УДК 519.81

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ ИНДИВИДОМ С УЧЕТОМ ЕГО ОТНОШЕНИЯ К РИСКУ

Богочаров Михаил Алексеевич[1],
канд. техн. наук, доцент,
e-mail: mbogocharov@yandex.ru,
[1]Московский университет им. С.Ю. Витте, г. Москва, Россия

Данная статья посвящена проблеме принятия решений индивидом с учетом его отношения к риску. Предполагается, что поведение индивида подчиняется определенным законам. Данное допущение позволяет использовать количественные методы принятия решений на основе использования методов выпуклого программирования. При решении задач оптимизации показатели риска оказывают решающее влияние на значение целевой функции. Рассмотрены свойства функции полезности в неоклассическом приближении. Важнейшим свойством таких функций является их вогнутость (выпуклость) на всей области определения. Сформулированы характеристики вогнутости: через вторую производную, через хорду и через тангенс. Рассмотрены варианты измерения неприятия риска и соответствующие данным вариантам пути поиска экстремума ожидаемой функции полезности. Исходной посылкой проведенного анализа является аксиома, утверждающая, что действия индивида всегда направлены на достижение максимума его индивидуальной функции полезности. Делается вывод о влиянии неприятия риска на выбор индивида.

Ключевые слова: неприятие риска, функция полезности, выпуклая (вогнутая) функции, ожидаемая полезность, благо

DECISION-MAKING BY AN INDIVIDUAL BASED ON THEIR ATTITUDE TO RISK

Bogocharov M.A.[1],
candidate of technical sciences, Associate Professor,
e-mail: mbogocharov@yandex.ru,
[1]Moscow Witte University, Moscow, Russia

This article is devoted to the problem of decision-making by an individual, taking into account his attitude to risk. It is assumed that the behavior of the individual obeys certain laws. This assumption allows the use of quantitative decision-making methods based on the use of convex programming methods. When solving optimization problems, risk indicators have a decisive influence on the value of the objective function. The properties of the utility function are considered in the neoclassical approximation. The most important property of such functions is their concavity (convexity) over the entire domain of definition. The characteristics of concavity are formulated: through the second derivative, through the chord and through the tangent. The options for measuring risk aversion and the corresponding paths for finding the extremum of the expected utility function are considered. The initial premise of the analysis is the axiom that the individual's actions are always aimed at achieving the maximum of his individual utility function. The conclusion is made about the influence of risk aversion on the choice of an individual.

Keywords: risk aversion, utility function, convex (concave) function, expected utility, benefit

DOI 10.21777/2500-2112-2021-2-57-64

Одним из существенных факторов, влияющих на принятие управленческого решения, является отношение к риску лица, принимающего решение (ЛПР). Существуют способы выявить и количественно оценить отношение ЛПР к риску и тем самым лучше понять особенности принятия им решений.

Природа явления основана на особенностях психологии индивида, при этом его поведение подчиняется определенным законам. Последнее позволяет использовать количественные методы принятия решений [1]. Основным подходом является использование методов выпуклого программирования для нахождения глобальных экстремумов всюду выпуклых (в задачах на минимум) и всюду вогнутых (в задачах на максимум) функций [2]. Такой подход используется в теориях неопределенностей и рисков, страховании и анализе инвестиций, выборе оптимального портфеля ценных бумаг и т.п. Во всех случаях решение экономической задачи сопровождается учетом субъективных особенностей индивида. Величина риска выступает в качестве единственной или одной из многих целевых функций оптимизационных задач.

Реальный опыт, основанный, в частности, на многочисленных специальных экспериментах, убеждает, что большинство субъектов экономики в своих действиях и решениях склонны к стабильности. В пользу такого вывода говорит, например, более высокий уровень ожидаемой эффективности рисковых вложений по сравнению с безрисковыми. При игнорировании риска вложения потекли бы к более эффективным, но менее надежным активам. В результате возросшего спроса на рисковые инвестиции их ожидаемые доходности поползли бы вниз до уровня эффективности безрисковых вложений. То, что этого не происходит, свидетельствует о неприятии инвесторами большого риска.

Наиболее плодотворным оказался подход, основывающийся на анализе свойств функции полезности ЛПР, как экономической функции в неоклассическом приближении. Важнейшим свойством таких функций является их вогнутость (выпуклость) на всей области определения [3]. Основополагающей аксиомой являются действия индивида, максимализирующие его индивидуальную функцию полезности.

1. Три характеристики вогнутости

1.1. Характеристика через вторую производную

Рассмотрим функцию одной переменной $y = u(x)$, определенную на выпуклом множестве. Будем говорить, что функция строго вогнута, если $u'' < 0$ для всех x, и функция строго выпукла, если $u'' > 0$ во всей области определения функции. Иногда мы говорим о слабой выпуклости и слабой вогнутости, если знак неравенства нестрогий.

1.2. Характеристика через хорду

Будем говорить, что функция строго вогнута, если график функции лежит выше хорды, соединяющей любые две точки из области определения функции. В количественном выражении:

$$\lambda_1 u(x) + \lambda_2 u(x) < u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \quad \text{для } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0;\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Слабая вогнутость задается выражением:

$$\lambda_1 u(x) + \lambda_2 u(x) \leq u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \quad \text{для } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0;\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Отметим, что характеристика через хорду не требует дифференцируемости функции. Последнее не ограничивает метод, поскольку данное свойство исходно выполняется для экономических функций в неоклассическом приближении.

1.3. Характеристика через тангенс

Будем говорить, что функция строго вогнута, если:

$u(x) - u(x_1) < u'(x_1)(x - x_1)$ для фиксированного x_1 и любого $x \neq x_1$.

Слабая вогнутость задается при нестрогом ограничении. При этом тангенс угла наклона касательной превышает тангенс угла наклона хорды.

Используя определения средних и маргинальных величин, можно записать, что M(u(x))>A(u(x)).

Используя в качестве x_I среднее значение μ, запишем неравенства в виде:

$$u(x)-u(\mu\ )<u'(\mu)(x-\mu\ ) \text{ или } u(x)<u'(\mu)(x-\mu\ )+u(\mu).$$

Переходя к математическим ожиданиям обеих частей неравенства, получаем известное неравенство Йенсена:

$$M\ (u(x)) < u(x).$$

Отметим следующие особенности:

− характеристика 1 подразумевает характеристику 3 посредством формулы Тейлора:

$$u(x)\approx u(\mu)+u'(\mu)(x-\mu)+u''(\mu)\frac{(x-\mu)^2}{2};$$

− простейшее определение вогнутости задается характеристикой 2. Данный подход не накладывает ограничение по дифференцируемости функции. Согласно теореме Александрова все вогнутые функции являются дифференцируемыми за исключением множеств с нулевой мерой [4];

− обычно рассматриваются возрастающие функции полезности, т.к. требование $u\rightarrow'_x > 0$ закладывается при конструировании экономических функций в неоклассическом приближении;

− строго вогнутая функция полезности отражает неприятие риска, линейная функция – нейтральное отношение к риску, выпуклая функция – предпочтение к риску. Для определения выпуклых функций через приводимые выше характеристики достаточно заменить *u(x)* на *(– u(x))*;

− линейная функция является как слабо выпуклой, так и слабо вогнутой. Это позволяет рассматривать линейное программирование как разновидность выпуклого программирования;

− все вышеизложенные характеристики легко могут быть применены и для случая функции многих переменных;

− существуют особые экономические ситуации, когда по достижению определенного уровня благосклонность к риску изменяется. Для описания подобных ситуаций используется функция полезности Фридмана-Саважа, свойства которой можно учесть раздельно на каждом участке [5].

2. Измерение неприятия риска

Если u(w) – функция полезности некоторого блага (wealth), то величина второй производной для различных уровней блага является первой мерой неприятия риска, т.е. *u″(w)* есть мера кривизны. Согласно теории ожидаемой полезности, монотонная трансформация *u(w)* (например, *au(w)+b, a > 0)*, создает полезность того же ранга, т.е. выбор ЛПР не меняется. Но при этом величина второй производной будет меняться и поэтому она не может быть хорошей мерой неприятия риска.

Мерой абсолютного неприятия риска может быть:

$$R^A=-\frac{u''(w)}{u'(w)}.$$

Коэффициент R^A устраняет негативные моменты линейной трансформации так как не зависит от параметра *a*. На практике используется функция полезности, для которой R^A является постоянным на всех уровнях блага *w*. Вид такой функции полезности определяется из следующего:

$$-\frac{u''(w)}{u'(w)}=A;\ u(w)=-e^{-Aw}.$$

Такая функция полезности встречается в литературе, однако она обладает нежелательными свойствами. Это связано с зависимостью показателя от размерности блага.

Альтернативная мера неприятия риска может быть определена следующим образом:

$$R^R=-\frac{wu''(w)}{u'(w)}.$$

Данный показатель не зависит от размерности блага и называется мерой относительного неприятия риска. В литературе встречается функция полезности с постоянным R^R.

Положим $-\dfrac{wu''(w)}{u'(w)} = 1-\alpha$, где а < 1 После интегрирования получим:

$$u(w) = \frac{w^{\alpha}}{\alpha}\text{, для а} \neq 1 \text{ и } R^R = 1 - \text{а;}$$

$$u(w) = \log w\text{, для а} = 0 \text{ и } R^R = 1.$$

Поскольку функция полезности определена с точностью до линейной трансформации, основание логарифма может любое большее единицы число. Логарифмическая функция полезности впервые была получена Бернулли в 1738 г.

Отметим, что коэффициенты R^A и R^R носят название коэффициентов Эрроу-Пратта.

Широко известна в литературе функция полезности Неймана-Моргенштерна [6]. Она часто используется в теории финансов, в частности, в теории ценных бумаг. Квадратическая функция Неймана Моргенштерна $u(w) = a + bW - cW^2$ определена для $w \leq \dfrac{b}{2c}$ и b,c > 0.

Эта функция полезности может быть представлена в виде $R^A = \dfrac{2c}{b-2cw}$ и $R^R = \dfrac{2cw}{b-2cw}$.

Из теории ожидаемой полезности следует, что можно определить для ЛПР функцию полезности *u(w)*, после чего полезность финансовой операции F рассчитывается по формуле:

$$u(F) = \int u(w)dF(w).$$

Функция *u(w)* является функцией Бернулли, а *u(F)* – функцией Неймана – Моргенштерна. Фактически функция Бернулли – это функция полезности денег.

Отметим также уровневую функцию полезности Неймана – Моргенштерна. Введем значение дохода R, математического ожидания дохода $M(R) = m$ и дисперсию дохода $\sigma^2 = M(R - M(R))^2$. Тогда из выражения $U(R) = aR + b(R - M(R))^2$, переходя к ожидаемой полезности, получим:

$$U(m,\sigma) = am + b\sigma^2.$$

Эквивалентные варианты выбора будут определяться из соотношения $U(m, \sigma) = C$, задающего неявным образом кривые безразличия уровня С.

3. Максимализация ожидаемой функции полезности

Доступное индивиду благо w может быть размещено в безрисковый актив с фиксированной ставкой процента *i* или в рискованный актив со средней ставкой *s*, распределенной с плотностью $f(s) \geq 0$.

Предполагается, что $\int_{-\infty}^{\infty} sf(s)ds = \mu > 0$. Индивид желает так разделить свои блага, чтобы максимизировать ожидаемую функцию полезности (рисунок 1).

Где $0 \leq \lambda \leq 1$ задает распределение между безрисковым активом λw и рисковым активом $(1 - \lambda)w$. Доход последующего периода в среднем составит $y = w(1 + i\lambda + s(1 - \lambda))$. Предполагается, что существует функция полезности $u(y)$ и индивид выбирает λ так, чтобы максимизировать ожидаемую функцию полезности:

$$M(u(y)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(y)f(s)ds.$$

Рассмотрим решение задачи для различных видов функций полезностей, рассмотренных ранее.

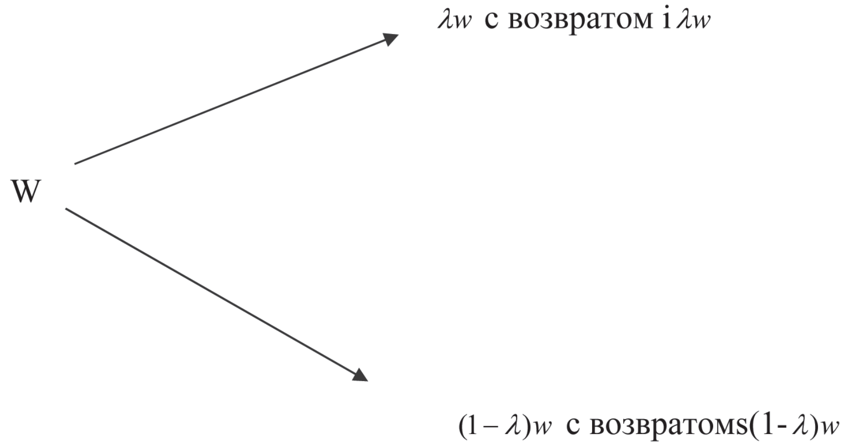

Рисунок 1 – Варианты расчета W

3.1. Постоянное относительное неприятие риска

Рассмотрим случай $u(y)=\dfrac{y^{\alpha}}{\alpha}, \quad \alpha<1, \quad \alpha\neq 0$.

Постановка задачи:

$$M(u(y))=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{w^{\alpha}(1+i\lambda+s(1-\lambda))^{\alpha}}{\alpha}f(s)ds\rightarrow\max.$$

Данная задача эквивалентна следующей:

$$K=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+i\lambda+s(1-\lambda))^{\alpha}}{\alpha}f(s)ds\rightarrow\max.$$

Анализируя постановку задачи, можно сделать вывод о том, что оптимальное значение λ = λ* не зависит от величины *w*. Поэтому фиксированное соотношение *w* всегда инвестируется в безрисковый и рисковый активы. Но это не соответствует поведению индивидуума при увеличении его доходов. Это противоречие вызвано неудовлетворительностью данной функции полезности. В то же время λ будет зависеть от *a* и *f(s)*.

Необходимое условие локального максимума:

$$\frac{dK}{d\lambda}=\int_{-\infty}^{\infty}(1+i\lambda+s(1-\lambda))^{\alpha-1}(i-s)f(s)ds=0.$$

Достаточное условие локального максимума:

$$\frac{d^2K}{d\lambda^2}=\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha-1)(1+i\lambda+s(1-\lambda))^{\alpha-2}(i-s)^2f(s)ds<0.$$

Очевидно, что достаточное условие выполнено (*a* < 1). Оптимальное значение λ* вычисляется из необходимого условия и, естественно, зависит от *f(s)*. В том случае, если экстремум во внутренней точке не существует, то существует максимум на границе области допустимых значений. Подобный анализ может быть проведен для *u(y) = log y*.

3.2. Постоянное абсолютное неприятие риска

Рассмотрим случай $u(y) = -e^{-Ay}$, A > 0.

Постановка задачи:

$$J=M(u(y))=\int_{-\infty}^{\infty}-e^{-Aw(1+i\lambda+s(1-\lambda))}f(s)ds\rightarrow\max.$$

Необходимое условие локального экстремума:

$$\frac{dJ}{d\lambda}=\int_{-\infty}^{\infty} Aw(i-s)e^{-Aw(1+i\lambda+s(1-\lambda))}f(s)ds=0.$$

Достаточное условие локального экстремума:

$$\frac{d^2J}{d\lambda^2}=\int_{-\infty}^{\infty} -A^2w^2(i-s)^2e^{-Aw(1+i\lambda+s(1-\lambda))}f(s)ds<0.$$

Достаточное условие очевидно выполнено. Из необходимого условия следует, что λ* зависит от *w*. С другой стороны, обозначив $C = (1-\lambda)w$, получим требование:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(i-s)e^{-ACs}f(s)ds=0.$$

Данное соотношение разрешимо относительно оптимального C = C*. Это значит, что подбирая оптимальное λ* для *w*, всякий раз будем получать то же самое *C**. Поэтому, оптимальная сумма, инвестируемая в рисковую часть, $C^* = (1-\lambda^*)w$, не зависит от уровня дохода (мы естественно предполагаем, что $w \ge C^*$). С другой стороны, очевидно, что большинство людей так не поступают. С ростом благосостояния, люди склонны к большему риску.

В качестве примера рассмотрим нормальное распределение с плотностью $f(s)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, где μ – средняя величина, а σ – среднее квадратическое отклонение. В этом случае постановка задачи имеет следующий вид:

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}-e^{-Aw(1+i\lambda+s(1-\lambda))}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}ds\to\max.$$

Исходя из свойства нормального распределения $\int_{-\infty}^{\infty}e^{st}f(s)ds=e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$ $,t=-Aw(1-\lambda)$, постановка задачи имеет следующий вид:

$$J=-e^{(-Aw(1+i\lambda)-Aw(1-\lambda)\mu+\frac{A^2w^2(1-\lambda)^2\sigma^2}{2}}\to\max,$$

что эквивалентно следующей задаче:

$$K=(1+i\lambda)+(1-\lambda)\mu-\frac{Aw(1-\lambda)^2\sigma^2}{2}\to\max.$$

Необходимое условие локального экстремума:

$$\frac{dK}{d\lambda}=(i-\mu)+Aw(1-\lambda)\sigma^2=0.$$

Достаточное условие локального экстремума:

$$\frac{d^2K}{d\lambda^2}=-Aw\sigma^2<0.$$

Достаточное условие, очевидно, выполнено. Из необходимого условия получаем

$$C^*=w(1-\lambda)+\frac{\mu-i}{A\sigma^2},\qquad(\mu>i)$$

Абсолютная сумма денег, инвестированная в рисковую часть, не зависит от уровня дохода.

4. Квадратическая функция полезности

В завершение рассмотрим $u(y)=a+by-cy^2,\quad b,c>0,\quad y\le\frac{b}{2c}.$

Пусть $f(s)$ распределена со средним μ и дисперсией σ^2.

Постановка задачи:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} (a + by - cy^2) f(s) ds = a + b\tilde{\mu} - c\tilde{\mu}^2 - c\tilde{\sigma}^2 \to \max$$

где $\tilde{\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} w(1 + i\lambda + s(1-\lambda)) f(s) ds = w(1 + i\lambda + (1-\lambda)\mu)$ *(среднее для y)*,

$$\tilde{\sigma}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} w^2(1-\lambda)^2 (s-\mu)^2 f(s) ds = w^2(1-\lambda)^2 \int_{-\infty}^{\infty} (s-\mu)^2 f(s) ds \quad \textit{(дисперсия y)},$$

$$(\tilde{\sigma}^2 = M(w(1 + i\lambda + s(1-\lambda)) - w(1 + i\lambda + (1-\lambda)\mu))^2 = w^2(1-\lambda)^2 \int_{-\infty}^{\infty} (s-\mu)^2 f(s) ds).$$

Постановка задачи:

$$J = a + bw(1 + i\lambda + (1-\lambda)\mu) - cw^2(1 + i\lambda + (1-\lambda)\mu)^2 - cw^2 \int_{-\infty}^{\infty} (s-\mu)^2 f(s) ds \to \max.$$

Необходимое условие локального экстремума:

$$\frac{dJ}{d\lambda} = bw(i-\mu) - 2cw^2(1 + i\lambda + (1-\lambda)\mu(i-\mu) + 2cw(1-\lambda)\int_{-\infty}^{\infty} (s-\mu)^2 f(s) ds = 0.$$

Достаточное условие локального экстремума:

$$\frac{d^2 J}{d\lambda^2} = -2cw^2(i-\mu)^2 - 2cw^2 \int_{-\infty}^{\infty} (s-\mu)^2 f(s) ds < 0.$$

Очевидно, что достаточное условие выполнено.Перепишем необходимое условие в удобном виде:

$$b(i-\mu) - 2cw(1 + i\lambda + (1-\lambda)\mu)(i-\mu) + 2cw(1-\lambda)\sigma^2 = 0.$$

После дифференцирования получим:

$$\frac{d\lambda}{dw} = \frac{-2c(1 + i\lambda + (1-\lambda)\mu + 2c(1-\lambda)\sigma^2}{2cw(i-\mu)^2 + 2cw\sigma^2} > 0, \qquad (\mu > i).$$

Таким образом, доля гарантированного дохода возрастает с ростом объема инвестиции, что, скорее всего, не выполняется.

Вопрос существования решений в вышеизложенных задачах может быть легко установлен. Функции определены на интервале [0, 1], непрерывны и поэтому максимум всегда существует. Функции являются строго вогнутыми и поэтому максимум единственный, глобальный.

Поскольку квадратическая функция полезности предполагает наличие пары $(\tilde{\sigma}, \tilde{\mu})$, задача решается с использованием уровневых диаграмм ожидаемой полезности в система координат $(\tilde{\sigma}, \tilde{\mu})$.

Из достаточного условия $\lambda = 1 - \dfrac{\tilde{\sigma}}{\sigma w}$, подставив в необходимое условие, получим

$$\tilde{\mu} = w((1+\mu) + (i-\mu)(1 - \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma w}, \frac{d\tilde{\mu}}{d\tilde{\sigma}} = (\mu - i)\frac{1}{\sigma} > 0, \quad (\mu > i).$$

Линия уровня для ожидаемой полезности определяется из следующего соотношения:

$$\tilde{J} = a + b\tilde{\mu} - c\tilde{\mu}^2 - c\tilde{\sigma}^2.$$

Характеристики линии уровня определяются, исходя из следующих выражений:

$$\frac{d\tilde{\mu}}{d\tilde{\sigma}} = \frac{2c\tilde{\sigma}}{b - 2c\tilde{\mu}} > 0, \qquad (b > 2c\mu);$$

$$\frac{d^2\tilde{\mu}}{d\tilde{\sigma}^2} = \frac{2c(b-2c\tilde{\mu}) + 4c\tilde{\sigma}\dfrac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{\mu}}}{(b-2c\tilde{\mu})^2} > 0, \qquad \text{(строгая выпуклость)}$$

Единственное решение в точке $(\tilde{\sigma}^*, \tilde{\mu}^*)$, λ^* определяется из соотношения:

$$\lambda^* = \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma w}.$$

Все вышеизложенные выводы легко могут быть использованы для задач на минимум.

Заключение

Нормально распределенные величины полностью определяются средней величиной и дисперсией. Поэтому, если необходимо выбрать предстоящую инвестицию, которая нормально распределена, то, в независимости от вида функции полезности,выбираем пару (σ, μ). Ожидаемая функция полезности определяет единственную пару (σ, μ).

Список литературы

1. *Гребенников, Л.И.* Микроэкономика: учебник / Л.И. Гребенников, А.И. Леусский, Т.С. Тарасевич; под. общ. ред. Л.С. Тарасевича. – СПб.: изд-во СПбУЭФ, 1996. – 352 с.
2. *Первозванский А.А., Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: расчеты и риск. – М.: Инфра-М, 1994. – 192 с.
3. *Сурина Е.Е.* Методы анализа экономической информации и данных: учебное пособие. – М.: ФЛИНТА, 2015. – 130 с.
4. *Замков, О.О.* Математические методы в экономике: учебник / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: Дело и Севис, 2009. – 368 с.
5. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. 3-е изд., стер. – М.: Лань, 2011. – 352 с.
6. *Макконелл К.Р., Брю С.Л.* Экономикс. – М.: ИНФРА-М, 2007. – 974 с.

References

1. *Grebennikov, L.I.* Mikroekonomika: uchebnik. / L.I. Grebennikov, A.I. Leusskij, T.S. Tarasevich; pod. obshch. red. L.S. Tarasevicha. – SPb.: izd-vo SPbUEF, 1996. – 352 s.
2. *Pervozvanskij A.A., Pervozvanskaya T.N.* Finansovyj rynok: raschety i risk. – M.: Infra-M, 1994. – 192 с.
3. *Surina E.E.* Metody analiza ekonomicheskoj informacii i dannyh: uchebnoe posobie. – M.: FLINTA, 2015. – 130 s.
4. *Zamkov, O.O.* Matematicheskie metody v ekonomike: uchebnik / O.O. Zamkov, A.V. Tolstopyatenko, Yu.N. Cheremnyh. – M.: Delo i Sevis, 2009. – 368 s.
5. *Akulich I.L.* Matematicheskoe programmirovanie v primerah i zadachah. 3-e izd., ster. – M.: Lan, 2011. – 352 s.
6. *Makkonnell K.R., Bryu S.L.* Ekonomiks. – M.: INFRA-M, 2007. – 974 s.