УДК 519.114

ПРИМЕНЕНИЕ *T*-МОДЕЛЕЙ К ИНТЕРПОЛИРОВАНИЮ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Бондаренко Леонид Николаевич[1],
кандидат технических наук, доцент,
e-mail: leobond5@mail.ru,
[1]*Московский университет им. С.Ю. Витте, филиал в г. Сергиевом Посаде, г. Сергиев Посад, Россия*

В статье предлагается новая методика интерполирования целочисленных последовательностей. Она демонстрируется на классах, интерполирующих последовательности между числами Каталана и факториалами, а также между числами Белла и факториалами. Эта методика базируется на применении T-моделей и кодов Лемера перестановок. T-модели задаются рекурсивно последовательностями числовых таблиц специального вида, что позволяет получать алгоритмы решения ряда возникающих задач. T-моделям отвечают целочисленные последовательности, а также для этих T-моделей строятся множества номеров (кодов) их элементов. По этой методике в статье вводятся классы обобщенных чисел Каталана и Белла, а также их q-аналоги. Их расширение приводит к решению задачи интерполяции последовательностей. Также находятся классы перестановок, отвечающие последовательностям и задаваемые множествами кодов Лемера. Этот подход значительно упрощает построение классов перестановок, получение которых ранее в статьях по информатике опиралось на изъятие перестановок с заданными шаблонами.

Ключевые слова: интерполяция последовательностей, *T*-модели, коды Лемера, обобщенные числа Каталана, обобщенные числа Белла, *q*-аналоги

T-MODELS APPLICATION FOR INTEGER SEQUENCES INTERPOLATION

Bondarenko L.N.[1],
PhD in Technology, Assoc. Prof.,
e-mail: leobond5@mail.ru,
[1]*Moscow Witte University, Sergiev Posad branch, Sergiev Posad, Russia*

The article proposes a new technique for interpolating integer sequences. It is demonstrated on classes interpolating sequences between Catalan numbers and factorials and between Bell numbers and factorials as well. This technique is based on T-models and Lehmer permutations codes. T-models are specified recursively by sequences of special type numerical tables. It allows us to obtain algorithms for solving a number of emerging problems. Integer sequences correspond to T-models whereas sets of numbers (codes) of their elements are also constructed for the latter. Using this technique the article introduces the classes of generalized Catalan and Bell numbers, as well as their q-analogues. Their extension leads to the sequence interpolation problem solution. We also find the permutation classes corresponding to sequences and given by sets of Lehmer codes. This approach greatly simplifies the construction of permutation classes that were previously obtained in computer science articles by means of removing the permutations with given patterns.

Keywords: sequence interpolation, T-models, Lehmer codes, generalized Catalan numbers, generalized Bell numbers, q-analogues

DOI 10.21777/2500-2112-2021-3-97-105

1. Введение

В [6] исследуется однопараметрический класс множеств перестановок степени $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, ...\}$, исключающих заданные шаблоны, а параметром класса является длина $d \geq 3$ и количество слов $(d-2)!$ следующих шаблонов:

$$\{123\};\ \{1234, 2134\};\ \{12345, 13245, 21345, 23145, 31245, 32145\}; .... .$$

Мощности множеств перестановок этого класса образуют семейство возрастающих числовых последовательностей

$$\begin{cases} 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ 429,\ 1430,\ 4862,\ 16796,\ ...\ [11, \mathrm{A}000108]; \\ 1,\ 2,\ 6,\ 22,\ 90,\ 394,\ 1806,\ 8558,\ 41586,\ 206098,\ ...\ [11, \mathrm{A}006318]; \\ 1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 114,\ 600,\ 3372,\ 19824,\ 120426,\ ...\ [11, \mathrm{A}054872]; \\ 1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ 696,\ 4440,\ 30168,\ 214200,\ ...; \\ . \end{cases} \qquad (1.1)$$

Первая строка в (1.1) соответствует множеству 123-исключающих перестановок и задает числа Каталана $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ [4], исчерпывающие сведения о которых имеются в статье с номером A000108 [11]; вторая строка – множеству 1234-, 2134-исключающих перестановок и определяет большие числа Шредера и т. д. Следовательно, (1.1) представляет интерполяцию последовательностей от чисел Каталана C_n до факториалов $n!$ при $n \in \mathbf{N}$.

Интерполяция последовательностей от чисел Белла B_n, определяемых как число всех неупорядоченных разбиений множества $\{1, 2, ..., n\}$ на блоки [3], до факториалов $n!$ изучается в [8]. Этот класс последовательностей также задается в терминах перестановок степени $n \in \mathbf{N}$, исключающих заданные шаблоны, и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} 1,\ 2,\ 5,\ 15,\ 52,\ 203,\ 877,\ 4140,\ 21147,\ 115975,\ ...\ [11, \mathrm{A}000110]; \\ 1,\ 2,\ 6,\ 22,\ 94,\ 454,\ 2430,\ 14214,\ 89918,\ 610182,\ ...\ [11, \mathrm{A}001861]; \\ 1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 114,\ 618,\ 3732,\ 24702,\ 177126,\ 1363740,\ ...\ [11, \mathrm{A}068199]; \\ 1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ 696,\ 4536,\ 32568,\ 254136,\ 2133816,\ ...\ [11, \mathrm{A}068200]; \\ 1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ 720,\ 4920,\ 37320,\ 309120,\ 2763720,\ ...\ [11, \mathrm{A}068201]; \\ . \end{cases} \qquad (1.2)$$

В [6; 8] также найдены q-аналоги рассматриваемых чисел.

Множествам 132-, 213-, 231-, 312-, 321-исключающих перестановок также соответствуют числа Каталана [4]. Поэтому существуют и другие классы множеств перестановок, отвечающих семейству (1.1). Это замечание справедливо и для семейства (1.2).

В данной работе необходимые классы множеств перестановок строятся с помощью T-моделей – последовательностей таблиц T_1, T_2, ... специального вида с элементами из $\mathbf{N}$. При этом используются коды Лемера перестановок и свойства обобщенных чисел Каталана и Белла, также определяемых с помощью T-моделей. Для q-аналогов исследуемых чисел находятся простые рекуррентные формулы и производящие функции.

В информатике при генерации перестановок, исключающих заданные шаблоны, обычно используется стек, а рекурсия, заложенная в само определение T-модели, часто позволяет находить простые рекурсивные алгоритмы для решения ряда комбинаторных задач.

2. *T*-модели и их *q*-аналоги, коды Лемера перестановок и их свойства

Различные определения, связанные с T-моделями, свойства и большое число примеров использования T-моделей имеются в [1; 2]. Поэтому отметим только необходимые сведения о T-моделях и их q-аналогах.

Определение 2.1. *T*-модель – это последовательность таблиц $T_1, T_2, \ldots$, задаваемая рекурсивно соотношением $T_{n+1} = \theta(T_n)$ и базирующаяся на тройке (S, θ, T_1) с алфавитом $S \subseteq \mathbf{N}$, отображением $\theta : s \to w$ и начальной таблицей T_1. Каждая таблица T_n состоит из элементов $s \in S$ и строк $w = \theta(s)$, являющихся монотонными словами длины $|w| = s$ над алфавитом S.

В определении (2.1) монотонные слова образованы конкатенацией неубывающих символов, а отображение θ называется регулярным, если при $s \in S$ все столбцы соответствующей ему упорядоченной по строкам таблицы также задают неубывающие последовательности.

Определение (2.1) дополняется введением при $i \geq 0$ степеней образов $\theta^i(s)$ элементов $s \in T_n$, образующих блоки *i*-го ранга таблиц T_{n+i}. При $i \geq 1$ вес $\left|\theta^i(s)\right|$ блока $\theta^i(s)$ равен числу содержащихся в нем блоков $(i-1)$-го ранга, а $\left|\theta^0(s)\right| = s$, что также позволяет задать *i*-й вес таблицы T_{n+i} [1; 2]

$$\left|T_{n+i}\right|_i = \left|\theta^i(T_n)\right| = \sum_{s \in T_n} \left|\theta^i(s)\right|, \; i \geq 0, \; n \in \mathbf{N}. \tag{2.1}$$

Таким образом, при $i \geq 0$ имеем $\left|\theta^i(s)\right| = s$, а по формуле (2.1) $\left|T_{n+i}\right|_i = \left|T_n\right|_0$. В частности, $\left|T_n\right|_0$ – сумма элементов, $\left|T_n\right|_1$ – число элементов, а $\left|T_n\right|_2$ – число строк и т.д. таблицы T_n. Веса $\left|T_1\right|_1, \left|T_2\right|_1, \ldots$ наиболее удобно рассматривать как числовую последовательность, отвечающую данной *T*-модели.

Например, *T*-модели (S, θ, T_1) с $S = \mathbf{N} - \{1\}$, $\theta : s \to (s+1)^s$ и $T_1 = (2)$, состоящей из следующей последовательности таблиц $T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots$:

$$(2), \; (33), \; \begin{pmatrix} 444 \\ 444 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 5555 & 5555 \\ 5555 & 5555 \\ 5555 & 5555 \end{pmatrix}, \; \ldots \tag{2.2}$$

отвечает числовая последовательность $1!, 2!, 3!, 4!, \ldots$, являющаяся предельной в классах (1.1) и (1.2), причем $\left|T_4\right|_0 = 5!$, $\left|T_4\right|_1 = 4!$, $\left|T_4\right|_2 = 3!$, $\left|T_4\right|_3 = 2!$, $\left|T_4\right|_4 = 1!$.

Для *T*-модели числовая последовательность обычно строится на базе производящего многочлена $\sum_{s \in T_n} t^s$, получаемого по определению (2.1) с помощью простого тождества $\theta(t^s) = \sum_{i=1}^{s} t^{w_i}$, при $\theta : s \to w$, где слово $w = w_1 \ldots w_s$. Это построение упрощается за счет введения модифицированного производящего многочлена $U_n(t)$, для которого $U(1) = \sum_{s \in T_n} 1 = \left|T_n\right|_1$. Например, для *T*-модели (2.2) имеем $U_1(t) = 1$, $U_2(t) = 2!t$, $U_3(t) = 3!t^2$, $U_4(t) = 4!t^3$, ...

Понятие блоков *i*-го ранга таблиц T_{n+i} упорядочивает заполнение таблиц *T*-модели и позволяет задать лексикографическую нумерацию их элементов, а также ввести частичный порядок на множестве номеров L_n элементов таблицы T_n и $T(q)$-модели, состоящие из таблиц $T_n(q)$, где $0 < q \leq 1$ [1; 2].

Определение 2.2. а) При $n \in \mathbf{N}$ множество L_n таблицы T_n задается рекурсивно: для $s > 1$ в $T_1 = (s)$ его номер $\nu = 1$; если $\nu = \nu_1 \ldots \nu_n$ номер $s \in T_n$, то номер $s' \in T_{n+1}$ равен $\nu\nu_{n+1}$, где ν_{n+1} порядковый номер элемента s' в строке $\theta(s)$.

б) Положим, что номер $\nu' \in L_n$ покрывает $\nu \in L_n$, если вектор $\nu' - \nu$ имеет все нулевые координаты, кроме одной, равной единице.

в) Элементами таблиц $T_n(q)$ служат $q^{\rho(\nu)}$, где $\rho(\nu) = \sum_{i=1}^{n} (\nu_i - 1)$ – ранговая функция [3], которая существует, так как при регулярном θ частично упорядоченное множество L_n является дистрибутивной решеткой [1], а $H_n(q) = \sum_{\nu \in L_n} q^{\rho(\nu)}$ – производящие многочлены $T_n(q)$ и $H_n(1) = \sum_{\nu \in L_n} 1 = \left|T_n\right|_1$.

Так, для таблицы T_3 в (2.2) $L_3 = \{111, 112, 113, 121, 122, 123\}$, $T_3(q) = \begin{pmatrix} q^0 \, q^1 \, q^2 \\ q^1 \, q^2 \, q^3 \end{pmatrix}$, а $H_1(q) = [1]_q!$, $H_2(q) = [2]_q!$, $H_3(q) = [3]_q!$, $H_4(q) = [4]_q!$, где $[n]_q = \dfrac{1-q^n}{1-q}$ – *q*-аналог числа $n \in \mathbf{N}$, причем $\lim\limits_{q \to 1} [n]_q = n$ и $[n]_q! = [1]_q [2]_q \ldots [n]_q$.

При явном отображении $\varphi : L_n \to L_{n+1}$ нахождение q-аналогов $H_n(q)$ числовой последовательности, отвечающей T-модели, упрощается.

Определение 2.3. Пусть P_n – множество всех перестановок символов $\{1, 2, \ldots, n\}$. По аналогии с [5] преобразованием Лемера $\mathbf{l}$ перестановки $\pi = \pi_1 \ldots \pi_n \in P_n$ назовем слово $\mathbf{l}\pi = \mathbf{l}\pi_1 \ldots \mathbf{l}\pi_n$, где $\mathbf{l}\pi_i = \#\{j : \pi_j < \pi_i,\ 0 \le j \le i-1,\ \pi_0 = 0\}$.

Теорема 2.1. а) Восстановление $\pi \in P_n$ по ее коду Лемера $\mathbf{l}\pi$ и ключу $\kappa = 1 \ldots n$ длины $|\kappa| = n$ реализуется следующим алгоритмом: на k-м его шаге, где $k = 1, \ldots, n$, символу π_{n-k+1} присваивается буква ключа κ с номером $\mathbf{l}\pi_{n-k+1}$, а затем она удаляется из κ, и новый ключ κ имеет длину $|\kappa| = n-k$.

б) Для T-модели (2.2) имеем $\mathbf{l}P_n = L_n$.

Доказательство. Из определения (2.3) следует совпадение индекса символа n в перестановке $\pi \in P_n$ с кодом Лемера этого символа, что влечет справедливость утверждения а) теоремы. Для T-модели (2.2) по индукции несложно показать, что множество номеров L_{n+1} строится из L_n путем вставки на i-е место между буквами каждого слова $0\nu_1 \ldots \nu_n 0 \in L_n$ индекса $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Поэтому равенство $|L_n| = |P_n| = n!$ доказывает утверждение б) теоремы.

Простую взаимосвязь между q-многочленами, вводимыми с помощью инверсий перестановок, и q-многочленами, получаемыми на базе ранговой функции определения 2.2, в), устанавливает равенство $\mathrm{inv}(\pi) + \rho(\mathbf{l}\pi) = \binom{n}{2}$, $\pi \in P_n$, где $\mathrm{inv}(\pi) = \#\{(i, j) : \pi_i > \pi_j,\ 0 \le i < j \le n\}$ – число инверсий перестановки $\pi \in P_n$ [1], являющееся следствием теоремы 2.1 для T-модели (2.2).

3. Интерполяция числовых последовательностей между C_n и $n!$

Для значений параметра $m \in \mathbf{N}$ исследуем семейство возрастающих последовательностей, образованное числами

$$C_n^{(m)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m^k \binom{n}{k} \binom{n}{k+1}, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{3.1}$$

которые можно рассматривать как обобщенные числа Каталана, так как при $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$ последовательности чисел (3.1) имеют вид

$$\begin{cases} 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ 429,\ 1430,\ 4862,\ 16796,\ \ldots\ [11, \mathrm{A}000108]; \\ 1,\ 3,\ 11,\ 45,\ 197,\ 903,\ 4279,\ 20793,\ 103049,\ 518859,\ \ldots\ [11, \mathrm{A}001003]; \\ 1,\ 4,\ 19,\ 100,\ 562,\ 3304,\ 20071,\ 124996,\ 793774,\ \ldots\ [11, \mathrm{A}007564]; \\ 1,\ 5,\ 29,\ 185,\ 1257,\ 8925,\ 65445,\ 491825,\ 3768209,\ \ldots\ [11, \mathrm{A}059231]; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{3.2}$$

т.е. строки в (3.2) последовательно нумеруются значениями параметра m, а соответствующая последовательность семейства (1.1) является объединением начального отрезка $1!,\ 2!,\ \ldots,\ (m-1)!$ (при $m = 1$ полагаем $0! = 0$) и m-й строки из (3.2), умноженной на $m!$.

Это непосредственно обосновывается с помощью T-моделей.

Теорема 3.1. В однопараметрическом классе T-моделей $(S^{(m)}, \theta_m, T_1^{(m)})$ с $S^{(m)} = \mathbf{N} - \{1, \ldots, m\}$, $\theta_m : s \to (m+1)(m+2) \ldots s\,(s+1)^m$, $T_1^{(m)} = (m+1)$ и $T_{n+1}^{(m)} = \theta_m(T_n^{(m)})$ фиксированному $m \in \mathbf{N}$ отвечает последовательность (3.1), так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| T_{n+1}^{(m)} \right|_1 u^n = \frac{1 - (m+1)u - \sqrt{(1-(m+1)u)^2 - 4mu^2}}{2mu^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}^{(m)} u^n. \tag{3.3}$$

Доказательство. Для деленного на t^{m+1} производящего многочлена таблицы $T_n^{(m)}$, равного $U_n^{(m)}(t)$, имеем $U_n^{(m)}(1) = \left| T_n^{(m)} \right|_1$. Применение соотношения $\theta_m(t^s) = t^{m+1}(1-t)^{-1}(1-t^{s-m}) + m\,t^{s+1}$ приводит к рекуррентной формуле

$$U_1^{(m)}(t) = 1,\ \ (1-t)\,U_{n+1}^{(m)}(t) + t\,(mt - m + 1)\,U_n^{(m)}(t) = U_n^{(m)}(1),\ \ n \in \mathbf{N}\,, \tag{3.4}$$

от которой несложно перейти к производящей функции

$$F^{(m)}(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}^{(m)}(t)\,u^n = \frac{1 - t + u\,F^{(m)}(1,u)}{1 - t + t\,(mt - m + 1)\,u}. \tag{3.5}$$

Так как при замене t на корень уравнения $F^{(m)}(1,u) = t\,(mt - m + 1)$ правая часть (3.5) имеет неопределенность вида $0/0$, то, исключая t в знаменателе, получим для $F^{(m)}(1,u)$ уравнение

$$m\,u^2 F^{(m)}(1,u)^2 - (1 - (m+1)\,u)\,F^{(m)}(1,u) + 1 = 0, \tag{3.6}$$

решение которого дает (3.3). *Доказательство закончено.*

Однопараметрический класс T-моделей $\left(\overline{S}^{(m)},\ \overline{\theta}_m,\ \overline{T}_1^{(m)}\right)$ с $\overline{S}^{(m)} = \mathbf{N} - \{1\}$, $\overline{\theta}_m : s \to (\min(m,s)+1)$ $(\min(m,s)+2)\ldots s\,(s+1)^{\min(m,s)-1}$, $\overline{T}_1^{(m)} = (2)$ и $\overline{T}_{n+1}^{(m)} = \theta_m\left(\overline{T}_n^{(m)}\right)$, является расширением класса теоремы 3.1. Поэтому рассуждения, подобные используемым в доказательстве теоремы 3.1, позволяют выразить соответствующие этому классу многочлены $\overline{U}_n^{(m)}(t)$ через многочлены из (3.4)

$$\overline{U}_n^{(m)}(t) = \begin{cases} n!\,t^{n-1}, & \text{если } n = 1,2,\ldots,m-1, \\ m!\,t^{m-1}U_{n-m+1}(t), & \text{если } n \ge m. \end{cases} \tag{3.7}$$

Следовательно, полагая в (3.7) $t = 1$, получаем отмеченную выше связь между рассматриваемыми семействами (1.1) и (3.2).

Для класса T-моделей $(S^{(m)},\ \theta_m,\ T_1^{(m)})$ теоремы 3.1 построим простой алгоритм генерации множеств номеров $L_n^{(m)}$ элементов таблиц $T_n^{(m)}$, разбивая $L_n^{(m)}$ на подмножества номеров $L_{n,k}^{(m)}$, оканчивающихся на символ $k = 1,\ldots,n+m-1$.

Теорема 3.2. При фиксированном $m \in \mathbf{N}$ положим $L_1^{(m)} = L_{1,1}^{(m)} = \{1\}$. Тогда при $n \in \mathbf{N}$ новые подмножества номеров $L_{n+1,k}^{(m)}$ строятся из подмножеств $L_{n,k}^{(m)}$ следующим образом: а) для $k = 1,\ldots,m+1$ подмножества $L_{n+1,k}^{(m)}$ составляются из всех слов подмножеств $L_{n,j}^{(m)}$, где $j = 1,\ldots,n+m-1$, добавлением к ним суффикса k; б) для $k = 1,\ldots,n-1$ подмножества $L_{n+1,m+k+1}^{(m)}$ составляются из всех номеров $\nu = \nu_1\ldots\nu_{n-1}\,j \in L_{n,j}^{(m)}$ с $j = k+1,\ldots,n+m-1$, для которых $\nu_{n-1} \ge k$, добавлением к ним суффикса $m+k+1$.

Доказательство. При $m = 1$ явное отображение $\varphi : L_n^{(m)} \to L_{n+1}^{(m)}$ легко строится по индукции на основе определения (2.2): если слово $\nu_1\ldots\nu_n \in L_n^{(1)}$, то номера $\nu_1\ldots\nu_n\,k \in L_{n+1}^{(1)}$, где $k = 1,\ldots,\nu_n+1$. Это построение несложно преобразовать в алгоритм теоремы 3.2, в котором уже используются две последние буквы слов $\nu \in L_n^{(1)}$. Случай $m = 1$ переносится на любое $m \in \mathbf{N}$ анализом построения подмножеств $L_{n+1,k}^{(m)}$ на базе слов из $L_{n,j}^{(m)}$. *Доказательство закончено.*

Следует отметить, что множество номеров $L_n^{(1)}$ совпадает с множеством кодов Лемера 213-избегающих перестановок степени n [1],

Теоремы 3.1 и 3.2 позволяют получить q-аналоги $C_n^{(m)}(q)$ чисел (3.1) для чего удобно продолжить последовательность (3.1), полагая $C_0^{(m)} = 1$.

Теорема 3.3. Функция $G^{(m)}(q,u) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(m)}(q)\,u^n$ определяется уравнением

$$[m]_q\,u^2 G^{(m)}(q,u)\,G^{(m)}(q,qu) - \left(1 + [m-1]_q\,qu\right)G^{(m)}(q,u) + 1 = 0, \tag{3.8}$$

а q-числа $C_n^{(m)}(q)$ вычисляются по рекуррентной формуле

$$C_0^{(m)}(q) = C_1^{(m)}(q) = 1,\ \ C_{n+1}^{(m)}(q) = [m]_q \sum_{i=0}^{n} q^i C_i^{(m)}(q)\,C_{n-i}^{(m)}(q) - q\,[m-1]_q\,C_n^{(m)}(q),\ \ n \in \mathbf{N}\,. \tag{3.9}$$

Доказательство. Используя замену $F_0^{(m)}(1,u) = 1 + u\,F^{(m)}(1,u)$ и выражение (3.6), получим для производящей функции $F_0^{(m)}(1,u)$ уравнение

$$m\,u^2 F_0^{(m)}(1,u)^2 - (1 + (m-1)\,u) F_0^{(m)}(1,u) + 1 = 0\,,$$

q-аналогом которого является (3.8), а рекуррентное соотношение (3.9) для $C_n^{(m)}(q)$ сразу получается из уравнения (3.8). *Доказательство закончено*.

При $m = 1$ формулы (3.8) и (3.9) имеются в [4], а из (3.8) при $m \in \mathbf{N}$ для производящей функции $G^{(m)}(q,u)$ несложно получить непрерывную дробь.

На базе доказанных выше результатов строится однопараметрический класс множеств $P_n^{(m)}$ перестановок степени *n*, а мощности $\left|P_n^{(m)}\right|$, при $m,n \in \mathbf{N}$ образуют семейство (1.1). Для фиксированного *m* имеем $P_n^{(m)} = P_n$ при $n \le m$ и $P_n^{(m)} \subset P_n$ при $n > m$. Также для чисел семейства (1.1) находятся их q-аналоги.

Следствие 3.1. а) Для расширенного класса *T*-моделей $\left(\overline{S}^{(m)},\ \overline{\theta}_m,\ \overline{T}_1^{(m)}\right)$ множества номеров $\overline{L}_n^{(m)} = \mathbf{l}P_n^{(m)}$, и при $n > m$ для каждого номера $\nu_1 \ldots \nu_{n-m+1} \in L_{n-m+1}^{(m)}$ строятся $m!$ слов $\overline{L}_n^{(m)}$ путем удаления из него префикса $\nu_1 = 1$, а затем приписывания слева к оставшемуся слову $m!$ кодов Лемера из множества $\mathbf{l}P_m$.

б) При фиксированном *m* q-аналоги $\overline{C}_n^{(m)}(q)$ чисел семейства (1.1) определяются выражением

$$\overline{C}_n^{(m)}(q) = \begin{cases} [n]_q\,!, & \text{если } n = 1,2,\ldots,m-1, \\ [m]_q\,!\,C_{n-m+1}^{(m)}(q), & \text{если } n \ge m. \end{cases}$$

Доказательство. Определение класса $\left(\overline{S}^{(m)},\ \overline{\theta}_m,\ \overline{T}_1^{(m)}\right)$ и формула (3.7) сразу приводят к требуемым результатам. *Доказательство закончено*.

4. Интерполяция числовых последовательностей между B_n и $n!$

Аналогично разделу 3 классу последовательностей (1.2) сопоставляются при $m = 1,2,3,4,\ldots$ последовательности чисел

$$\begin{cases} 1,\ 2,\ 5,\ 15,\ 52,\ 203,\ 877,\ 4140,\ 21147,\ 115975,\ \ldots\ [11, \text{A000110}]; \\ 1,\ 3,\ 11,\ 47,\ 227,\ 1215,\ 7107,\ 44959,\ 305091,\ \ldots\ [11, \text{A035009}]; \\ 1,\ 4,\ 19,\ 103,\ 622,\ 4117,\ 29521,\ 227290,\ 1865881,\ \ldots\ [11, \text{A078940}]; \\ 1,\ 5,\ 29,\ 189,\ 1357,\ 10589,\ 88909,\ 797085,\ 7583373,\ \ldots\ [11, \text{A078945}]; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{4.1}$$

и исследуется класс *T*-моделей, отвечающий семейству (4.1).

Теорема 4.1. В классе *T*-моделей $(S^{(m)},\ \theta_m,\ T_1^{(m)})$ с $S^{(m)} = \mathbf{N} - \{1,\ldots,m\}$, $\theta_m : s \to s^{s-m}(s+1)^m$, $T_1^{(m)} = (m+1)$ и $T_{n+1}^{(m)} = \theta_m(T_n^{(m)})$ фиксированному $m \in \mathbf{N}$ отвечает при $n \in \mathbf{N}$ последовательность (4.1), так как $\left|\,T_n^{(m)}\right|_1 = B_n^{(m)}$, где обобщенные числа Белла $B_n^{(m)}$ образуют семейство (4.1) и определяются соотношением

$$B_1^{(m)} = 1,\ \ B_{n+1}^{(m)} = 1 + m\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} B_n^{(m)}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Для деленного на t^m производящего многочлена таблицы $T_n^{(m)}$, равного $E_n^{(m)}(t)$, имеем $E_n^{(m)}(1) = \left|\,T_n^{(m)}\right|_1$. Применение соотношения $\theta_m(t^s) = (s-m)\,t^s + m\,t^{s+1}$ приводит к рекуррентной формуле

$$E_1^{(m)}(t) = t,\ \ E_{n+1}^{(m)}(t) = t\left(mE_n^{(m)}(t) + \frac{d}{dt}E_n^{(m)}(t)\right),\ \ n \in \mathbf{N}\,, \tag{4.3}$$

от которой несложно перейти к экспоненциальной производящей функции

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n^{(m)}(t)\frac{u^n}{n!} = \frac{1}{m}\left(e^{mt(e^u-1)} - 1\right). \tag{4.4}$$

Соотношения (4.3) и (4.4) показывает, что $E_n^{(m)}(t)$ являются обобщением экспоненциальных многочленов [4], а их коэффициенты – обобщением чисел Стирлинга второго рода [3]. Так как $E_n^{(m)}(1) = B_n^{(m)}$, то из (4.4) с помощью дифференцирования находится (4.2). *Доказательство закончено.*

Однопараметрический класс T-моделей $\left(\overline{S}^{(m)},\ \overline{\theta}_m,\ \overline{T}_1^{(m)}\right)$ с $\overline{S}^{(m)} = \mathbf{N} - \{1\}$, $\overline{\theta}_m : s \to s^{s-m}(s+1)^{\min(m,s)}$, $\overline{T}_1^{(m)} = (2)$ и $\overline{T}_{n+1}^{(m)} = \theta_m\left(\overline{T}_n^{(m)}\right)$, является расширением класса теоремы 4.1. Поэтому несложно выразить соответствующие этому классу многочлены $\overline{E}_n^{(m)}(t)$ через многочлены из (4.3)

$$\overline{E}_n^{(m)}(t) = \begin{cases} n!\,t^n, & \text{если } n = 1, 2, \ldots, m-1, \\ m!\,t^m E_{n-m+1}(t), & \text{если } n \ge m. \end{cases} \tag{4.5}$$

Следовательно, связь между рассматриваемыми семействами (1.2) и (4.1) устанавливается с помощью (4.5), при $t = 1$,

Для класса T-моделей $(S^{(m)},\ \theta_m,\ T_1^{(m)})$ теоремы 4.1 можно построить алгоритм генерации множеств номеров $L_n^{(m)}$ элементов таблиц $T_n^{(m)}$, разбивая $L_n^{(m)}$ на подмножества номеров $L_{n,k}^{(m)}$, в которых все слова имеют максимальный символ, равный $k = 1, \ldots, n+m-1$.

Теорема 4.2. При фиксированном $m \in \mathbf{N}$ и $n = 1, 2, 3$ множества $L_{n,k}^{(m)}$ легко находятся с помощью определения (2.2). При $n \ge 3$ новые подмножества номеров $L_{n+1,k}^{(m)}$ строятся из $L_{n,k}^{(m)}$ следующим образом: а) для $k = 1, \ldots, m+1$ подмножества $L_{n+1,k}^{(m)}$ составляются из всех слов подмножеств $L_{n,j}^{(m)}$, где $j = 1, \ldots, k-1$, добавлением к ним суффикса k и всех слов множества $L_{n,k}^{(m)}$, каждое из которых заменяется на k слов путем добавления суффикса $j = 1, \ldots, k$; б) для $k = m+2, \ldots, n+m$ подмножества $L_{n+1,k}^{(m)}$ составляются из всех слов подмножеств $L_{n,j}^{(m)}$, где $j = k-m, \ldots, k-1$, добавлением к ним суффикса k и использованием множества $L_{n,k}^{(m)}$, при $k = m+2, \ldots, n+m-1$ также, как и в п. а). В этом случае при $k > m+2$ требуется еще удаление лишних слов, для чего можно использовать подмножества $L_{n-1,j}^{(m)}$, где $j = k-m-2, \ldots, k-3$. Подробности удаления лишних слов не описываются, так как уже имеется алгоритм определения (2.2).

Доказательство. При $m = 1$ отображение $\varphi : L_n^{(m)} \to L_{n+1}^{(m)}$ легко строится по индукции на основе определения (2.2): если слово $\nu_1 \ldots \nu_n \in L_n^{(1)}$, то номера $\nu_1 \ldots \nu_n k \in L_{n+1}^{(1)}$, где $k = 1, \ldots, \mu+1$, а $\mu = \max(\nu_1, \ldots, \nu_n)$. Это построение преобразуется в алгоритм теоремы 4.2, причем в п. б) не требуется удаления лишних слов. Случай $m = 1$ переносится на любое $m \in \mathbf{N}$ анализом построения подмножеств $L_{n+1,k}^{(m)}$ на базе слов из $L_{n,j}^{(m)}$. *Доказательство закончено.*

Следует отметить, что множество номеров $L_n^{(1)}$ совпадает с множеством слов ограниченного роста (RG-слов), рассматриваемых в [7, 9, 10] в связи с упорядоченными разбиениями множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на k блоков и числами Стирлинга второго рода, а также являющихся кодами Лемера соответствующих перестановок степени n [1].

Теоремы 4.1 и 4.2 позволяют получить q-аналоги $B_n^{(m)}(q)$ чисел (4.1).

Теорема 4.3. q-числа $B_n^{(m)}(q)$ вычисляются по рекуррентной формуле

$$B_1^{(m)}(q) = 1,\ \ B_{n+1}^{(m)}(q) = 1 + [m]_q \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q^i B_k^{(m)},\ \ n \in \mathbf{N} \tag{4.6}$$

Доказательство. Соотношение (4.6) для $B_n^{(m)}(q)$ является q-аналогом формулы (4.2). *Доказательство закончено*.

Отметим, что несложно также получить q-аналог экспоненциальной производящей функции (4.4) при $t = 1$.

На базе доказанных выше результатов строится однопараметрический класс множеств $P_n^{(m)}$ перестановок степени n, а мощности $\left|P_n^{(m)}\right|$ при $m, n \in \mathbf{N}$ образуют семейство (1.2). Для фиксированного m имеем $P_n^{(m)} = P_n$ при $n \le m$ и $P_n^{(m)} \subset P_n$ при $n > m$. Также для чисел семейства (1.2) находятся их q-аналоги.

Следствие 4.1. а) Для расширенного класса T-моделей $\left(\overline{S}^{(m)}, \overline{\theta}_m, \overline{T}_1^{(m)}\right)$ множества номеров $\overline{L}_n^{(m)} = \mathbf{l}P_n^{(m)}$, и при $n > m$ для каждого номера $\nu_1 \ldots \nu_{n-m+1} \in L_{n-m+1}^{(m)}$ строятся $m!$ слов $\overline{L}_n^{(m)}$ путем удаления из него префикса $\nu_1 = 1$, а затем приписывания слева к оставшемуся слову $m!$ кодов Лемера из множества $\mathbf{l}P_m$.

б) При фиксированном m q-аналоги $\overline{B}_n^{(m)}(q)$ чисел семейства (1.2) определяются выражением

$$\overline{B}_n^{(m)}(q) = \begin{cases} [n]_q\,!, & \text{если } n = 1, 2, \ldots, m-1, \\ [m]_q\,!\, B_{n-m+1}^{(m)}(q), & \text{если } n \ge m. \end{cases}$$

Доказательство. Определение класса $\left(\overline{S}^{(m)}, \overline{\theta}_m, \overline{T}_1^{(m)}\right)$ и формула (4.5) сразу приводят к требуемым результатам. *Доказательство закончено*.

Заключение

Полученные в разделах 3 и 4 результаты показывают достоинства применяемой методики, основанной на применении T-моделей и кодов Лемера перестановок к интерполяции целочисленных последовательностей.

Следует подчеркнуть, что классы перестановок, соответствующие семействам последовательностей (1.1) и (1.2) отличаются от семейств, рассматриваемых в работах [6; 8], а найденные q-аналоги этих семейств описываются простыми соотношениями. Построенные алгоритмы генерации этих классов реализуются на компьютере достаточно эффективно, а разработанная методика интерполяции целочисленных последовательностей может быть использована также для решения других аналогичных задач.

Список литературы

1. *Бондаренко, Л.Н.* Модели комбинаторного анализа: монография. – Москва: изд. «МУ им. С.Ю. Витте», 2019. – 248 с.

2. *Бондаренко, Л.Н. Систематизация* комбинаторных последовательностей с использованием T-моделей и T-диаграмм // Образовательные ресурсы и технологии. (Электронный научный журнал). – 2020. – № 2 (31). – С. 58–68.

3. *Стенли, Р.* Перечислительная комбинаторика / перевод с английского. – Т. 1. – Москва: Мир, 1990. – 440 с.

4. *Стенли, Р.* Перечислительная комбинаторика / перевод с английского. – Т. 2. – Москва: Мир, 2009. – 768 с.

5. *Фоата, Д.* Распределения типа Эйлера и Макмагона на группе перестановок // Проблемы комбинаторного анализа: сб. статей / перевод с английского. – Москва: Мир, 1980. – С. 120–141.

6. *Barcucci E., Del Lungo A., Pergola E., Pinzani R.* Permutations avoiding an increasing number of length – increasing forbidden subsequences // Discrete mathematics and theoretical computer science. – 2000. – No. 4. – P. 31–44.

7. *Cai Y., Readdy M.A.* q-Stirling numbers: A new view // Advances in applied mathematics. – 2017. – Vol. 86. – P. 50–80.

8. *Labelle G., Leroux P., Pergola E., Pinzani R.* Stirling numbers interpolation using permutations with forbidden subsequences // Discrete mathematics. – 2002. No. 1–3. – Vol. 246. – P. 177–195.

9. *Milne, S.* Restricted growth functions and incidence relations of the lattice of partitions of an *n*-set // Journal advances in mathematics. – 1977. – Vol. 26. – P. 290–305.
10. *Milne, S.* Restricted growth functions, rank row matchings of partition lattices, and *q*-Stirling numbers // Journal advances in mathematics. – 1982. – Vol. 43. – P. 173–196.
11. *Sloane, N.J.A.* The on-line encyclopedia of integer sequences. – 2021. – URL: http://oeis.org.

References

1. *Bondarenko, L.N.* Modeli kombinatornogo analiza: monografiya. – Moskva: izd. «MU im. S.Yu. Vitte», 2019. – 248 s.
2. *Bondarenko, L.N.* Sistematizaciya kombinatornyh posledovatel'nostej s ispol'zovaniem T-modelej i T-diagramm // Obrazovatel'nye resursy i tekhnologii. (Elektronnyj nauchnyj zhurnal). – 2020. – № 2 (31). – S. 58–68.
3. *Stenli, R.* Perechislitel'naya kombinatorika / perevod s anglijskogo. – T. 1. – Moskva: Mir, 1990. – 440 s.
4. *Stenli, R.* Perechislitel'naya kombinatorika / perevod s anglijskogo. – T. 2. – Moskva: Mir, 2009. – 768 s.
5. *Foata, D.* Raspredeleniya tipa Ejlera i Makmagona na gruppe perestanovok // Problemy kombinatornogo analiza: sb. statej / perevod s anglijskogo. – Moskva: Mir, 1980. – S. 120–141.
6. *Barcucci E., Del Lungo A., Pergola E., Pinzani R.* Permutations avoiding an increasing number of length – increasing forbidden subsequences // Discrete mathematics and theoretical computer science. – 2000. – No. 4. – P. 31–44.
7. *Cai Y.,* Readdy M.A. q-Stirling numbers: A new view // Advances in applied mathematics. – 2017. – Vol. 86. – P. 50–80.
8. *Labelle G., Leroux P., Pergola E., Pinzani R.* Stirling numbers interpolation using permutations with forbidden subsequences // Discrete mathematics. – 2002. No. 1–3. – Vol. 246. – P. 177–195.
9. *Milne, S.* Restricted growth functions and incidence relations of the lattice of partitions of an n-set // Journal advances in mathematics. – 1977. – Vol. 26. – P. 290–305.
10. *Milne, S.* Restricted growth functions, rank row matchings of partition lattices, and q-Stirling numbers // Journal advances in mathematics. – 1982. – Vol. 43. – P. 173–196.
11. *Sloane, N.J.A.* The on-line encyclopedia of integer sequences. – 2021. – URL: http://oeis.org.