

тенны для выбора разрешённых значений параметров  $n$  и  $r$ , что подробно рассмотрено в [4].

Последовательные формы изогнутого гибкого элемента обода при  $r = 2, 3, 4$  для случая  $n = 18$ , построенные по аналитическим выражениям (8), приведены на рисунке 2.

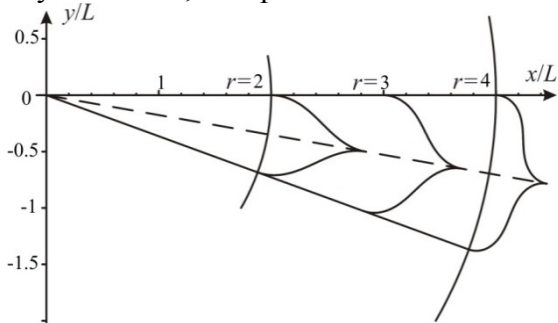


Рис. 2. Последовательные формы изогнутого гибкого элемента с защемлением при  $r = 2, 3, 4$  для случая  $n = 18$

Полученные формы изгиба базового элемента конструкции согласуются с результатами, полученными авторами [3]. Показано, что изгиб стержней происходит на второй моде. Разработка аналитической модели гибкой трансформируемой конструкции рефлектора антенны космического аппарата позволит внести вклад в решение актуальных проблем, существующих на сегодняшний день в космической технике.

### Литература

1. Попов Е.П. Теория и расчёт гибких и упругих стержней / Попов Е.П. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
2. Захаров Ю.В. Нелинейный изгиб тонких упругих стержней / Захаров Ю.В., Охоткин К.Г. // ПМТФ. 2002. Т. 43. №5. С. 122-131.
3. Lopatin A.V. №Design of large space antenna composite rim / A.V. Lopatin, M.A. Rutkovskaya // Composite Structures. 2006. Vol. 76. P. 99-105.
4. Геометрически нелинейная модель трансформируемого обода большой космической антенны с гибким и композитными лентами / Лопатин А.В., Захаров Ю.В., Охоткин К.Г. // Вестник СибГАУ. 2012. Вып.5(45). С. 75-80.

### Analytical model of flexible transformable hoop of space aerial

Valentina Valentinovna Viliyanin, master

Siberia State Aerospace University after academician M.F. Reshetnev

Alexandr Konstantinovich Nikulin, graduate student

Siberia State Technological University

In this article was used model of non-linear pendulum for finding optimal shape of a curved strip. The shapes with bend point presents via elliptic functions. Result of the article allows to improve construction of an aerial of satellite.

Keywords: geometric nonlinear, elliptic functions, column's Euler.

УДК 539.374

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ С ПОДАТЛИВЫМИ ПРОСЛОЙКАМИ

Мария Александровна Похабова, аспирант

Тел.: 8923 3498959, e-mail: pokhabova-mariya@mail.ru

Институт вычислительного моделирования СО РАН

<http://icm.krasn.ru>

На основе реологического метода построены модели деформирования материала прослоек различного уровня сложности. При численном решении одномерных задач применены монотонные сеточно-характеристические схемы со сбалансированным числом шагов по времени в блоках и прослойках. Приведены результаты расчётов, демонстрирующие качественные особенности распространения плоских волн в материалах со слоистой микроструктурой.

Ключевые слова: упругие волны, блочная среда, микроструктура, реологическая схема, вычислительный алгоритм, математическое моделирование.

## 1. Введение

Характерным для горных пород является их блочное строение. При этом горный массив рассматривают как систему вложенных блоков разных масштабных уровней, от размеров кристаллических зёрен до блоков горного массива, выделяемых крупными разломами, соединённых прослойками, состоящими из более слабых трещиноватых пород [1].

Одной из важнейших технологических задач угледобычи является прогноз внезапного обрушения кровли угольных шахт. Этому процессу предшествует ослабление механического контакта между блоками: порода приобретает ослабленную микроструктуру. Такое состояние среды можно обнаружить, возбуждая в ней упругие волны малой амплитуды и регистрируя отклик на эти возмущения, что может быть использовано при разработке специальных технических устройств для своевременного предсказания и предотвращения аварийных ситуаций.



М.А. Похабова

Цель настоящей статьи состоит в исследовании особенностей формирования упругих волн в блочных средах на основе математических моделей, учитывающих сложные реологические свойства материала прослоек, и при их импульсном возбуждении проверить справедливость гипотезы о возможности существования волн маятникового типа экспериментально и теоретическому исследованию которых, посвящены работы [2–5].

Следует отметить, что теория неоднородных сред со слоистой и блочной микроструктурой - область механики, интенсивно развивающаяся в течение более чем полувека. К настоящему времени в этой области построены адекватные математические модели, развиты эффективные аналитические методы исследования, разработаны численные алгоритмы для решения квазистатических и динамических задач, основанные на конечно-элементной аппроксимации непрерывных моделей [6–9]. Однако в задачах о распространении в слоистых средах высокочастотных волн, длины которых сравнимы с размерами блоков и прослоек, такие методы оказываются практически непригодными из-за методических погрешностей, обусловленных влиянием аппроксимационной вязкости, нередко превосходящей вязкость физическую, подлежащую учету в рамках используемой математической модели.

## 2. Уравнения одномерных движений слоистой среды

На рис. 1 изображена условная схема иерархического строения горной породы, которая в идеальном случае представляет собой вложенную слоистую структуру с инвариантным отношением характерных масштабов блоков и прослоек. Рассмотрим сначала отдельный фрагмент этой структуры в одномерном приближении - чередующуюся систему из  $n$  упругих слоев толщины  $h$  и уп-

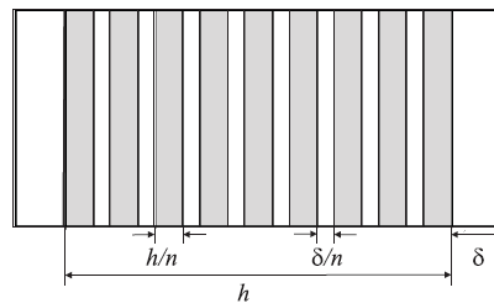


Рис. 1. Иерархическая слоистая структура горной породы

ругих прослоек толщины  $\delta$ .

Пусть  $\rho$  и  $\rho_0$ ,  $c$  и  $c_0$ ,  $a = \frac{1}{\rho c^2}$  и  $a_0 = \frac{1}{\rho_0 c_0^2}$  - плотности, скорости звука и упругие

податливости материалов слоя и прослойки соответственно. Внутри слоя с номером  $k$  выполняются одномерные уравнения теории упругости

$$\rho \frac{\partial v^k}{\partial t} = \frac{\partial \sigma^k}{\partial x}, \quad a \frac{\partial \sigma^k}{\partial t} = \frac{\partial v^k}{\partial x}, \quad (1)$$

записанные относительно продольной скорости  $v^k$  в направлении оси  $x$  ( $x$  меняется от 0 до  $h$  в пределах каждого слоя) и нормального напряжения  $\sigma^k$ . Поведение материала прослойки описывается с

помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\rho_0 \frac{d}{dt} \frac{\partial v^{k+1} + v^k}{2} = \frac{\sigma^{k+1} - \sigma^k}{\delta}, \quad a_0 \frac{d}{dt} \frac{\partial \sigma^{k+1} + \sigma^k}{2} = \frac{v^{k+1} - v^k}{\delta}, \quad (2)$$

в которую входят граничные значения введённых выше скоростей и напряжений, левые для  $(k+1)$ -го слоя и правые для  $k$ -го слоя. Такая система может быть получена методом осреднения уравнений упругой среды в приближении тонкой прослойки ( $\delta \ll h$ ). Она учитывает инерционные свойства прослойки. Упрощённое описание без учёта инерционных свойств вытекает из (2) в пределе при стремлении удельной массы прослойки  $\rho_0 \delta$  к нулю. Тогда, очевидно, выполняется условие непрерывности напряжения на границе раздела слоёв. Если модуль податливости прослойки  $a_0 \delta$  также устремить к нулю, то из системы (2) последуют условия непрерывности скорости. Таким образом, получится малоинтересная для целей данной статьи математическая модель однородной упругой среды, не описывающая блочную структуры.

К системе уравнений (1) и (2) добавляются начальные условия  $v^k = \sigma^k = 0$ , ( $k = 1, \dots, n$ ) и граничные условия следующего вида:  $\sigma^1(0, t) = -p(t)$ ,  $v^n(h, t) = 0$ , где  $p(t)$  - заданное внешнее давление.

Численное решение задачи строилось на основе схемы распада разрыва Годунова на равномерной сетке с выбором предельно допустимого по условию Куранта–Фридрихса–Леви шага по времени  $\tau = \Delta x / c$ . Схема в этом случае в пределах слоя не обладает искусственной диссипацией энергии. При меньших значениях шага использовалась кусочно-линейная ENO-реконструкция (EssentiallyNonOscillatory) второго порядка точности, которая, как показали расчёты, существенно снижает эффект сглаживания пиков численного решения с соответствующим уточнением получаемых результатов.

Условия согласования на границах раздела слоев и прослоек в форме системы уравнений (2) также рассчитывались по схеме Годунова. Для этого в каждой из искусственно введённых ячеек длины  $\delta$ , имитирующих отдельную прослойку, была реализована схема распада разрыва с

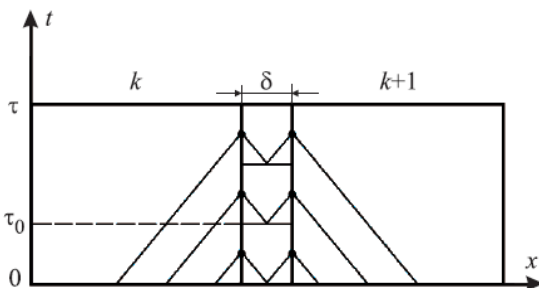


Рис. 2. Сеточно-характеристическая схема со сбалансированными шагами по времени

независимым шагом по времени  $\tau_0 = \frac{\delta}{c_0} \ll \tau$ , предельным по условию Куранта–Фридрихса–Леви для материала прослойки. В прослойках производился расчёт такого количества шагов по времени, которое необходимо для достиже-

ния очередного временного слоя  $t + \tau$  основной схемы.

Сеточно-характеристическая интерпретация применяемого метода схематически приведена на рис. 2.

На этапе решения системы (2) с шагом  $\tau_0$  использовались уравнения распада разрыва на границах раздела сред (“предиктор” схемы в прослойке):

$$z_0 v_+ - \sigma_+ = z_0 v - \sigma, \quad z v_+ + \sigma_+ = z v^{k+1} + \sigma^{k+1},$$

$$z_0 v_- + \sigma_- = z_0 v + \sigma, \quad z v_- + \sigma_- = z v^k + \sigma^k.$$

Здесь  $z = \rho c$  и  $z_0 = \rho_0 c_0$  - акустические импедансы материалов основного слоя и прослойки, величины с верхними индексами относятся к приграничным ячейкам взаимодействующих слоёв, с нижним индексом “+” - к правой, а с индексом “-” - к левой границе прослойки. Последующий пересчёт решения (“корректор” схемы) производился по формулам:

$$\mathfrak{v} = v + (\sigma_+ - \sigma_-) \frac{\tau_0}{\rho_0 \delta}, \quad \mathfrak{\sigma} = \sigma + (v_+ - v_-) \frac{\tau_0}{a_0 \delta},$$

в которых величины с крышкой относятся к новому временному слою. Предикторные значения сеточных величин основной схемы с шагом  $\tau$  на границах слоёв вычислялись путём осреднения значений, относящихся к границам ячеек на мелких шагах. «Корректор» основной схемы в слоях выполнялся обычным способом на основе интегральных аналогов дифференциальных уравнений (1).

### 3. Вязкоупругие прослойки

Анализ экспериментальных данных по распространению упругих волн в слоистых средах показывает, что прослойки ведут себя неупруго даже при весьма малых амплитудах волн. Далее рассмотрим более сложные варианты моделей, учитывающие естественные диссипативные процессы в прослойках.

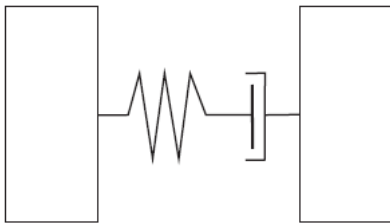


Рис.3. Реологические схемы взаимодействия блоков: модель Максвелла

Вязкоупругое взаимодействие по модели Максвелла (рис. 3), согласно которой деформация прослойки складывается из упругой и вязкой составляющих, описывается системой (2) после замены второго уравнения более общим уравнением

$$a_0 \frac{d}{dt} \frac{\sigma^{k+1} + \sigma^k}{2} + \frac{\sigma^{k+1} + \sigma^k}{2\eta} = \frac{v^{k+1} - v^k}{\delta}, \quad (3)$$

где  $\eta$  - коэффициент вязкости материала прослойки. В этом случае при численном решении вместо (3) на шаге “корректор” использовалась аппроксимация уравнений вязкоупругой среды по следующей схеме Кранка–Николсон:

$$\rho_0 \frac{\mathfrak{v} - v}{\tau_0} = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{\delta}, \quad a_0 \frac{\mathfrak{\sigma} - \sigma}{\tau_0} + \frac{\mathfrak{\sigma} + \sigma}{2\eta} = \frac{v_+ - v_-}{\delta}.$$

Эта схема также реализуется с помощью явного вычислительного алгоритма.

### 4. Задача отражения и прохождения волны

Верификация вычислительных алгоритмов и программ проводилась путем сравнения результатов расчетов с точным решением задачи об отражении и прохождении монохроматической волны через прослойку между двумя протяжёнными блоками, занимающими левое и правое полупространства. В этой задаче неизвестными являются зависящие от частоты волны  $\omega$  коэффициенты прохождения  $A(\omega)$  и отражения  $B(\omega)$ .

Решение уравнений (1) при  $x < 0$  представляет собой суперпозицию падающей и отражённой волн:

$$v = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + Bf\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad \sigma = -zf\left(t - \frac{x}{c}\right) + Bzf\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

где  $f(t) = f_0 e^{i\omega t}$  - функция, определяющая форму падающей волны. При  $x > 0$  решение соответствует прошедшей волне:  $v = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ ,  $\sigma = -zf\left(t - \frac{x}{c}\right)$ . В случае упругой прослойки при  $x = 0$  выполняются уравнения (2):

$$\rho_0 \delta (1 + A + B) \frac{df}{dt} = 2z(1 - A - B)f, \quad a_0 \delta z (1 + A - B) \frac{df}{dt} = 2(1 - A + B)f,$$

из которых следует, что

$$A = \frac{1 - \alpha\beta}{(1 + \alpha)(1 + \beta)}, \quad B = \frac{\beta - \alpha}{(1 + \alpha)(1 + \beta)}, \quad \text{где } \alpha = \frac{i\omega\delta z_0}{2c_0 z}, \quad \beta = \frac{i\omega\delta z}{2c_0 z_0}.$$

Полученные формулы, в частности, показывают, что при одинаковых импедансах  $z$  и  $z_0$  выполняются равенства  $|A| = 1$  и  $B = 0$ . В этом случае падающая волна проходит через прослойку беспрепятственно и без отражения, что является простейшим тестом правильности работы алгоритма и программы.

В случае вязкоупругой прослойки решение может быть получено из приведённого выше решения заменой модуля упругой податливости  $a_0$  в выражении для коэффициента  $\beta = \frac{1}{2} i\omega a_0 z \delta$  комплексным модулем, равным  $a_0 + \frac{1}{i\omega\eta}$  в модели Максвелла.

### 5. Уравнения блочной среды

Рассмотрим состояние плоской деформации блочного массива, образованного квадратными упругими блоками со сторонами длины  $h$ , параллельными координатным осям декартовой системы координат  $x_1, x_2$ , и тонкими межблочными прослойками толщины  $\delta$ . Блоки в массиве нумеруются парами индексов  $k_1$  и  $k_2$ , пробегающих значения от 1 до  $N_1$  и  $N_2$ , соответственно. Внутри каждого блока выполняется система уравнений однородной изотропной упругой среды:

$$\rho \dot{v}_1 = \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2}, \quad \rho \dot{v}_2 = \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2}, \quad \dot{\sigma}_{12} = \rho c_2^2 (v_{2,1} + v_{1,2}),$$

$$\dot{\sigma}_{11} = \rho c_1^2 (v_{1,1} + v_{2,2}) - 2\rho c_2^2 v_{2,2}, \quad \dot{\sigma}_{22} = \rho c_1^2 (v_{1,1} + v_{2,2}) - 2\rho c_2^2 v_{1,1}.$$

Здесь  $c_1$  и  $c_2$  - скорости продольных и поперечных упругих волн, точка над символом и индексы после запятой означают производные по времени и по пространственным переменным, в остальном используются общепринятые обозначения.

Упругая прослойка между соседними блоками в горизонтальном направлении с номерами  $(k_1, k_2)$  и  $(k_1 + 1, k_2)$  описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, учитывающими ее массу и продольную и поперечную жёсткости:

$$\rho' \frac{\dot{v}_1^+ + \dot{v}_1^-}{2} = \frac{\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-}{\delta}, \quad \frac{\dot{\sigma}_{11}^+ + \dot{\sigma}_{11}^-}{2} = \rho' c_1'^2 \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta},$$

$$\rho' \frac{\dot{v}_2^+ + \dot{v}_2^-}{2} = \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta}, \quad \frac{\dot{\sigma}_{12}^+ + \dot{\sigma}_{12}^-}{2} = \rho' c_2'^2 \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta}.$$

Упругая прослойка между блоками в вертикальном направлении с номерами  $(k_1, k_2)$  и  $(k_1, k_2 + 1)$  - уравнениями:

$$\rho' \frac{\dot{v}_2^+ + \dot{v}_2^-}{2} = \frac{\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-}{\delta}, \quad \frac{\dot{\sigma}_{22}^+ + \dot{\sigma}_{22}^-}{2} = \rho' c_1'^2 \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta},$$

$$\rho' \frac{\dot{v}_1^+ + \dot{v}_1^-}{2} = \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta}, \quad \frac{\dot{\sigma}_{12}^+ + \dot{\sigma}_{12}^-}{2} = \rho' c_2'^2 \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta}.$$

В этих уравнениях верхние индексы  $\pm$  относятся к границам взаимодействующих блоков. Для решения двумерных задач применялся метод двуциклического расщепления по пространственным переменным, приводящий к серии одномерных задач.

Результаты расчётов показали, что под действием импульсной нагрузки образуются падающие волны (продольная и поперечная), конические поперечные волны, поверхностные волны, распространяющиеся со временем по всей области массива. Из-за наличия податливых прослоек возникает серия волн, отражённых от границ раздела, и серия поверхностных волн, образующихся при выходе отражённых волн на границу полуплоскости.

При расчёте задачи Лэмба с касательной нагрузкой для многоблочной среды на основе упрощённой модели, представленной выше, результаты показали, что увеличение числа блоков с пропорциональным уменьшением параметров  $h$  и  $\delta$  приводит к появлению за фронтом падающей поперечной волны размытого волнового фронта, связанного с передачей вращательного движения блоков. Это может служить подтверждением интуитивного представления о том, что многоблочную среду с податливыми прослойками можно приблизить обобщённым континуумом, в уравнениях которого учитывается несимметрия тензора напряжений, вызванная вращательным движением блоков, и моментные напряжения, связанные с искривлением регулярной блочной структуры из-за неоднородности вращений.

## 6. Заключение

Автор считает, что в данной работе новыми являются следующие положения и результаты: построена математическая модель плоского деформированного состояния блочной среды с податливыми вязкоупругими прослойками, разработан алгоритм численной реализации модели на многопроцессорных вычислительных системах кластерной архитектуры, а также полученные на основе предложенной модели результаты анализа распространения волн напряжений и деформаций в слоистых и блочных средах.

### Литература

1. Садовский М.А. Естественная кусковатость горной породы // Докл. АН СССР. 1979. 247. № 4. С. 829-831.
2. Курленя М.В., Опарин В.Н., Востриков В.И. О формировании упругих волновых пакетов при импульсном возбуждении блочных сред. Волны маятникового типа // Докл. АН СССР. 1993. 333. № 4. С. 3-13.
3. Александрова Н.И., Черников А.Г., Шер Е.Н. Экспериментальная проверка одномерной расчетной модели распространения волн в блочной среде // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 2005. № 3. С. 46-55.
4. Александрова Н.И., Шер Е.Н., Черников А.Г. Влияние вязкости прослоек на распространение низкочастотных маятниковых волн в блочных иерархических средах // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 2008. № 3. С. 3-13.
5. Сарайкин В.А. Учет упругих свойств блоков в низкочастотной составляющей волны возмущений, распространяющейся в двумерной среде // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 2009. № 3. С. 9-24.
6. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. –Л.: Судостроение, 1972.
7. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. –М.: Наука, 1973.
8. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. – М.: Наука, 1975.
9. Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. –М.: Физматлит, 2008.

**Numerical modeling of the propagation of elastic waves in stratified media with compliant interlayers**

*Mariya Alexandrovna Pokhabova, graduate student  
Institute of Computational Modeling SB RAS*

*Developed computer algorithms that simulate the dynamic interaction of elastic blocks through thin viscoelastic layer in structurally inhomogeneous media such as rocks. On the basis of rheological models are constructed for the deformation of the material layers of different levels of complexity. In the numerical solution of one-dimensional problems of applied monotonous grid-characteristic schemes with a balanced number of time steps in the blocks and interlayers. The problems of software implementation of algorithms on multiprocessor systems with graphics cards. Numerical results demonstrate the qualitative features of the propagation of plane waves in materials with a layered microstructure.*

*Keywords: elastic waves, the block medium, microstructure, rheological scheme, the computational algorithm, mathematic modeling.*

УДК 004.89

**РАЗРАБОТКА ОПТИМАЛЬНОЙ ИММУННОСЕТЕВОЙ МОДЕЛИ  
ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РИСКОВ  
СЛОЖНЫХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ**

*Галина Ахметовна Самигулина, д.т.н.*

*Тел.: 872722724617, e-mail: galinasamigulina@mail.ru*

*Зарина Ильдусовна Самигулина, PhD – докторант*

*Тел.: 8 7272 2724617, e-mail: galinasamigulina@mail.ru*

*лаборатория «Интеллектуальные системы управления и сети»*

*Институт проблем информатики и управления МОН РК,*

*<http://www.wipic.kz>*

*Работа посвящена проблеме построения оптимальной иммунносетевой модели для сложных инвестиционных проектов с целью прогнозирования рисков и возможности своевременной корректировки в процессе их реализации. Используется перспективный подход искусственных иммунных систем (ИИС), основанный на понятии формального пептида и процедуре молекулярного узнавания. Достоинствами применения ИИС при интеллектуальном анализе данных является возможность параллельной обработки большого количества мнений экспертов, прогнозирования рисков и своевременное управление ходом выполнения сложных проектов. Большое значение при реализации иммунносетевой технологии имеет процедура построения оптимальной модели на основе отбора наиболее информативных признаков. Для решения этой проблемы используется метод главных компонент.*

*Ключевые слова: интеллектуальные системы, прогнозирование рисков, искусственные иммунные системы, сложные инвестиционные проекты, метод главных компонент.*

Стремительное развитие в последнее время новейших компьютерных и интеллектуальных технологий способствует разработке интересных практических приложений. Проектный менеджмент является чрезвычайно актуальной сферой применения интеллектуальных систем и информационных технологий нового поколения. Разработка нетрадиционных интеллектуальных технологий управления сложными проектами и прогнозирование рисков их выполнения является очень значимым, как для государственного сектора экономики, так и для частных компаний.



**З.И. Самигулина**