УДК 519.816

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ НЕДОМИНИРУЕМОСТЬ В ЗАДАЧАХ ВЫБОРА НЕСКОЛЬКИХ ЛУЧШИХ ВАРИАНТОВ

Владислав Владимирович Подиновский*, д.т.н., профессор НИУ ВШЭ*
Тел.: (495)621-13-42, e-mail: podinovski@mail.ru
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
http://www.hse.ru

В статье исследуются задачи принятия решений о выборе нескольких лучших вариантов, когда имеется неполная информация о предпочтениях лица, принимающего решение. Выделяется множество вариантов, из которых надлежит сделать выбор, и изучаются свойства вариантов из этого множества.

Ключевые слова: задачи выбора, частичные отношения предпочтения, потенциальная оптимальность, недоминируемость, потенциальнаянедоминируемость.

Исследование осуществлено в рамках Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2013 г. (проект № 12-01-0059).

1. Введение

Наиболее распространёнными задачами принятия решений являются задачи выбора одного наилучшего варианта, плана, стратегии, альтернативы – это задачи единичного выбора. Однако на практике часто встречаются и задачи множественного выбора – задачи, в которых нужно выделить нескольких лучших вариантов. Примерами таких задач являются различного рода конкурсы, тендеры, формирование групп представителей, портфелей заказов, проектов и т.п. Поэтому задачи множественного выбора составляют важный класс задач управления социально-экономическими объектами и системами, в том числе и задач менеджмента.

В.В. Подиновский

Для решения задач выбора чаще всего используются функции ценности. Однако их построение (обоснование), особенно в задачах принятия решений при многих критериях – проблема весьма сложная, которая редко решается на должном научном уровне. Поэтому в настоящее время одним из перспективных подходов к решению задач выбора считается интерактивный подход, согласно которому предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР), выявляются и моделируются в процессе интерактивного анализа задачи, реализуемом в виде диалога человек-компьютер. При этом для моделирования предпочтений широко используются бинарные отношения предпочтения [1, 2]. Если предпочтения описываются одним таким отношением, то для задач единичного выбора базовым является понятие недоминируемости [1], а для задач выбора l лучших вариантов – понятие l-недоминируемости [3, 4].

Если предпочтения моделируются семейством бинарных отношений (т.е. заранее неизвестно, какое именно из входящих в него отношений описывает предпочтения ЛПР), то все эти отношения тем или иным способом можно «свернуть» в одно отношение предпочтения, и уже для него использовать понятия недоминируемости или потенциальной оптимальности [5, 6]. Однако такой подход является общим в том смысле, что не учитывает специфики постановки задачи выбора. Например, его можно использовать и для решения задач ранжирования вариантов по предпочтительности. Поэтому для случая, когда указанное семейство является классом полных квазипорядков, для задач единичного выбора было введено базовое понятие потенциальной оптимальности, а для задач выбора l лучших вариантов – понятие потенциальной l-оптимальности [3, 4].

Для случая, когда выше указанное семейство состоит из частичных квазипорядков, в одной из работ В. Подиновского и А. Нелюбина для задач единичного выбора было введено базовое понятие потенциального недоминирования. В данной статье это понятие обобщается на случай множественного выбора.

2. Потенциальная оптимальность и потенциальная недоминируемость

2.1. Для удобства дальнейшего изложения приведем сводку необходимых сведений о недоминируемых и потенциально оптимальных вариантах в задачах единичного и множественного выбора, а также о потенциально недоминируемых вариантах в задачах единичного выбора. Будем полагать, что задано (сформировано) конечное *множество вариантов* (альтернатив, планов, стратегий, объектов, …) X и оно содержит не менее двух вариантов.

Пусть R – определенное на X*отношение нестрогого предпочтения* ЛПР: $x'Rx''$ означает, что вариант x' не менее предпочтителен, чем вариант x''. Предполагается, что отношение R является *квазипорядком* (т.е. оно рефлексивно и транзитивно). Если для любых вариантов x' и x'' верно $x'Rx''$ или $x''Rx'$, то квазипорядок Rназывается *полным*,в противном случае – *частичным.* Отношение R порождает *отношение безразличия*I и *отношение (строгого) предпочтения* P: если верно $x'Rx''$ и $x''Rx'$, то справедливо $x'Ix''$ (варианты x' и x'' безразличны, или одинаковы по предпочтительности); если же верно $x'Rx''$, но $x''Rx'$ неверно, то справедливо $x'Px''$ (вариант x' предпочтительнее варианта x''). Для квазипорядка R отношение I есть *эквивалентность* (оно симметрично, рефлексивно и транзитивно), а отношение P – *строгий частичный порядок* (оно иррефлексивно и транзитивно).

2.2. Вначале рассмотрим задачу единичного выбора. Пусть предпочтения ЛПР описываются частичным квазипорядком R, определенным X.

Вариант x^* называется *оптимальным* (*по*R), если для любого варианта x верно x^*Rx. В частности, оптимальный вариант существует, если квазипорядок R является полным. Однако в задачах принятия решений часто информация о предпочтениях ЛПР выявляется не полностью. Тогда отношение R оказывается частичным и оптимальные варианты обычно не существуют.

Вариант x^0 называется *недоминируемым* (*по*P), если не существует варианта x, для которого верно xPx^0. Обозначим через $X(P)$ множество недоминируемых вариантов.

Множество $X(P)$ называется *внешне устойчивым* (*по*P), если для любого варианта $x \notin X(P)$ найдется вариант $x^* \in X(P)$ такой, что выполнено x^*Px. Поскольку множество X конечно, то множество $X(P)$ не пусто и, более того, внешне устойчиво (см., например, [7]).

2.2. Говорят, что определенный на X квазипорядок R' (*непротиворечиво*) *продолжает* определенный на X квазипорядок R, если выполнено $R \subset R'$ (откуда следует, что $I \subseteq I'$) и $P \subseteq P'$. Каждый заданный на X частичный квазипорядок может быть продолжен до полного квазипорядка (теорема Шпильрайна [8]).

Обозначим через $\mathfrak{R}$ класс (непустое множество) полных квазипорядков, определенных на X и продолжающих частичный квазипорядок R_0. Вариант x^* называется *потенциально оптимальным для класса*$\mathfrak{R}$, если в этом классе существует квазипорядок R, для которого x^* является оптимальным. Пусть $X(\mathfrak{R})$ – множество потенциально оптимальных для класса $\mathfrak{R}$ вариантов.

Всякий потенциально оптимальный для класса $\mathfrak{R}$ вариант является недоминируемым по P_0: $X(\mathfrak{R}) \subseteq X(P_0)$.

Множество потенциально оптимальных для класса $\mathfrak{R}$ вариантов $X(\mathfrak{R})$ называется *покрывающим* (*множество*X), если для любого варианта $x \notin X(\mathfrak{R})$ и для любого квазипорядка $R\in\mathfrak{R}$ найдется вариант $x^*\in X(R)$ такой, что верно x^*Px. Поскольку множество X конечно, то множество потенциально оптимальных вариантов $X(\mathfrak{R})$ для любого класса $\mathfrak{R}$ является покрывающим [9].

2.3. Обозначим через $\mathbb{R}$ класс (непустое множество) частичных квазипорядков, определенных на X и продолжающих частичный квазипорядок R_0. Множество строгих частичных порядков P, порождаемых квазипорядками R из $\mathbb{R}$, обозначим через $\mathbb{P}$.

Вариант x^* называется *потенциально недоминируемым для класса* $\mathbb{P}$, если найдется такой строгий частичный порядок $P\in\mathbb{P}$, для которого вариант x^* является недоминируемым (по P). Пусть $X(\mathbb{P})$ – множество потенциально недоминируемых вариантов для класса $\mathbb{P}$. Согласно определению потенциальной недоминируемости вариантов справедливы равенства:

$$X(\mathbb{P}) = \bigcup_{P\in\mathbb{P}} X(P). \qquad (1)$$

Множество $X(\mathbb{P})$ называется *покрывающим* (*для класса* $\mathbb{P}$), если для любого варианта $x\notin X(\mathbb{P})$ и любого строгого частичного порядка $P\in\mathbb{P}$ найдется вариант $x^*\in X(\mathbb{P})$ такой, что выполнено x^*Px. Поскольку множество X конечно, то множество $X(\mathbb{P})$ является покрывающим.

2.4. Рассмотрим теперь задачу выбора $l>1$ вариантов [10, 11]. Предполагается, что число вариантов в X больше, чем l. Пусть предпочтения ЛПР описываются частичным квазипорядком R, определенным на X. Введем в рассмотрение множество L наборов из l вариантов. Это множество конечно. Для наборов будем использовать обозначения вида $A = \{a^1, \dots, a^l\}$ и $B = \{b^1, \dots, b^l\}$. Пусть Π^l– множество перестановок множества $\{1, \dots, l\}$. Под перестановкой набора (множества) $A = \{a^1, \dots, a^l\}$, соответствующей перестановке $\pi\in\Pi^l$, понимается кортеж (упорядоченное множество) $\pi(A) = \langle a^{\pi(1)}, \dots, a^{\pi(l)}\rangle$. Например, если $l = 3$ и $\pi = (3, 1, 2)$, то $\pi(A) = \langle a^3,a^1,a^2\rangle$. На множестве наборов L вводится отношение нестрогого предпочтения – частичный квазипорядок R^l:

$$AR^lB \Leftrightarrow \text{существуют такие перестановки } \pi,\rho\in\Pi^l, \text{ что верно } a^{\pi(i)}Rb^{\rho(i)},\ i = 1, \dots, l.$$

Набор A называется *оптимальным* (соответственно *недоминируемым*), если для любого набора B, отличного от A, верно AR^lB (соответственно неверно BP^lA). Если квазипорядок R является полным, то оптимальный набор существует (но он не обязательно единствен) и его легко сформировать. Для частичного квазипорядка R множество недоминируемых наборов не пусто и внешне устойчиво по P^l.

Вариант x^* называется *l-оптимальным* (*по* R), если x^*Rx верно для всех вариантов x, кроме, быть может, некоторого их числа, меньшего, чем l. Вариант x^0 называется *l-недоминируемым* (*по* P), если число вариантов x, для которых верно xPx^0, меньше, чем l.

Множество $X^l(P)$ всех l-недоминируемых вариантов *внешне устойчиво*: если $x\notin X^l(P)$, то найдется не менее l вариантов $x^*\in X^l(P)$, для которых верно x^*Px.

Если квазипорядок R' продолжает квазипорядок R, то $X^l(P') \subseteq X^l(P)$.

Каждый оптимальный (соответственно недоминируемый) набор состоит только из l-оптимальных (соответственно l-недоминируемых) вариантов.

2.5. Набор $A\in L$ называется *потенциально оптимальным для класса* $\mathfrak{R}$, если существует квазипорядок $R\in\mathfrak{R}$, для которого этот набор является оптимальным.

Вариант x^* называется *потенциально l-оптимальным для класса* $\mathfrak{R}$, если существует квазипорядок $R\in\mathfrak{R}$ такой, по которому этот вариант является l-оптимальным.

Пусть $X^l(\mathfrak{R})$ – множество потенциально l-оптимальных вариантов для класса $\mathfrak{R}$. Это множество не пусто. Всякий потенциально l-оптимальный для класса $\mathfrak{R}$ вариант является l-недоминируемым: $X^l(\mathfrak{R}) \subseteq X^l(P)$. Потенциально оптимальный для класса $\mathfrak{R}$ набор состоит только из потенциально l-оптимальных для класса $\mathfrak{R}$ вариантов.

3. Потенциально оптимальные наборы вариантов и потенциально l-недоминируемые варианты в задачах множественного выбора

3.1. Рассмотрим задачу выбора l лучших вариантов для случая, когда известен класс $\mathbb{R}$ частичных квазипорядков, определенных на конечном множестве вариантов X и продолжающих квазипорядок R_0. Например, при интерактивном решении задач многокритериального выбора в качестве R_0 часто выступает отношение Парето, а класс $\mathbb{R}$ определяется дополнительно принятыми допущениями о свойствах структуры предпочтений ЛПР и дополнительной информацией о его предпочтениях. При решении многокритериальных задач с использованием теории важности критериев роль R_0 может играть, в частности, отношение нестрогого предпочтения R_Ω, порождаемое качественной информацией о важности критериев Ω, а класс $\mathbb{R}$ задается интервальной количественной информацией о важности критериев (Θ) и/или о ценностях градаций их шкалы (Ξ) [12].

Определение 1. Набор A называется *потенциально недоминируемым (для $\mathbb{R}$)*, если найдется квазипорядок $R\in\mathbb{R}$, для которого этот набор является недоминируемым. В противном случае этот набор называется *заведомо доминируемым для $\mathbb{R}$*.

Пусть $L(\mathbb{R})$– множество потенциально недоминируемых для $\mathbb{R}$ наборов. Согласно определению 1 справедливо равенство:

$$L(\mathbb{R}) = \bigcup_{P\in\mathbb{P}} L(R), \tag{2}$$

где $L(R)$ – множество наборов, недоминируемых по P^l.

Определение 2. Вариант x^* называется *потенциально l-недоминируемым для $\mathbb{P}$*, если найдется строгий частичный порядок $P\in\mathbb{P}$, для которого этот вариант является l-недоминируемым. В противном случае этот вариант называется *заведомо l-доминируемым для $\mathbb{P}$*.

Понятно, что если $\mathbb{R}$ – класс полных квазипорядков, то потенциально l-недоминируемые для $\mathbb{P}$ варианты – это потенциально l-оптимальные варианты для $\mathbb{R}$. Поэтому понятие потенциальной l-недоминируемости есть обобщение понятия потенциальной l-оптимальности на случай частичных квазипорядков.

Пусть $X^l(\mathbb{P})$ – совокупность потенциально l-недоминируемых вариантов. Согласно определению потенциальной l-недоминируемости справедливо равенство:

$$X^l(\mathbb{P}) = \bigcup_{P\in\mathbb{P}} X^l(P). \tag{3}$$

Формула (3) может служить основой для разработки вычислительных методов построения множества $X^l(\mathbb{P})$.

Теорема 1. *Всякий потенциально l-недоминируемый для $\mathbb{P}$ вариант является l-недоминируемым по P_0.*

Доказательства теорем вынесены в Приложение.

Теорема 2. *Множество $X^l(\mathbb{P})$ является покрывающим (множество X): для каждого варианта $x\notin X^l(\mathbb{P})$ и любого строгого частичного порядка $P\in\mathbb{P}$* во множестве $X^l(\mathbb{P})$ *найдется не менее l вариантов x^*, для которых верно x^*Px.*

Таким образом, именно из множества $X^l(\mathbb{P})$ надлежит выбрать l лучших вариантов.

3.2. Пусть некоторые (а возможно, и все) квазипорядки $R\in\mathbb{R}$ продолжены до квазипорядков R' (не обязательно полных), и эти квазипорядки R' составляют класс $\mathbb{R}'$. Иначе говоря, каждый квазипорядок $R'\in\mathbb{R}'$ есть продолжение некоторого квазипорядка $R\in\mathbb{R}$.

Теорема 3. *Справедливо вложение $X^l(\mathbb{P}') \subseteq X^l(\mathbb{P})$.*

Отметим также, что, согласно (3), если класс $\mathbb{P}''$ уже, чем класс $\mathbb{P}$ (т.е. справедливо строгое вложение $\mathbb{P}''\subset\mathbb{P}$), то

$$X^l(\mathbb{P}'') \subseteq X^l(\mathbb{P}). \tag{4}$$

Нестрогое вложение из теоремы 3 и нестрогое вложение (4) могут выполняться как строгие. Это означает, что уточнение информации о предпочтениях ЛПР сужает, вообще говоря, множество выбора l лучших вариантов.

3.3. Свойства и состав множества потенциально недоминируемых наборов характеризует следующая теорема.

Теорема 4. *Множество потенциально недоминируемых наборов $L(\mathbb{R})$ не пусто и является покрывающим (множество наборов L): для любого набора $A \notin L(\mathbb{R})$ и любого квазипорядка $R \in \mathbb{R}$ найдется набор $B \in L(\mathbb{R})$ такой, для которого выполнено $BP^l A$. Любой потенциально недоминируемый для $\mathbb{R}$ набор состоит из вариантов, каждый из которых является потенциально l-недоминируемым для $\mathbb{P}$.*

3.4. На основе класса $\mathbb{R}$ на множестве вариантов X можно построить отношение слабого доминирования – отношение предпочтения $P_w(\mathbb{P})$ следующим образом [5, 6]:

$$x' P_w(\mathbb{P}) x'' \Leftrightarrow x' P x'' \text{ справедливо для каждого } P \in \mathbb{P}. \tag{5}$$

Отношение $P_w(\mathbb{P})$ есть строгий частичный порядок. Пусть $X_w^l(\mathbb{P})$ – множество вариантов, которые l-недоминируемы по $P_w(\mathbb{P})$. Обозначим через $L_w(\mathbb{P})$ множество наборов, недоминируемых по строгому частичному порядку $P_w^l(\mathbb{P})$, порождаемому квазипорядком $R_w^l(\mathbb{P})$. Этот квазипорядок определяется на множестве наборов L аналогично квазипорядку R^l:

$$A\, R_w^l(\mathbb{P}) B \Leftrightarrow \text{ существуют такие } \pi, \rho \in \Pi^l, \text{ что верно } a^{\pi(i)} R_w(\mathbb{P}) b^{\rho(i)},\ i = 1, \dots, l,$$

где $R_w(\mathbb{P})$ – квазипорядок, являющийся объединением строгого частичного порядка $P_w(\mathbb{P})$ и отношения равенства.

Теорема 5. *Справедливы вложения*

$$X_w^l(\mathbb{P}) \supseteq X^l(\mathbb{P}),\ \ L_w(\mathbb{R}) \supseteq L(\mathbb{R}). \tag{6}$$

Вложения (6) могут быть строгими. Это означает, что использование потенциального l-недоминирования позволяет, вообще говоря, добиться большего сужения множества выбора l лучших вариантов, чем использование слабого недоминирования.

Заключение

Автор считает, что в данной работе новыми являются следующие результаты: для задач выбора l лучших вариантов, когда предпочтения ЛПР моделируются классом частичных квазипорядков, определено понятие потенциальной l-недоминируемости и изучены свойства потенциально l-недоминируемых вариантов и потенциально недоминируемых наборов из l вариантов.

Понятие l-недоминируемости является одним из базовых для теоретических исследований задач принятия решений о выборе нескольких лучших вариантов, разработки методов и алгоритмов построения множеств таких вариантов и реализации этих алгоритмов в аналитических компьютерных системах поддержки принятия решений.

Приложение

Доказательство теоремы 1. Предположим, что потенциально l-недоминируемый для $\mathbb{P}$ вариант x не является l-недоминируемым по P_0, т.е. найдется l вариантов $x^1, \dots, x^l$ таких, что верны соотношения $x^1 P_0 x, \dots, x^l P_0 x$. Тогда для каждого $P \in \mathbb{P}$ будем иметь $x^1 P x, \dots, x^l P x$. А это противоречит предположению, что вариант x потенциально l-недоминируем.

Доказательство теоремы 2. Если $x \notin X^l(\mathbb{P})$, то, согласно (3), для любого фиксированного $P \in \mathbb{P}$ верно $x \notin X^l(P)$. Поскольку множество $X^l(P)$ внешне устойчиво, то в нем найдутся варианты $x^1, \ldots, x^l$, для которых верно $x^1Px, \ldots, x^lPx$. Согласно формуле (2) имеем $x^1 \in X^l(\mathbb{P}), \ldots, x^lX^l(\mathbb{P})$.

Доказательство теоремы 3. Для каждого строгого частичного порядка P', порождаемого квазипорядком $R' \in \mathbb{R}'$, найдется строгий частичный порядок P, порождаемый квазипорядком $R \in \mathbb{R}$ таким, что верно $P \subseteq P'$. Поэтому $X^l(P') \subseteq X^l(P)$. Согласно формуле (3) имеем $X^l(\mathbb{P}') = \bigcup_{P' \in \mathbb{P}'} X^l(P')$. Следовательно, справедливо вложение $X^l(\mathbb{P}') \subseteq X^l(\mathbb{P})$.

Доказательство теоремы 4. Если $A \notin L(\mathbb{P})$, то, согласно (2), для любого фиксированного $P \in \mathbb{P}$ верно $A \notin L(P)$. Поскольку конечное множество $L(P)$ внешне устойчиво, то в нем найдется набор B такой, что верно BP^lA. Согласно (1) имеем $B \in L(\mathbb{P})$.

Пусть набор A потенциально недоминируем для $\mathbb{R}$, т.е. существует квазипорядок $R \in \mathbb{R}$, для которого этот набор недоминируем. Он состоит только из l-недоминируемых по P вариантов. Следовательно, согласно определению 2, все эти варианты потенциально l-недоминируемы для $\mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 5. Пусть $x \notin X_w^l(\mathbb{P})$, так что существуют варианты $x^1, \ldots, x^l$, для которых верно $x^1P^wx, \ldots, x^lP^wx$. Тогда, согласно определению (3), для любого $P \in \mathbb{P}$ справедливо $x^1Px, \ldots, x^lPx$, так что $x \notin X^l(P)$. Поэтому, как показывает формула (3), $x \notin X(\mathbb{P})$.

Пусть набор $B \notin L_w(\mathbb{R})$, так что найдется набор A такой, что верно $AP_w^l(\mathbb{P})B$. Последнее соотношение, согласно (5), означает, что существуют такие перестановки $\pi, \rho \in \Pi^l$, для которых справедливы соотношения

$$a^{\pi(i)} R_w(\mathbb{P}) b^{\rho(i)}, \; i = 1, \ldots, l,$$

среди которых хотя бы для одного i верно $a^{\pi(i)} P_w(\mathbb{P}) b^{\rho(i)}$. Поэтому, согласно определению (5), для каждого $R \in \mathbb{R}$ верны соотношения

$$a^{\pi(i)} R b^{\rho(i)}, \; i = 1, \ldots, l,$$

среди которых хотя бы для одного i верно $a^{\pi(i)} P b^{\rho(i)}$. Следовательно, для любого $R \in \mathbb{R}$ верно $B \notin L(R)$. Поэтому $B \notin L(\mathbb{R})$.

Литература

1. *Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения: учебное пособие. – М.: Физматлит, 2012.
2. *Xu Z.* A survey of preference relations // International journal of general systems. 2007. V. 36. P. 179–203.
3. *Подиновский В.В.*О взаимосвязи понятий потенциальной оптимальности и недоминируемости //Автоматика и телемеханика. 2012. № 1. С. 184–187.
4. *Podinovski V.V.* Non-dominance and potential optimality for partial preference relations // European journal of operational research. 2013. V. 229. P. 482 – 486.
5. *Hazen G.B.* Partial information, dominance, and potential optimality in multi-attribute utility theory // Operation research. 1986. V. 34. P. 296–310.
6. *Подиновский В.В.* Анализ решений при множественных оценках коэффициентов важности критериев и вероятностей значений неопределенных факторов в целевой функции // Автоматика и телемеханика. 2004. № 11. С. 141–159.
7. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.–изд. второе, испр. и доп. – М.: Физматлит, 2007.
8. *Szpilrajn E.* Sur l'extension de l’ordre partiel // Fundamenta mathematicae. 1930. V. 16. P. 386–389.
9. *Подиновский В.В.* Потенциальная оптимальность и оптимальность по Парето, Слейтеру и Джоффриону // Информационные технологии моделирования и управления. 2013. № 2 (80).С. 109–115.
10. *Подиновский В.В.* Формирование набора нескольких лучших объектов при частичной информации о предпочтениях // Искусственный интеллект и принятие решений. 2008. № 4. С. 3–11.

11.*Podinovski V.V.*Set choice problems with incomplete information about the preferences of the decision maker // European journal of operational research. 2010. V. 207. P. 371–379.

12.*Подиновский В.В.* Анализ задач многокритериального выбора методами теории важности критериев при помощи компьютерных систем поддержки принятия решений // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 2. С. 64–68.

Potential non-dominating in problems of choice of several best options

Vladislav Vladimirovich Podinovsky, Professor, National Research University Higher School of Economics

In the article the problems of decision-making on a choice of several best options when there is incomplete information on preferences of the person making decisions are investigated. The set of options for making the choice is presented, and the characteristics of the options are analyzed.

Keywords: problems of choice, partial relations of preference, potential optimality, non-dominating, potential non-dominating.