УДК 519.21

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ НАДЕЖНОСТЬЮ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ЭТАПЕ РАЗРАБОТКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Макаров Юрий Николаевич,
канд. техн. наук, профессор, директор Департамента стратегического планирования и организации космической деятельности,
e-mail: vova.babishin@yandex.ru,
Госкорпорация «Роскосмос», г. Москва,

Бабишин Владимир Денисович,
д-р техн. наук, профессор,
e-mail: vova.babishin@yandex.ru,
Всероссийский научно-исследовательский Институт Электромеханики им. А.Г. Иосифьяна, г. Москва,

Кулиш Николай Семенович,
канд. техн. наук, ст. науч. сотр., начальник отделения НТЦ-4,
e-mail: info416@TSnimah.ru,
Центральный научно-исследовательский институт машиностроения (ЦНИИмаш), г. Москва,

Парфенова Мария Яковлевна,
д-р техн. наук, профессор, проректор по научной работе,
e-mail: mparfenova@muiv.ru,
Московский университет имени С.Ю. Витте, г. Москва,

Куданова Дарья Дмитриевна,
старший инженер,
e-mail: info416@TSnimah.ru,
Центральный научно-исследовательский институт машиностроения (ЦНИИмаш), г. Москва

Во многих практических применениях не всегда удается численно в явном виде решить задачу оптимизации характеристик технической системы в условиях динамического нагружения при заданной степени надежности, особенно для целевой функции большого количества переменных. При решении данной задачи для создаваемых малосерийных технических систем на этапе проектирования отсутствуют данные для априорного статистического анализа и, как правило, не удается определить все множество возможных возмущающих воздействий (дестабилизирующих факторов или нагрузок), которые могут привести к нештатным ситуациям. Получение приближенных решений вызывает необходимость проведения дополнительных испытаний технической системы для уточнения предельных значений параметров, что связано со значительными затратами. Поэтому повышение точности определения требуемых значений характеристик технической системы на этапе разработки позволит уменьшить число испытаний. В работе предложен модифицированный метод наискорейшего спуска на основе его сопряжения с методом ускоренного перебора. Предложенный подход позволяет уменьшить число итераций и соответственно число испытаний при сохранении требуемой точности параметров технической системы и повысить устойчивость решения задачи управления надежностью на этапе разработки.

Ключевые слова: техническая система, динамическое нагружение, сопротивляемость, надежность, испытания

MATHEMATICAL MODEL OF CONTROL OF RELIABILITY OF A TECHNICAL SYSTEM DURING THE DEVELOPMENT PHASE WITH APPLICATION OF THE MODIFIED METHOD OF SHORTEST DESCENT

Makarov Yu.N.,
PhD techn. professor, director of the department of strategic planning and organization of space activities,
e-mail: vova.babishin@yandex.ru,
The State Corporation "Roskosmos", Moscow,

Babishin V.D.,
doctor of technical sciences, professor,
e-mail: vova.babishin@yandex.ru,
'VNIIEM Corporation' JC, Moscow,

Kulish N.S.,
PhD techn. professor, senior researcher, head of department, STC-4,
e-mail: info416@TSnimah.ru,
Central Research Institute for machine building, Moscow,

Parfenova M.Ya.,
doctor of technical sciences, professor, vice-rector for scientific work,
e-mail: mparfenova@muiv.ru,
Moscow Witte University, Moscow,

Kudinova D.D.,
senior engineer,
e-mail: info416@TSnimah.ru,
Central Research Institute for machine building, Moscow

In many practical applications, it is not always possible to solve the problem of optimization of technical system characteristics under dynamic loading at a given degree of reliability, especially for the objective function of a large number of variables. When solving this problem for the created small series technical systems at the design stage, there are no data for a priori statistical analysis and, as a rule, it is not possible to determine the entire set of possible disturbing effects (destabilizing factors or loads) that can lead to abnormal situations. Obtaining approximate solutions makes it necessary to conduct additional tests of the technical system to clarify the limit values of the parameters, which is associated with significant costs. Therefore, improving the accuracy of determining the required values of the characteristics of the technical system at the design stage will reduce the number of tests. In this paper we propose a modified method of sthortest descent on the basis of its interface with the method of accelerated search. The proposed approach allows to reduce the number of iterations and, accordingly, the number of tests while maintaining the required accuracy of the technical system parameters and to increase the stability of the solution to the reliability management problem at the development stage.

Keywords: technical system, dynamic loading, resistance, reliability, tests

DOI 10.21777/2500-2112-2019-2-74-84

Введение

Надежность технической системы (ТС) зависит от технических характеристик, определяемых на этапе проектирования и опытной эксплуатации в условиях, приближенных к реальной среде. Под надежностью рассматривается свойство ТС выполнять заданные функции, сохраняя во времени значение устанавливаемых эксплуатационных показателей в заданных пределах, соответствующих заданным режимам и условиям использования, технического обслуживания, хранения и транспортировки [8].

Исследования, направленные на разработку новых и совершенствование существующих вычислительных методов в области управления надежностью ТС, продолжаются и, в основном, связаны с оптимизацией технических характеристик ТС в условиях динамического нагружения при заданной степени надежности системы [5]. Широкое применение получили аналитические методы на основе статистического анализа ретроспективных данных. Для определения оптимальных технических параметров ТС проводится анализ производственного опыта управления, предшествовавшего текущей ситуации, и перенесение полученных результатов на прогнозируемый сценарий. Если ТС представляет собой малосерийный или вновь создаваемый высоконадежный объект, то на этапе разработки отсутствуют точные значения исходных параметров и, как правило, не удается определить все множество возможных возмущающих воздействий (дестабилизирующих факторов или нагрузок), которые могут привести к нештатным ситуациям. На данном этапе применяется априорный анализ, который базируется на априорных (вероятностных) характеристиках надежности [3]. Вероятностные характеристики лишь приблизительно отражают действительные процессы в ТС, но позволяют на стадии проектирования выявить слабые с точки зрения надежности места в конструкции, принять необходимые меры к устранению недостатков, а так же отвергнуть неудовлетворительные варианты построения ТС. Кроме того, на этапе разработки ТС отсутствует возможность проведения всего комплекса испытаний с целью сбора необходимой информации. Это приводит к практической не единственности решения в определении технических требований к ТС и большим трудностям в выяснении смысла получаемого приближенного решения, что в целом значительно снижает устойчивость решения данной задачи. Исходные условия данной задачи позволяют отнести ее к классу, так называемых некорректных задач [10], которым свойственна высокая степень неопределенности. С учетом изложенного, актуальным является повышение точности вычислительных методов и уменьшение числа итераций при поиске наилучших решений по выбору значений технических характеристик ТС в условиях динамического нагружения и заданной степени надежности. В данной работе рассматривается подход к построению математической модели для нахождения оптимальных значений параметров ТС с заданной степенью надежности, основанный на интегративном применении метода ускоренного поиска и классического метода наискорейшего спуска.

1. Анализ существующих подходов к определению параметров технических систем с учетом динамического нагружения

Существующие подходы математической теории управления надежностью технических систем используют достижения классических методов вариационного исчисления [1], принципа максимума Л.С. Понтрягина [9], метода динамического программирования на основе решения уравнения Беллмана для непрерывных детерминированных систем [4], градиентных методов оптимизации [6], методов оптимизации нелинейных случайных процессов [2] и др. Наряду с подходами, основанными на аналитических методах, известно большое количество работ, посвященных численным методам решения задач оптимального управления.

Как известно, обобщающей характеристикой технических свойств для данных систем является сопротивляемость [2, 7]. Сопротивляемость ТС представляет наибольшее значение внешнего воздействия, которое объект может выдерживать в течение заданного периода времени, и превышение которого приводит к отказу его функционирования.

Существующие подходы к определению требуемых параметров проектируемой ТС, как правило, основаны на определении ее состояния в виде функции распределения сопротивляемости. Эта функция представляет собой исчерпывающую характеристику допустимого предела величин внешнего воздействия, приводящего к отказу ТС при заданном уровне надежности. В этом случае устойчивость функционирования ТС (вероятность безотказной работы), как известно из теории надежности [8], определяется показателем надежности или функцией надежности. Этот показатель определяется уравнениями связи между характеристиками комплекса испытаний и показателями надежности, полученными методом косвенного измерения. Данные уравнения представляют собой математическую модель задачи управления надежностью без учета старения исследуемого объекта. Определение минимальной вероятности отказа ТС в условиях динамического нагружения при заданной степени надежности, как правило, выполняется с применением градиентных методов.

Существующие методы определения технических характеристик ТС используют в качестве исходных данных заданные значения функции надежности $R_{\hat{n}}(n)$ системы и функции распределения $F_{\hat{u}}(x)$ наибольших значений внешнего воздействия $\hat{u}$, где n – число проведенных испытаний, $\hat{n}$ – случайная дискретная величина, равная числу испытаний до отказа (дискретное время). Надежность ТС как вероятность ее безотказной работы по заданным управляемым p параметрам можно определить с использованием следующего выражения [5, 7]:

$$R(\hat{n} > n) = \prod_{i=1}^{p} \sum_{l=1}^{m} [F_{\hat{u}}(X)]^n \times \partial F_{\hat{x}}(X),$$

где $R_{\hat{n}}(n)$ – функция надежности или вероятность того, что за время $t = n \times \Delta\tau$ ни разу внешнее по отношению к ТС воздействие не превышает допустимого;

$\Delta\tau$ – период одного испытания ТС;

$F_{\hat{u}}(x)^n$ – известная функция распределения наибольших значений нагрузки (внешнего воздействия) после n испытаний или функция распределения внешнего воздействия относительно гипотезы о том, что предельное (допустимое) значение воздействия принадлежит элементарному l-ому отрезку i-го контролируемого параметра $x_i < \hat{x}_i < x_i + \Delta x$;

x_i – случайное значение i-го контролируемого (управляемого) параметра;

$\hat{x}_i$ – случайная величина предельных значений i-го контролируемого параметра, необратимые изменения которого в процессе испытаний не учитываются;

Δx – длина интервала разбиения предельного значения контролируемого параметра x_i, $l = 1, 2, \ldots, m$;

m – количество интервалов разбиения предельного значения контролируемого параметра;

$\hat{u}$ – случайная величина наибольших значений нагрузки;

$\hat{n}$ – случайная дискретная величина, равная числу испытаний до отказа (дискретное время);

$\partial F_{\hat{x}}(X) = \phi(\hat{x}) \times \Delta x$ – функция распределения предельных значений i-го контролируемого параметра как исчерпывающая характеристика допустимых предельных значений внешнего воздействия, приводящего к выходу из строя ТС;

$\phi(\hat{x})$ – плотность функции распределения предельного значения контролируемого параметра x_i.

Для одного параметра приведенное выражение для $R_{\hat{n}}(n)$ преобразуется в выражение:

$$R_{\hat{n}}(n) = \sum_{l=1}^{m} \left[F_{\hat{u}}(x) \right]^n \times \partial F(X) \tag{1}$$

Вычислительный алгоритм решения задачи управления надежностью для одного параметра можно разделить на три этапа.

1. Определение плотности распределения $\phi(\hat{x})$ предельного значения контролируемого параметра по формуле (1).

Для этого предельные значения управляемого параметра $\hat{x}$ разбиваются на $l = 1, 2, \ldots, m$ интервалов, для которых соответствующий временной интервал $\Delta\tau_\kappa$ означает, что максимальные значения случайных величин внешних воздействий можно считать практически некоррелированными.

2. Представление уравнения (1) в компактной матричной форме:

$$B \times \phi = r, \tag{2}$$

где $\phi = \partial F_{\hat{X}}(X)$ – векторная плотность распределения параметра, т.е. функция, подлежащая определению, которая характеризует требования к разрабатываемой ТС;

$B = \left[F_{\hat{U}}(X) \right]^n$ – оператор или переходная функция;

$r \in R_{\hat{n}}(n)$ – вектор правой части уравнения (2) – функция надежности (заданный предел надежности для параметра).

3. Решение системы линейных алгебраических уравнений вида (2).

Одним из эффективных методов решения системы линейных алгебраических уравнений вида (2) является метод Зейделя [11]. Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода итераций. Основная его идея заключается в том, что при вычислении (k + 1)-го приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее (k + 1)-е приближения неизвестных x_1,x_2, …, x_i - 1.

Для обеспечения положительной определенности матрицы задачи умножим левую и правую часть уравнения (2) на матрицу B^T. В результате вместо уравнения (2) решается уравнение:

$$B^T \times B \times \phi = B^T \times r, \tag{3}$$

где – B^T транспортирования матрица $B = \left[F_{\hat{U}}\left(X\right)\right]^n$.

Введем обозначения:

$$B^T \times B = \Phi, \tag{4}$$

$$B^T \times r = C. \tag{5}$$

Тогда уравнение (3) с учетом введенных обозначений (4) и (5) будет иметь вид:

$$\Phi \times \phi = C. \tag{6}$$

В векторно-матричной форме алгоритм решения системы уравнений (6) методом Зейделя $(n+1)$ -ом шаге итерации имеет следующий вид:

$$\phi^{n+1} = D^{-1} A \times \phi^n + D^{-1} \times C, \tag{7}$$

где ϕ^{n+1} – искомый вектор приближения на текущем $(n+1)$ -ом шаге итерации;

ϕ^n – то же, на предыдущем шаге итерации;

D, A – нижняя и верхняя треугольные матрицы (8) и (9), которые получаются из исходной матрицы Φ:

$$D = \begin{vmatrix} \Phi_{11} & 0 & 0 & ....0 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & 0 & ...0 \\ . & . & . & .... \\ \Phi_{m1} & \Phi_{m2} & \Phi_{m3} & ...\Phi_{mm} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \Phi_{12} & \Phi_{13} & ...\Phi_{1m} \\ 0 & 0 & \Phi_{23} & ...\Phi_{2m} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ...0 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Устойчивость решения осуществляется следующим образом. В первое слагаемое правой части формулы (7) в качестве сомножителя вводятся значения коэффициента стабильности α_κ:

$$\phi_\alpha^{n+1} = D^{-1} A \times \phi^n \times \alpha_k + D^{-1} \times C, \tag{10}$$

где α_k – коэффициент стабильности (регуляризации), значения которого задаются на основе теоретических исследований, k – число последовательно подставляемых в формулу (10) значений коэффициента α_k.

Оптимальность полученного решения (10) оценивается по критерию минимума эвклидовой нормы отклонения площади под кривой ϕ_{kl} от эталонного значения ϕ_l^*, которое является плотностью функции распределения проектного значения сопротивляемости. Величина этого отклонения ε_k определяется по следующей формуле:

$$\varepsilon_k = \frac{\sqrt{\sum_{l=1}^{m} \left(\phi_l^* - \phi_{kl}\right)^2 \times \Delta x}}{\sqrt{\sum_{l=1}^{m} \phi_l^2 \times \Delta x}}, \tag{11}$$

где ϕ_l^* – эталонное значение, которое является плотностью функции распределения проектного значения сопротивляемости;

ϕ_{kl} – полученные в результате решения (10) значения плотности функции распределения сопротивляемости на l-ом интервале разбиения предельного значения параметра x;

Δx – длина интервала разбиения аргумента x этой функции;

m – число интервалов этого разбиения.

Недостатком этого подхода является значительное число итераций при определении плотности функции распределения сопротивляемости ϕ_{kl}, полученные в результате решения уравнения (10), что в целом снижает оперативность вычислительного процесса. Кроме того, для получения оптимального решения необходимо точно определить эталонное проектное значение плотности функции распределения сопротивляемости ϕ_l^*, что связано с проведением испытаний ТС и затратами ресурсов или снижением точности оценки искомой плотности функции распределения ϕ_α^n. Поэтому данную задачу предлагается решать методом наискорейшего спуска на основе его сопряжения с алгоритмом ускоренного перебора с целью снижения числа итераций (испытаний) и повышения устойчивости решения задачи.

Модифицированный метод наискорейшего спуска для управления надежностью технической системы

Для получения оптимального количества итераций n_{opm} и оптимального значения проектного значения плотности функции распределения сопротивляемости ϕ_α^n по формуле (10) нужно ввести целевой функционал. Данный функционал вводится из уравнений связи между характеристиками комплекса испытаний и показателями надежности в виде [7]:

$$P_{\hat{n}}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\hat{u}}^{n-1}(x) R_{\hat{u}}(x) \phi_{\hat{x}}(x)\,dx, \tag{12}$$

где $P_{\hat{n}}(n)$ – распределение вероятности отказа по числу испытаний;

$R_{\hat{n}}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\hat{u}}^n(x)\,dF_{\hat{x}}(x)$ – функция надежности (дополнительная функция распределения времени безотказной работы), может быть представлена в виде $R_{\hat{u}}(x) = 1 - F_{\hat{u}}(x)$;

$\hat{u}$ – случайное наибольшее значение нагрузки в одном испытании при стационарном (в стохастическом смысле) процессе нагружения;

$\hat{x}$ – случайная величина сопротивляемости, необратимые изменения которой в процессе испытаний не учитываются;

$F_{\hat{u}}(x)$ и $F_{\hat{x}}(x)$ – соответственно: функция распределения наибольшего значения нагрузки в одном испытании и функция распределения сопротивляемости;

$F_{\hat{u}}^n(x)$ – функция распределения наибольшего значения нагрузки после n испытаний;

n – число испытаний в серии.

Запишем уравнение (12) в следующей форме:

$$P_{\hat{n}}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\hat{u}}^{n-1}(x)(1 - F_{\hat{u}}(x)) \phi_{\hat{x}}(x)\,dx. \tag{13}$$

Уравнение (13) кратко записывается в операторном виде:

$$P_{\hat{n}}(n) = L\phi_{\hat{x}}(x), \tag{14}$$

где L – интегральный оператор в матричном виде.

Уравнение (14) теперь можно записать по аналогии с выражением (1) в виде:

$$P_{\hat{n}}(n) = \sum_{k=1}^{m} \left[F_{\hat{u}}^{n-1}(x)(1 - F_{\hat{u}}(x)) \right] \times \phi(x) \tag{15}$$

С учетом (15) уравнение (1) запишется в виде:

$$R_{\hat{n}}(n) = \sum_{k=1}^{m} \left[F_{\hat{u}}(x) \right]^{n} \times \phi(x), \tag{16}$$

где $F_{\hat{u}}^{n}(x)$ – известная функция распределения наибольшего значения нагрузки после n испытаний.

Уравнение (16) представим в операторной форме:

$$R_{\hat{n}}(n) = B\phi_{\hat{x}}(x) \tag{17}$$

Таким образом, математическая модель управления надежностью в общем виде:

$$J(n_{onm}) = P_n(n_{onm}) = L\phi_x(x) = \sum_{k=1}^{m} [F_{\hat{u}}^{n-1}(1 - F_{\hat{u}}(x))] \times \phi(x) \to \min, \tag{18}$$

при следующих ограничениях с учетом (17):

$$B\phi_{\hat{x}}(x) = R(n_{onm}) = \sum_{k=1}^{m} [F_{\hat{u}}(x)]^{n} \times \phi_x(x) \le r;$$

$$\left[n_{\hat{x}}(x) \right] = \frac{t}{\Delta\tau} = 1,2,3.........n_{onm};$$

$$t_0 \le t \le T;$$

$$\Delta\tau > 0;$$

$$x(t_0) = x_0;$$

$$x(t_1) = x_1,$$

где $x(t) = \{x_1, ..., x_m\}$ и $n(\hat{x}_1, x_2, ..., x_m) = \{n_1, ..., n_n\}$ – соответственно вектор-функции состояния ТС с целевым функционалом $J\left[n_{onm}(\hat{x}) \right]$ и управляющими функциями $n(x_1, ..., x_m)$.

Принятые в (18) обозначения:

B и L соответственно матрицы для уравнений целевого функционала и уравнения ограничений для заданной надежности;

$J[n_{onm}(x)]$ – целевой функционал вероятности отказа в $n(x_1, ..., x_m)$-й итерации;

$\Delta\tau$ – период корреляции стационарного случайного процесса;

n – число итераций выражения (10);

m – количество алгебраических уравнений в матричном виде;

r – заданная надежность ТС в матричном виде;

$F_{\hat{u}}^{n}(x)$ – известная функция распределения наибольшего значения нагрузки после n испытаний;

$\hat{x}$ – случайная величина сопротивляемости, необратимые изменения которой в процессе испытаний не учитываются;

$\phi_{\hat{x}}(x)$ – плотность функции распределения случайной величины $\hat{x}$, которая является результатом решения модели (18).

Решение данной задачи заключается в определении оптимального количества итераций $n_{onm}(x_1, ...x_m)$, при которых функционал $J\left[n_{onm}(\hat{x}) \right]$ уравнения (18) или вероятность отказа ТС $P(n_{onm})$ достигают минимальных значений для r. В выражении (18) случайная величина $\hat{x}$ заменяется значением плотности функции распределения $\phi_{\hat{x}}(x)$.

Ниже представлен алгоритм решения задачи минимизации функционала $J\left[n_{\hat{x}}(\hat{x}) \right]$ уравнения (18) методом наискорейшего спуска в сочетании с методом ускоренного перебора.

Необходимым условием минимизации целевого функционала $J(n_{opt}(\hat{x}))$ является равенство всех частных производных нулю, т.е. $\nabla\{J[n\ (\phi_1, ..., \phi_m)]\} = 0$. Достаточным условием является то, что значения второй частной производной $J\left[n_{\hat{x}}(\phi_1, ..., \phi_m) \right]$ должны быть положительными. Таким образом, частные производные:

$$\frac{J[n\ (\phi_1 + \Delta\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m)] - J[n(\phi_1, \phi_2, \phi_3, ..., \phi_m)]}{\Delta\phi_1} = 0, \ldots.. \tag{19}$$

$$\ldots\ldots \frac{J[n\ (\phi_1,\ldots.,\phi_m+\Delta\phi_m)]-J[n(\phi_1,\ldots,\phi_m)]}{\Delta\phi_m}=0\,.$$

Далее выполняется построение итерационной последовательности $n(\phi_1,\ldots,\phi_m)=\{n_1,\ldots..n_n\}$ по следующему сценарию.

Вся итерационная последовательность $n_i\left(\phi_1,\ldots,\phi_m\right)$ строится в два этапа.

Первый этап. Методом ускоренного перебора определяются первичные элементы $n_{1i}(\phi_{11},\ldots.,\phi_{1m})$ первой i-той итерационной последовательности для плотности распределения сопротивляемости $\phi^n_{1\alpha}$ согласно (10), которая вначале увеличивается по линейному закону, что в целом предполагает возможность расчета искомой плотности функции распределения ϕ^n_α с минимальной погрешностью.

Допущение 1. Базовое значение погрешности плотности функции распределения ϕ^n_α задается по критерию минимума эвклидовой нормы отклонения площади под кривой ϕ_{kl} от эталонного значения ϕ^*_l (11), т.е. $\varepsilon_k=\varepsilon_{баз_{мин}}$, при котором выполняются условия линейного закона, т.е. искомая плотность функции распределения ТС $\phi^n_{1\alpha}$ вычисляется с минимальной погрешностью. В этом случае погрешность плотности функции распределения сопротивляемости ϕ^n_α определяется исходя из условия:

$$\varepsilon_k\le\varepsilon_{БАЗ_{мин}}\,. \tag{20}$$

Если погрешность определяется условием (20), то первые $1i$-ые итерации $n_{1i}(,\phi_{11}\ldots.\phi_{1m})$ исключаются из расчета ϕ^n_α. Процесс вычислений количества первичных элементов итерационной последовательности $n_{1i}(,\phi_{11}\ldots.\phi_{1m})$ ускоренным методом перебора продолжается до тех пор, пока выполняется условие (20). Момент окончания ускоренного метода перебора фиксируется номером итерационной последовательности $n_{1i}(\phi_{11},\ldots.,\phi_{1m})$, при котором погрешность плотности функции распределения ϕ^n_α определяется условием:

$$\varepsilon_к\ge\varepsilon_{баз_{мин}}\quad. \tag{21}$$

Второй этап. Методом наискорейшего спуска определяются элементы $n_{2i}(\phi_{21},\ldots.,\phi_{2m})$ $2i$-ой итерационной последовательности по следующему правилу: задаются начальные значения плотности распределения сопротивляемости для начальной итерации $n_{2i}(\phi_{21},\ldots.,\phi_{2m})$, которая является исходной точкой итерационной последовательности $\{n_{2i},\ldots...,n_{2n}\}$ и совпадает с моментом окончания ускоренного метода перебора (условие (21) для 1-го этапа).

Обозначим начальную итерацию, как $n_{21}(\phi_{21_0},\ldots.,\phi_{2m_0})$. Определяем градиент в общем виде $J\left[n_{\hat{x}}(\hat{x})\right]$ в соответствии с (18). Подставляем координаты начальной итерации $n_{21}(\phi_{21_0},\ldots.,\phi_{2m_0})$ и определяем градиент:

$$\begin{gathered}\nabla\{J_1\left[n_{21}(\phi_{21_0},\ldots.,\phi_{2m_0})\right]\}=\{\frac{J[n_{21}(\phi_{21_0}+\Delta\phi_1,\ldots,\phi_{2m_0})]-J[n_{21}(\phi_{21_0},\ldots.,\phi_{2m_0})]}{\Delta\phi_1}\},\ldots.,\\ \ldots,\{\frac{J[n_{21}(\phi_{21_0},\ldots.,\phi_{2m_0}+\Delta\phi_m)],\ldots...J[n_{21}(\phi_{21_0},\ldots...,\phi_{2m_0})]}{\Delta\phi_m}\}\end{gathered} \tag{22}$$

Допущение 2. Для повышения устойчивости вычислений по формуле (22) введем вместо приращений $\Delta\phi_1\ldots.\Delta\phi_m$ параметры регуляризации $\eta_1\ldots\ldots.\eta_m$, в формуле которые задаются исходя из требуемой погрешности вычисления производных в формуле (19). Тогда градиент $\nabla J_1[n_{21}(\phi_{21_0},\ldots,\phi_{2m_0})]$ определяется в виде частных производных:

$$\begin{gathered}\nabla\{J_1\left[n_{21}(\phi_{21_0},\ldots..\phi_{2m_0})\right]\}=\{\frac{J[n_{21}(\phi_{21_0}+\eta_1,\ldots..,\phi_{2m_0})]-J[n_{21}(\phi_{21_0},\ldots...,\phi_{2m_0})]}{\eta_1}\},\ldots...\\ \{\frac{J[n_{21}(\phi_{21_0},\ldots...,\phi_{2m_0}+\eta_m)]-J[n_{21}(\phi_{21_0},\ldots..\phi_{2m_0})]}{\eta_m}\}\end{gathered} \tag{23}$$

Введем следующие обозначения

$$K_1 = \frac{J[n_{21}(\phi_{21_0} + \eta_1, \ldots, \phi_{2m_0})] - J[n_{21}(\phi_{21_0}, \ldots \phi_{2m_0})]}{\eta_1};$$

$$K_m = \frac{J[n_{21}(\phi_{21_0}, \ldots \phi_{2m_0} + \eta_m)] - J[n_{21}(\phi_{21_0}, \ldots, \phi_{2m_0})]}{\eta_m}.$$

Тогда градиент $\nabla J_1[n_{21}(\phi_{21_0}, \ldots, \phi_{2m_0})]$ определятся как

$$\nabla J_1[n_{21}(\phi_{21_0}, \ldots, \phi_{2m_0})] = (K_1; \ldots; K_m). \tag{24}$$

Затем определяется следующая итерация $n_{22}(\phi_{22_1}, \ldots, \phi_{22_m})$ по формуле:

$$n_{22}(\phi_{22_1}, \ldots, \phi_{22_m}) = n_{21}(\phi_{21_0}, \ldots, \phi_{2m_0}) - h_1(K_1, \ldots, K_m), \tag{25}$$

где h_1 – длина шага данной итерации.

Значение h_1 определяется по следующему алгоритму.

Перепишем уравнение (25) с учетом выражения (24) и введенных обозначений в следующем виде:

$$\begin{gathered} n_{22}(\phi_{22_1}, \ldots, \phi_{22_m}) = n_{21}(\phi_{21_0}, \ldots, \phi_{2m_0}) - h_1(K_1, \ldots, K_m) = \\ = [\phi_{21_0} - h_1 K_1], \ldots, [\phi_{2m_0} - h_1 K_m] \end{gathered} \tag{26}$$

Подставляя координаты точки $n_{22}(\phi_{22_1}, \ldots, \phi_{22_m})$ из уравнения (26) в уравнение (23), определяем градиент по формуле:

$$\nabla\{J_2\left[n_{22}(\phi_{22_1}, \ldots \phi_{22_m})\right]\} = \nabla\{J_2[\phi_{21_0} - h_1 K_1], \ldots, [\phi_{21_0} - h_1 K_m]\}. \tag{27}$$

Допущение 3. Номера итерационной последовательности $n_{2i}(x_{2i}, \ldots, x_{2m})$ рассматриваются в виде ортогональных векторов. Тогда согласно свойству произведения ортогональных векторов составляется следующее уравнение:

$$n_{21}(\phi_{21_0}, \ldots, \phi_{2m_0}) \cdot n_{22}(\phi_{22_1}, \ldots, \phi_{22_m}) = 0 \tag{28}$$

Подставляя координаты 1-й итерации $n_{21}(\phi_{21_0}, \ldots, \phi_{2m_0})$ и выражение (26) в формулу (28):

$$\begin{gathered} n_{21}(\phi_{21_0}, \ldots, \phi_{2m_0}) \bullet n_{22}(\phi_{22}, \ldots, \phi_{2m}) = (\phi_{21_0}, \ldots, \phi_{2m_0}) \bullet [(\phi_{21_0} - h_1 K_1); \ldots \\ \ldots; (\phi_{2m_0} - h_1 K_m) = (\phi^2_{21_0} - \phi_{21_0} h_1 K_1 + \ldots + \phi^2_{2m_0} - \phi_{2m_0} h_1 K_m) = 0 \end{gathered} \tag{29}$$

определяем длину шага h_1, исходя из (29) в виде:

$$\begin{gathered} \phi^2_{21_0} + \ldots + \phi^2_{2m_0} = h_1(\phi_{21_0} K_1 + \ldots + \phi_{2m} K_m), \\ h_1 = \frac{\phi^2_{21_0} + \ldots + \phi^2_{2m_0}}{\phi_{21_0} K_1 + \ldots + \phi_{2m_0} K_m} \end{gathered} \tag{30}$$

Подставляя выражение (30) в формулу (27) вычисляется градиент по формуле:

$$\begin{gathered} \nabla\{J_2\left[n_{22}(\phi_{22_1}, \ldots, \phi_{22_m})\right]\} = \nabla\{J_2[\{\phi_{21_0} - h_1 K_1\}, \ldots, \{\phi_{2m_0} - h_1 K_m\}]\} = \\ = \nabla\{J_2[\{\phi_{21_0} - \frac{\phi^2_{21_0} + \ldots + \phi^2_{2m_0}}{\phi_{21_0} K_1 + \ldots + \phi_{2m_0} K_m} K_1\}, \ldots \\ \ldots, \{\phi_{2m_0} - \frac{\phi^2_{21_0} + \ldots + \phi^2_{2m_0}}{\phi_{21_0} K_1 + \ldots + \phi_{2m_0} K_m} K_m\}]\} \end{gathered} \tag{31}$$

Примем следующие обозначения:

$$\Pi_1 = \phi_{21_0} - \frac{\phi_{21_0}^2 + ... + \phi_{2m_0}^2}{\phi_{21_0} K_1 + ... + \phi_{2m_0} K_m} K_1,$$

$$\Pi_m = \phi_{2m_0} - \frac{\phi_{21_0}^2 + ... + \phi_{2m_0}^2}{\phi_{21_0} K_1 + ... + \phi_{2m_0} K_m} K_m.$$

Тогда градиент $\nabla J_2[n_{22}(\phi_{22_1},.....,\phi_{22_m})]$ (31) вычисляется в виде:

$$\nabla J_2[n_{22}(\phi_{22_1},.....,\phi_{22_m})] = \nabla J_2(\Pi_1,.......,\Pi_m) = (L_1,......L_m) \tag{32}$$

и приравнивается к нулю.

$L_1,.......L_m$ – частные производные $J_2[n_{22}(\phi_{22_1},.....,\phi_{22_m})]$ по $\phi_1........\phi_m$, которые вычисляются по аналогии с расчетом (23).

Допущение 4. Для сокращения вычислений градиента $\nabla J_2[n_{22}(\phi_{22_1},.....,\phi_{22_m})]$ будем полагать, что $\nabla J_2[n_{22}(\phi_{22_1},.....,\phi_{22_m})] = 0$ при условии, что все $\Pi_k = 0$.

Если градиент $\nabla J_2[n_{22}(\phi_{22_1},.....,\phi_{22_m})] \neq 0$, то выполняется следующая итерация:

$$n_{23}(\phi_{23_1},......,\phi_{23_m}) = n_{22}(\phi_{22_1},.......,\phi_{21_m}) - h_2 \nabla J_2[(\Pi_1,........,\Pi_m)]. \tag{33}$$

Длина шага h_2 для уравнения (33) находится аналогично по ранее рассмотренному алгоритму.

Затем вычисляется градиент $\nabla J_3[n_{23}(\phi_{23_1},......,\phi_{23_m})]$ по аналогии с (32).

Если градиент $\nabla J_3[n_{23}(\phi_{23_1},.....,\phi_{23_m})] \neq 0$, то итерационный процесс вычисления элементов минимизируемой последовательности $\{n_{21},.....n_{2n}\}$ итераций продолжается до тех пор, пока не будет выполняться условие минимизации $J_i\left[n_{\tilde{x}}(\phi_{2i_1},......,\phi_{2i_m})\right]$, при котором градиент $\nabla J_i(n_{2n(onm)}(\phi_{2i_1},......,\phi_{2i_m})] = 0$. В этом случае количество итераций будет минимальным для заданных условий.

Основным недостатком метода Зейделя для решения этой задачи является то, что сходимость итерационных процессов может быть медленной. Методы наискорейшего спуска по сравнению с методами случайного поиска позволяют быстрее найти оптимальное решение, но точность оценки параметров может быть неудовлетворительной. Кроме того, градиентные методы отличаются высокой чувствительностью алгоритмов к начальным условиям. Для повышения эффективности решения задачи минимизации $J(n_{opt})$ рассматривается подход, сочетающий метод наискорейшего спуска и метод ускоренного поиска. Предложенный подход позволяет завершить вычислительный процесс за меньшее количество итераций и достичь заданной точности решения.

Заключение

Предложен подход к построению математической модели для нахождения оптимальных значений параметров технической системы с заданной степенью надежности, основанный на интегративном применении метода наискорейшего спуска и метода ускоренного поиска. Такой подход позволяет использовать преимущества итерационных методов в вычислительных алгоритмах и устранить некоторые недостатки, обусловленные их пошаговым выполнением. Применение данного подхода на этапе проектирования технической системы позволит сократить количество испытаний на этапе согласования параметров с учетом динамического нагружения системы.

Список литературы

1. *Андреева, Е.А.* Вариационное исчисление и методы оптимизации: учеб. пособие для ун-тов / Е.А. Андреева, В.М. Цирулева. – М.: Высш. шк., 2006. – 583 с.

2. *Асланов, М.А.* Системный анализ и принятие решений в деятельности учреждений реального сектора экономики, связи и транспорта / М.А. Асланов, В.В. Кузнецов, Ю.Н. Макаров, А.А. Мальчевский, А.Ю. Шатраков; под ред. В.В. Кузнецова. – М.: Экономика, 2010. – 406 с.

3. *Бабишин, В.Д.* Теоретические рекомендации по определению закона распределения технических характеристик сложных систем в условиях динамического нагружения / В.Д. Бабишин, В.В. Маклаков, М.А. Дорошенко // Двойные технологии. – 2013. – № 4(65). – С. 2–5.
4. *Беллман, Р.Э.* Динамическое программирование / Перевод с английского И.М. Андреевой, А.А. Корбута, И.В. Романовского, И.Н. Соколовой; под редакцией Н.Н. Воробьева. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960.
5. *Волков, С.Н.* Прямой метод оптимального управления надежностью сложных технических систем на этапе разработки в условиях динамического нагружения / С.Н. Волков, В.Д. Бабишин, Н.С. Кулиш, Е.В. Юркевич, Д.М. Кривопалов. Труды международного симпозиума «Надежность и качество». Издательство: Пензенский государственный университет (Пенза). – 2018. – Том 2. – С. 351–357.
6. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964.
7. *Дедков В.К., Масоди Д.А.* Новый подход к решению обратной задачи надежности // Международный симпозиум «Надежность и качество». – Пенза, 2007. – С. 186–188.
8. *Матвеевский В.Р.* Надежность технических систем: учебное пособие. – М.: Московский государственный институт электроники и математики, 2002. – 113 с.
9. *Понтрягин, Л.С.* Математическая теория оптимальных процессов: учебник / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 4-е издание, 1983. – 393 с.
10. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 3-е издание. 1986. – 288 с.
11. *Формалев Ф.В., Ревизников Д.Л.* Численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

References

1. *Andreeva E.A.* Variacionnoe ischislenie i metody optimizacii: ucheb. posobie dlya un-tov / E.A. Andreeva, V.M. Ciruleva. – M.: Vyssh. shk., 2006. – 583 s.
2. *Aslanov M.A.* Sistemnyj analiz i prinyatie reshenij v deyatel’nosti uchrezhdenij real’nogo sektora ekonomiki, svyazi i transporta / M.A. Aslanov, V.V. Kuznecov, Yu.N. Makarov, A.A. Mal’chevskij, A.Yu. Shatrakov; pod red. V.V. Kuznecova. – M.: Ekonomika, 2010. – 406 s.
3. *Babishin V.D., Maklakov V.V., Doroshenko M.A.* Teoreticheskie rekomendacii po opredeleniyu zakona raspredeleniya tekhnicheskih harakteristik slozhnyh sistem v usloviyah dinamicheskogo nagruzheniya // Dvojnye tekhnologii. – 2013. – № 4(65). – S. 2–5.
4. *Bellman R.E.* Dinamicheskoe programmirovanie / Perevod s anglijskogo I.M. Andreevoj, A.A. Korbuta, I.V. Romanovskogo, I.N. Sokolovoj; pod redakciej N.N. Vorob’eva. – M.: Izdatel’stvo inostrannoj literatury, 1960.
5. *Volkov, S.N.* Pryamoj metod optimal’nogo upravleniya nadezhnost’yu slozhnyh tekhnicheskih sistem na etape razrabotki v usloviyah dinamicheskogo nagruzheniya / S.N. Volkov, V.D. Babishin, N.S. Kulish, E.V. Yurkevich, D.M. Krivopalov. Trudy mezhdunarodnogo simpoziuma «Nadezhnost’ i kachestvo». Izdatel’stvo: Penzenskij gosudarstvennyj universitet (Penza). – 2018. – Tom 2. – S. 351–357.
6. *Ventcel’ E.S.* Teoriya veroyatnostej. – M.: Nauka, 1964.
7. *Dedkov V.K., Masodi D.A.* Novyj podhod k resheniyu obratnoj zadachi nadezhnosti // Mezhdunarodnyj simpozium «Nadezhnost’ i kachestvo». Trudy. – Penza, 2007. – S. 186–188.
8. *Matveevskij V.R.* Nadezhnost’ tekhnicheskih sistem. Uchebnoe posobie. – M.: Moskovskij gosudarstvennyj institut elektroniki i matematiki, 2002. – 113 s.
9. *Pontryagin L.S.* Matematicheskaya teoriya optimal’nyh processov: uchebnik / L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskij, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko. – M.: Nauka, 4-e izdanie. 1983. – 393 s.
10. *Tihonov A.N., Arsenin V.Ya.* Metody resheniya nekorrektnyh zadach. – M.: Nauka, Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoj literatury izdatel’stva «Nauka», 3-e izdanie. 1986. – 288 s.
11. *Formalev F.V., Reviznikov D.L.* Chislennye metody. – M.: FIZMATLIT, 2004.