УДК 597.97

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ УСПЕВАЕМОСТИ УЧЕБНЫХ ГРУПП

Цветков Виктор Яковлевич,
д-р техн. наук, профессор, заместитель руководителя Центра стратегического анализа и развития АО «НИИАС»,
e-mail: cvj2@mail.ru,
Научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт информатизации, автоматизации и связи на железнодорожном транспорте (НИИАС), г. Москва,

Рогов Игорь Евгеньевич,
директор Института довузовской подготовки, ответственный секретарь приёмной комиссии,
e-mail: rogov@mirea.ru,
Российский технологический университет (РТУ МИРЭА), г. Москва

В статье рассматривается методика сравнительной оценки групповой успеваемости обучающихся на основе специально разработанных характеристик. Методика предназначена для сравнительного анализа успеваемости разных групп внутри одного учебного заведения. В работе предложен новый вид сигмоидальной функции, которая названа функцией успеваемости. Аргументами функции успеваемости являются положительные значения. Фактически эти аргументы связаны с числом обучающихся в группе и с полученными оценками. Специальными характеристиками предлагаемой методики являются функция успеваемости и интегральная оценка результатов тестирования. Методика сравнительной оценки групповой успеваемости обучающихся с применением предложенной функции успеваемости является альтернативой модели Раша. В практическом применении для педагогических работников методика является менее трудоемкой, что продемонстрировано на практических примерах. Дано описание методики и приведены результаты экспериментального оценивания с помощью данной методики. Описаны условия применения методики.

Ключевые слова: оценка групповой успеваемости, сигмоида, логит, функция успеваемости, интегральная оценка, модель Раша

FUNCTIONAL APPROACH TO THE ASSESSMENT OF ACADEMIC PERFORMANCE OF STUDY GROUPS

Tsvetkov V.Ya.,
doctor of technical sciences, professor, Center for strategic analysis and development, the deputy head,
e-mail: cvj2@mail.ru,
Research and Design Institute of design information, automation and communication on railway transport, Moscow,

Rogov I.E.,
director of the Institute before university preparation, executive secretary of the admissions committee,
e-mail: rogov@mirea.ru,
Russian Technological University (RTU MIREA), Moscow

The article deals with the method of comparative assessment of group performance of students on the basis of specially developed characteristics. The methodology is intended for comparative analysis of the results of the activities of different groups within the same educational institution. In this paper, we propose a new type of sigmoid function, which is called the academic performance function. The arguments of the academic performance function are positive values. In fact, these arguments are related to the number of students in the group and the grades received. The special characteristics of the proposed methodology are the efficiency function and the integral evaluation of the test results. The method of comparative assessment of group performance of *students using the proposed performance function is an alternative to the Rasch model. In practical application for teaching staff, the method is less time-consuming, which is demonstrated by practical examples. The method is described and the results of experimental evaluation using this method are presented. The conditions for using the method are described.*

Keywords: assessment of group performance, sigmoid, logit, performance function, integral assessment, Rasch model

DOI 10.21777/2500-2112-2021-1-61-68

Введение

Для оценки успеваемости обучающихся широко практикуется применение параметрической модели Раша, имеющей асимптотику 0 при x=-∞ и 1 при x=+∞. Модель Раша [1; 9; 13; 14], применяемая для оценки успеваемости, имеет ряд недостатков и является трудоемкой для педагогических работников. Физически все оценки больше нуля, а модель принципиально допускает значения аргумента до -∞. Модель Раша использует логиты [3], представляющие статистическую модель, которая применяется для прогнозирования вероятности возникновения некоторого события путём его сравнения с логистической кривой. Практически сложно реальные оценки подгонять под логиты с учетом того, что в некоторых случаях появляется обусловленность и деление на ноль. Модель Раша использует логистическую функцию, в которой все кривые привязаны к точке $b = \beta_j$, вероятность правильного ответа в которой Pt_j равна уровню условной вероятности *0,5.* Идея метода Раша основана на применении логистической или сигмоидальной функции, которая обладает рядом особенностей и требует отдельного рассмотрения. В данной работе предлагается альтернативная методика.

1. Сигмоидальные функции

Сигмоида – это гладкая монотонная возрастающая нелинейная функция [15], которая часто применяется для «сглаживания» значений некоторой величины и для описания реакции и насыщения. Примером сигмоиды обычно считают логистическую функцию вида

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}\ .$$

Сигмоида ограничена двумя горизонтальными асимптотами (рисунок 1), к которым стремится функция при стремлении аргумента к ± ∞. Обычно этими асимптотами являются 0 (при x=-∞) и константа (при x=+∞). Во многих случаях константа при x=+∞ есть 1.

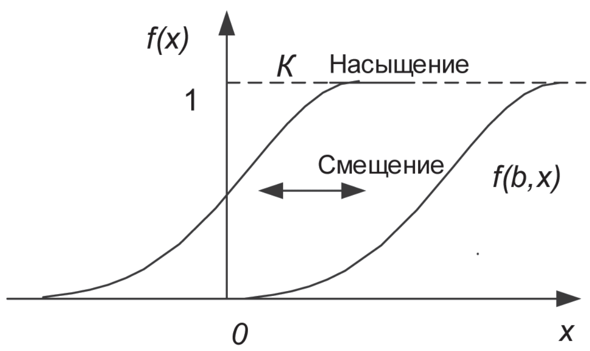

Рисунок 1 – Типовая сигмоида

Типовая сигмоида имеет положительные значения функции при отрицательных значениях аргумента. Для ее смещения необходимо вводить специальный параметр b (рисунок 1).

Производная сигмоиды представляет собой «гауссоподобную» кривую с максимумом в нуле, асимптотически стремящуюся к нулю при x=±∞. К семейству класса сигмоид относят такие функции, как арктангенс, гиперболический тангенс и другие функции. Примером служит экспоненциальная сигмоида вида

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-2ax}}$$

при a>0.

Другим примером служит рациональная сигмоида вида

$$f(x) = \frac{x}{|x| + a}$$

при a>0.

Корневая сигмоида имеет вид

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Обобщенная логистическая функция имеет вид

$$f(x) = (1 + e^{-x})^{-1}.$$

Функция Гудермана может быть представлена в виде

$$f(x) = gd\, x = arctg(sh\, x).$$

Сигмоида применяется в качестве функций активации в системах комплементарной оптимизации [11] и системах астатического управления [10]. Она позволяет усиливать слабые сигналы и ограничивать сильные сигналы.

Производная функции сигмоиды может быть выражена через саму функцию, что позволяет существенно сократить вычислительную сложность метода обратного распространения ошибки (МОРО). Его (backpropagation) применяют для вычисления градиента при обновлении весов многослойного перцептрона [12]. Идея МОРО состоит в распространении ошибки от выходов функции к входам, в направлении, обратном прямой обработки информации. Для логистической функции производная равна $f'(x)=f(x)\,(1-f(x))$.

Логистическая функция f(x) используется для решения задачи классификации с двумя классами: z=0, z=1. Переменная z указывает класс объекта, и делается предположение о том, что вероятность принадлежности объекта к одному из классов выражается через значения признаков этого объекта $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (действительные числа).

2. Построение и применение функции успеваемости для оценки групповой подготовленности обучающихся

Обобщение опыта в области тестирования [2; 5; 6; 8] и исследование сигмоидальных функций позволило разработать альтернативный подход к модели Раша и создать функцию для оценки групповой подготовленности обучающихся. На основе исследований авторы предложили еще один вид сигмоидальной функции, которую назвали функцией успеваемости

$$fu(x) = \frac{x}{1+x} \tag{1}$$

для x>0.

Второй вариант этой функции

$$fu(x) = \frac{a\,x}{1 + b\,x}$$

для x>0, a>0, b>0, b>a.

Асимптотически *fu* равна 0 при x=0 и стремится к 1 при x=+∞. Эта функция есть сигмоида, но только в положительной области аргумента. В ходе исследований выяснилось, что для комплексного оценивания успеваемости [4; 7] целесообразно выбирать x в виде кумулятивной или интегральной переменной. Формирование множества X(x) осуществляется следующим образом:

1. Фиксируются оценки учащихся z, полученные в ходе тестирования.
2. Ранжируются оценки z и получают ранжированные значения z*.

$$z \rightarrow z^*.$$

3. Формируют интегральные оценки x по правилу.

$$x_i = \sum_{j=1}^{i} z_j *$$

4. Строится функция успеваемости (1).

Название функции обусловлено тем, что она характеризует успеваемость учебной группы. В таблице 1 приведены исходные данные оценок для четырех групп учащихся g1-g4. В группах было выбрано по 20 учащихся для сопоставимости.

Таблица 1 – Исходные ранжированные оценки z* для 4 групп

g1	**g2**	**g3**	**g4**
5	5,5	6	6,2
5	5,5	6	6,2
6	6,5	7	7,2
6	6,5	7	7,2
6	6,5	7	7,2
7	7,5	8	8,2
7	7,5	8	8,2
7	7,5	8	8,2
8	8,5	9	9,2
8	8,5	9	9,2
8	8,5	9	10
9	9,5	10	10
9	9,5	10	10
9	9,5	10	10
9	9,5	10	10
10	10	10	10
10	10	10	10
10	10	10	10
10	10	10	10
10	10	10	10

Оценивание учащихся проводилось по 10-балльной системе. Допустимы также 20-балльная и 100-балльная системы, как рекомендует Хлебников [2]. В первых трех группах оценки были целочисленные. В четвертой группе с точностью до десятой. Как показал опыт, оценки лучше нормировать, то есть задавать интервал оценивания от 0 до 1. Для этого исходные оценки делят на максимальную оценку. Тестирование проводилось по принципу «один предмет – разные группы». В таблице 2 приведены интегральные оценки для тех же групп по нормированным оценкам.

Таблица 2 – Интегральные нормированные оценки для групп

N	**g1**	**g2**	**g3**	**g4**
	0,5	0,55	0,6	0,62
1	1	1,1	1,2	1,24
2	1,6	1,75	1,9	1,96
3	2,2	2,4	2,6	2,68

4	2,8	3,05	3,3	3,4
5	3,5	3,8	4,1	4,22
6	4,2	4,55	4,9	5,04
7	4,9	5,3	5,7	5,86
8	5,7	6,15	6,6	6,78
9	6,5	7	7,5	7,7
10	7,3	7,85	8,4	8,7
11	8,2	8,8	9,4	9,7
12	9,1	9,75	10,4	10,7
13	10	10,7	11,4	11,7
14	10,9	11,65	12,4	12,7
15	11,9	12,65	13,4	13,7
16	12,9	13,65	14,4	14,7
17	13,9	14,65	15,4	15,7
18	14,9	15,65	16,4	16,7
19	15,9	16,65	17,4	17,7
20	15,9	16,65	17,4	17,7

Как показал опыт, целесообразно применять логарифмирование оценок для повышения различимости результатов тестирования. В таблице 3 приведены логарифмические оценки со смещением, чтобы значения были больше 0.

Таблица 3 – Логарифмические интегральные нормированные оценки для групп

g1	**g2**	**g3**	**g4**
0,901388	0,963908	1,019171	1,039538
1,306853	1,353373	1,393864	1,408636
1,514492	1,548015	1,577143	1,587755
1,625307	1,651693	1,674578	1,682904
1,694618	1,716425	1,735307	1,742171
1,748686	1,766385	1,781746	1,787338
1,786426	1,801329	1,814283	1,819002
1,814283	1,827157	1,838359	1,842442
1,838359	1,84934	1,858921	1,862421
1,856899	1,866469	1,874837	1,877897
1,871619	1,880096	1,887522	1,891197
1,884931	1,892369	1,898904	1,901882
1,895739	1,902362	1,908192	1,910655
1,90469	1,910655	1,915917	1,917987
1,912224	1,917649	1,922442	1,924206
1,919311	1,923918	1,928027	1,929548
1,925338	1,929299	1,932861	1,934187
1,930528	1,933969	1,937086	1,938252
1,935042	1,938061	1,940811	1,941844
1,939005	1,941674	1,94412	1,945041
1,939005	1,941674	1,94412	1,945041

На рисунке 2 приведен график функции успеваемости.

Как показывает опыт, графическая различимость функций успеваемости для разных групп с использованием графика Excel является не высокой. Но главное, что таблицы позволяют найти числовые характеристики, характеризующие успеваемость разных групп. Таких характеристик две: интегральная и точечная. Интегральная оценка определяется как интеграл под кривыми на рисунке 2. Точечная оценка определяется как среднее по столбцам таблицы 3.

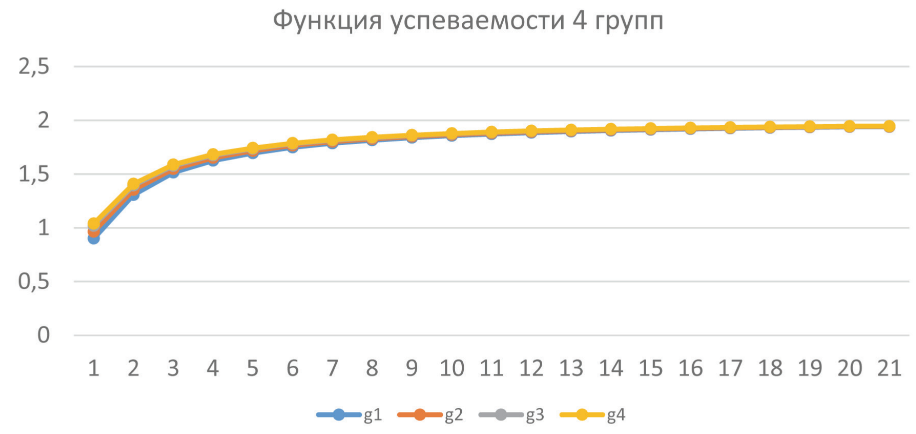

Рисунок 2 – График функции успеваемости для 4 групп

Принципиальным отличием функции успеваемости от модели Раша является то, что модель Раша смещается слева направо, а функция успеваемости смещается по вертикали снизу вверх при росте успеваемости в группах. В отличие от методики построения модели Раша, трудоемкой для педагогических работников, предлагаемая функция успеваемости строится с использованием минимума простых вычислений. Для таблицы 3 были получены оценки групповой успеваемости, приведенные в таблице 4.

Таблица 4 – Итоговые сравнительные характеристики успеваемости 4 групп по одному предмету

Название показателя	Группа 1	Группа 2	Группа 3	Группа 4
Интегральный показатель успеваемости	37,14474	37,45582	37,72821	37,82994
Относительное приращение	0	0,311078	0,583467	0,685202
Точечный показатель успеваемости	1,768797	1,78361	1,796581	1,801426
Относительное приращение точечного показателя	0	0,014813	0,027784	0,032629

По данным таблицы 4 видно, что наиболее успевающей группой является группа 4. Данные показатели обладают сопоставимостью и могут применяться для разных групп внутри одного вуза.

Интегральный показатель успеваемости является более устойчивым к возможным ошибкам. Опыт показывает, что оценивание с точностью до 0,1 целесообразно, когда преподаватель колеблется и не полностью уверен в оценке. В этом случае величина 0,1 характеризует неуверенность, неопределенность оценки. Она сглаживается при интегральной оценке по группе. Точечный показатель более чувствителен к грубым ошибкам, например, в ведомости может быть вместо 10-балльной максимальной оценки стоять 11 или 12 баллов. Точеный показатель в этом случае включит ошибочную оценку и исказит общую групповую оценку, а для интегрального показателя такая одиночная ошибка практически не влияет на результат.

Заключение

Логистическая функция, применяемая в модели Раша, имеет положительные значения функции при отрицательных значениях аргумента. Это не соответствует реальным условиям тестирования. Оценки как аргумент имеют только положительные значения. Отрицательные оценки не используют. Для ее смещения в область положительных значений аргумента необходимо вводить специальный параметр *b*. Функция успеваемости имеет областью значений аргумента только положительные числа, что соответствует значениям реальных оценок. Аналогом функции успеваемости может служить «функция успеха», введенная в [2], но как чисто вероятностная характеристика функции успеваемости является реальной функцией, которую легко можно рассчитать на основе фактических данных. Экзотическим и необычным является введение кумулятивной или интегральной оценки. Тем не менее, предложен простой механизм для сравнительной оценки успеваемости разных групп. Базой сравнения является общий предмет, читаемый одним преподавателем или преподавателями примерно одинакового уровня сложности. В данной работе таким предметом, результаты по которому представлены в таблицах 1–4, была «Математическая логика и теория алгоритмов». Условием применения данной методики является одинаковый уровень сложности изложения предмета. Если предмет читают разные преподаватели с разным уровнем сложности изложения, то результаты оценок не сопоставимы. Один преподаватель ставит высокие оценки за определенный ответ, другой – менее низкие за этот же ответ. В этом случае методика требует коррекции. Данная методика является альтернативой модели Раша и может быть использована в педагогической практике.

Список литературы

1. *Летова Л.* Исследование качества теста единого государственного экзамена по физике с помощью модели Раша // Управление образованием: теория и практика. – 2013. – № 3 (11). – С. 52–61.
2. *Нейман Ю.М., Хлебников В.А.* Введение в теорию моделирования и параметризации педагогических тестов. – М., 2000. – 168 с.
3. *Ожерельева Т.А.* Оценка тестирования на основе логитов // Славянский форум. – 2019. – № 1 (23). – С. 32–39.
4. *Пушкарева К.А.* Комплексное оценивание результатов обучения // Дистанционное и виртуальное обучение. – 2013. – № 1. – С. 99–103.
5. *Рогов И.Е.* Анализ тестирующих моделей и систем // Образовательные ресурсы и технологии. – 2019. – № 4 (29). – С. 53–60.
6. *Сафиулин Р.З.* Развитие технологий тестирования в образовании // Управление образованием: теория и практика. – 2015. – № 1 (17). – С. 139–149.
7. *Тымченко Е.В.* Обработка информации при свободном тестировании // Дистанционное и виртуальное обучение. – 2017. – № 6 (120). – С. 153–159.
8. *Цветков В.Я.* Направления тестирования в сфере образования // Современное дополнительное профессиональное педагогическое образование. – 2017. – № 2. – С. 72–80.
9. *Цветков В.Я., Войнова Е.В.* Модификация модели Раша для оценки свободного тестирования // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2018. – № 1 (63). – С. 90–94.
10. *Цветков В.Я., Щенников А.Н.* Астатическое управление подвижными объектами // Славянский форум. – 2019. – № 1 (23). – С. 53–59.
11. *Щенников А.Н.* Комплементарность и симплекс метод // ИТНОУ: Информационные технологии в науке, образовании и управлении. – 2019. – № 3 (13). – С. 88–95.
12. Backpropagation and the brain / T.P. Lillicrap [et al.] // Nature Reviews Neuroscience. – 2020. – Т. 21, No. 6. – С. 335–346.
13. *Glas C.A.W., Verhelst N.D.* Testing the Rasch model // Rasch models. – New York, 1995. – С. 69–95.
14. *Sumintono B.* Rasch Model Measurements as Tools in Assesment for Learning // 1st International Conference on Education Innovation (ICEI 2017). – Atlantis Press, 2018. – С. 38–42.
15. *Yun B.I.* A neural network approximation based on a parametric sigmoidal function // Mathematics. – 2019. – Т. 7, No. 3. – С. 262.

References

1. *Letova L.* Issledovanie kachestva testa edinogo gosudarstvennogo ekzamena po fizike s pomoshch’yu modeli Rasha // Upravlenie obrazovaniem: teoriya i praktika. – 2013. – № 3 (11). – S. 52–61.
2. *Nejman Yu.M., Hlebnikov V.A.* Vvedenie v teoriyu modelirovaniya i parametrizacii pedagogicheskih testov. – M., 2000. – 168 s.
3. *Ozherel’eva T.A.* Ocenka testirovaniya na osnove logitov // Slavyanskij forum. – 2019. – № 1 (23). – S. 32–39.
4. *Pushkareva K.A.* Kompleksnoe ocenivanie rezul’tatov obucheniya // Distancionnoe i virtual’noe obuchenie. – 2013. – № 1. – S. 99–103.

5. *Rogov I.E.* Analiz testiruyushchih modelej i sistem // Obrazovatel'nye resursy i tekhnologii. – 2019. – № 4 (29). – S. 53–60.

6. *Safiulin R.Z.* Razvitie tekhnologij testirovaniya v obrazovanii // Upravlenie obrazovaniem: teoriya i praktika. – 2015. – № 1 (17). – S. 139–149.

7. *Tymchenko E.V.* Obrabotka informacii pri svobodnom testirovanii // Distancionnoe i virtual'noe obuchenie. – 2017. – № 6 (120). – S. 153–159.

8. *Cvetkov V.Ya.* Napravleniya testirovaniya v sfere obrazovaniya // Sovremennoe dopolnitel'noe professional'noe pedagogicheskoe obrazovanie. – 2017. – № 2. – S. 72–80.

9. *Cvetkov V.Ya., Vojnova E.V.* Modifikaciya modeli Rasha dlya ocenki svobodnogo testirovaniya // Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta. – 2018. – № 1 (63). – S. 90–94.

10. *Cvetkov V.Ya., Shchennikov A.N.* Astaticheskoe upravlenie podvizhnymi ob"ektami // Slavyanskij forum. – 2019. – № 1 (23). – S. 53–59.

11. *Shchennikov A.N.* Komplementarnost' i simpleks metod // ITNOU: Informacionnye tekhnologii v nauke, obrazovanii i upravlenii. – 2019. – № 3 (13). – S. 88–95.

12. Backpropagation and the brain / T.P. Lillicrap [et al.] // Nature Reviews Neuroscience. – 2020. – T. 21, No. 6. – S. 335–346.

13. *Glas C.A.W., Verhelst N.D.* Testing the Rasch model // Rasch models. – New York, 1995. – S. 69–95.

14. *Sumintono B.* Rasch Model Measurements as Tools in Assesment for Learning // 1st International Conference on Education Innovation (ICEI 2017). – Atlantis Press, 2018. – S. 38–42.

15. *Yun B.I.* A neural network approximation based on a parametric sigmoidal function // Mathematics. – 2019. – T. 7, No. 3. – S. 262.