманта и пентагона, т.е. они являются дистрибутивными решетками по теореме [4, с. 87].

Важность теоремы 2 состоит в том, что класс дистрибутивных решеток наиболее важен с комбинаторной точки зрения [6].

Применение теоремы 2 приводит к постановке ряда интересных, связанных с топологией комбинаторных задач, для описания которых необходимы дополнительные понятия. Для T-модели (S, θ, T_1) число $n - k + 1$, где k номер единичной координаты вектора $\nu' - \nu$, а $\nu, \nu' \in P_n$, назовем весом ориентированного ребра (ν, ν') T-диаграммы L_n.

Определение 5. Сопоставим каждой максимальной цепи решетки P_n при прохождении ее от наименьшего до наибольшего элемента T-диаграммы L_n последовательность π весов ее ребер. Тогда число максимальных цепей $e(P_n)$ совпадает с мощностью множества всех таких последовательностей Π_n, т.е $e(P_n) = |\Pi_n|$.

Число $e(P_n)$ является важной характеристикой, легко вычисляемой при небольшом n, а определение 5 позволяет в ряде случаев упростить нахождение формулы для $e(P_n)$.

Пример 7. Для семейства T-моделей примера 1 T-диаграммы $L_4^{(2)}$ и $L_3^{(3)}$, соответственно, посетов $P_4^{(2)}$ и $P_3^{(3)}$ изображены на рисунке 1.

Номера вершин T-диаграмм семейства T-моделей примера 1 находятся довольно просто вследствие прямоугольной формы всех блоков таблиц этого семейства. Также легко определяются веса ребер T-диаграмм $L_n^{(r)}$, и находится формула:

$$e(P_n^{(r)}) = \frac{\left((r-1)\binom{n}{2}\right)!}{\prod_{i=1}^{n-1} ((r-1)i)!}.$$

Дополнительно отметим, что вершины T-диаграмм $L_n^{(2)}$ являются кодами Лемера перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ (кодом Лемера перестановки $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$ называется слово $l = l_1 l_2 \ldots l_n$, в котором $l_i = \#\{j : \sigma_j < \sigma_i,\ 0 \leq j \leq i-1,\ \sigma_0 = 0\}$, где $i = 1, \ldots, n$ [2]).

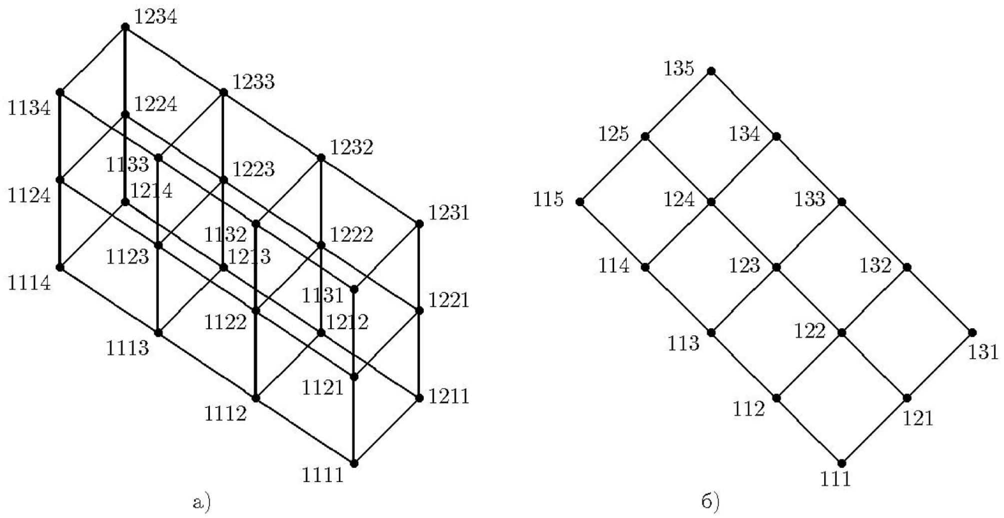

Рисунок 1 – *T*-диаграммы: а) $L_4^{(2)}$; б) $L_3^{(3)}$ *T*-моделей примера 1

Пример 8. Для *T*-модели Каталана *T*-диаграммы L_3 и L_4, соответственно, посетов P_3 и P_4 изображены на рисунке 2.

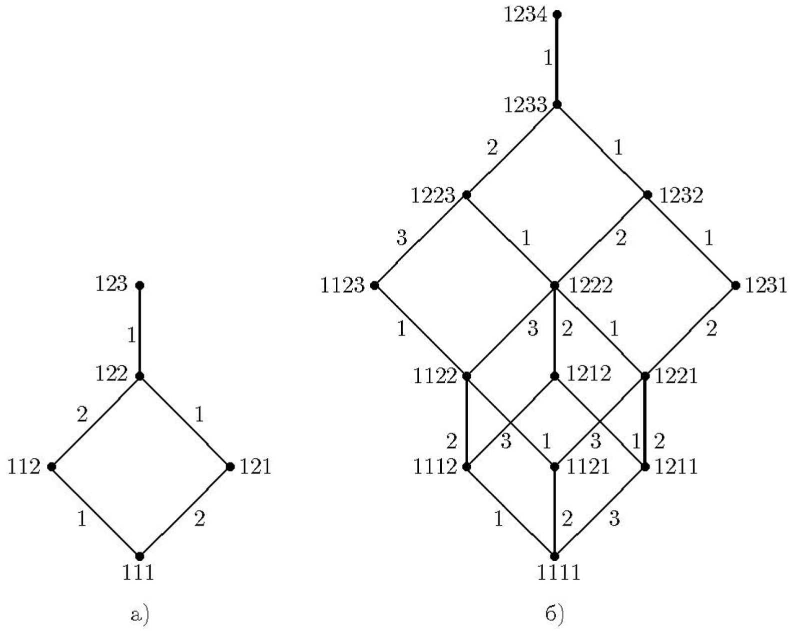

Рисунок 2 – *T*-диаграммы: а) L_3; б) L_4 *T*-модели Каталана

На рисунке 2, кроме номеров вершин *T*-диаграмм L_3 и L_4, изображены также веса их ребер. Эти дистрибутивные решетки, связанные с числами Каталана, были получены другим способом в статье [10], в которой также приводится следующая формула:

$$e(P_n) = \frac{\binom{n}{2}!}{\prod_{i=1}^{n-1}(2i-1)^{n-i}}.$$

Также, как и в примере 8, для *T*-модели Каталана алгоритм получения посетов P_n можно связать с кодами Лемера некоторых перестановок.

Теорема 3. Для *T*-модели Каталана множество кодов Лемера всех 213-избегающих перестановок совпадает с посетом P_n.

Теорема 3 несложно доказывается на основе результатов для 312-избегающих перестановок, полученных в [2], а также простой связи между 213-избегающими и 312-избегающими перестановками.

Пример 9. Для *T*-модели Белла вследствие простоты отображения θ несложно находятся посеты P_n и их *T*-диаграммы L_n.

Теорема 4. При фиксированном $n \in \mathbf{N}$ посет P_n всех номеров $\nu = \nu_1 \ldots \nu_n$ элементов таблицы T_n *T*-модели Белла совпадает с множеством слов ограниченного роста (*RG*-слов) длины *n*, т.е. слов, введенных С. Милном [9] и определяемых условием: ν является *RG*-словом, если $\nu_i \le \max(0, \nu_1, \ldots, \nu_{i-1}) + 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство теоремы 4 проводится методом математической индукции с использованием определения *T*-модели Белла в примере 2.

Отметим, что теорема 4 позволяет описать элементарный алгоритм перехода от посета P_n, задаваемого множеством *RG*-слов длины *n*, к соответствующей таблице T_n *T*-модели Белла.

Простота рекурсивного построения множеств *RG*-слов дает возможность при фиксированном $n \in \mathbf{N}$ вычислять число максимальных цепей $e(P_n)$, но вид общей формулы для этого числа неизвестен.

Так как имеется биекция между *RG*-словом длины *n* и упорядоченным разбиением множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на блоки [9], то многие результаты работы [9] могут быть получены с помощью *T*-модели Белла.

Заключение

При построении *T*-модели по заданной комбинаторной последовательности необходимо решить соответствующую задачу идентификации, а полученная *T*-модель приводит к постановке ряда комбинаторных задач.

Структура введенных *T*-моделей комбинаторных последовательностей позволяет легко применять при их моделировании известные пакеты аналитических вычислений Mathematica и Maple. Поэтому *T*-модели можно успешно использовать при обучении студентов отдельным разделам дискретной математики и информатики, а также с их помощью получать новые комбинаторные результаты.

Перечислим некоторые достоинства применения *T*-моделей:

− *T*-модели унифицируют решение ряда комбинаторных задач;

− введение в *T*-модель целочисленных параметров позволяет получить семейство *T*-моделей, что приводит к соответствующему классу комбинаторных последовательностей;

− *T*-модели и отвечающие им комбинаторные последовательности удобно классифицировать по типу используемого в *T*-модели отображения;

− элементарный переход от *T*-модели к ее *q*-аналогу дает простой метод нахождения *q*-аналогов ряда комбинаторных последовательностей;

− построение для *T*-модели соответствующей *T*-диаграммы делает возможным применение мощных топологических методов для исследования комбинаторных последовательностей.

Литература

1. *Бондаренко Л.Н., Шарапова М.Л.* *T*-модели Фусса–Каталана и их *q*-аналоги // Дискретные модели в теории управляющих систем: X Международная конференция, Москва и Подмосковье, 22–25 мая 2018 г.: Труды. – М.: МАКС Пресс, 2018. – С. 35–38.

2. *Бондаренко Л.Н., Шарапова М.Л.* Обобщенные 312-избегающие перестановки и преобразование Лемера // Прикладная дискретная математика. Приложение. – 2017. – № 10. – С. 7–9.

3. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики / пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 703 с.

4. *Гретцер Г.* Общая теория решеток / пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 456 с.

5. *Ониши Ё.* Обобщенные числа Бернулли–Гурвица и универсальные числа Бернулли // Успехи математических наук. – 2011. – Т. 66. – Вып. 5 (401). – С. 47–108.
6. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика / пер. с англ. Т. 1. – М.: Мир, 1990. – 440 с.
7. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика / пер. с англ. Т. 2. – М.: Мир, 2009. – 768 с.
8. *Carlitz L.* Sequences, paths, ballot numbers // Fibonacci quarterly. –1972. – Vol. 10. – P. 531–549.
9. *Cai Y., Readdy M.A.* q-Stirling numbers: A new view // Advances in applied mathematics. – 2017. – 86. – P. 50–80.
10. *Stanley R.P.* The Fibonacci lattice // Fibonacci quarterly. – 1975. – Vol. 13. – P. 215–232.
11. *Stanley R.P.* Catalan numbers. – New York: Cambridge university press, 2015. – 215 p.
12. *Sloane N.J.A.* The on-line encyclopedia of integer sequences. – 2019. – http://oeis.org.

References

1. *Bondarenko L.N., Sharapova M.L.* T-modeli Fussa–Katalana i ih q-analogi // Diskretnye modeli v teorii upravlyayushchih sistem: X Mezhdunarodnaya konferenciya, Moskva i Podmoskov'e, 22-25 maya 2018 g.: Trudy. – M.: MAKS Press, 2018. – S. 35–38.
2. *Bondarenko L.N., Sharapova M.L.* Obobshchennye 312-izbegayushchie perestanovki i preobrazovanie Lemera // Prikladnaya diskretnaya matematika. Prilozhenie. – 2017. – № 10. – S. 7–9.
3. *Grekhem R., Knut D., Patashnik O.* Konkretnaya matematika. Osnovanie informatiki / per. s angl. – M.: Mir, 1998. – 703 s.
4. *Gretcer G.* Obshchaya teoriya reshetok / per. s angl. – M.: Mir, 1981. – 456 s.
5. *Onishi Yo.* Obobshchennye chisla Bernulli–Gurvica i universal'nye chisla Bernulli // Uspekhi matematicheskih nauk. – 2011. – T. 66. – Vyp. 5 (401). — S. 47–108.
6. *Stenli R.* Perechislitel'naya kombinatorika / per. s angl. T. 1. – M.: Mir, 1990. – 440 s.
7. *Stenli R.* Perechislitel'naya kombinatorika / per. s angl. T. 2. – M.: Mir, 2009. – 768 s.
8. *Carlitz L.* Sequences, paths, ballot numbers // Fibonacci quarterly. –1972. – Vol. 10. – P. 531–549.
9. *Cai Y., Readdy M.A.* q-Stirling numbers: A new view // Advances in applied mathematics. – 2017. – 86. – P. 50–80.
10. *Stanley R.P.* The Fibonacci lattice // Fibonacci quarterly. – 1975. – Vol. 13. – P. 215–232.
11. *Stanley R.P.* Catalan numbers. – New York: Cambridge university press, 2015. – 215 p.
12. *Sloane N.J.A.* The on-line encyclopedia of integer sequences. – 2019. – http://oeis.org.