УДК 519.11

# СИСТЕМАТИЗАЦИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ T-МОДЕЛЕЙ И T-ДИАГРАММ

**Бондаренко Леонид Николаевич,**
*канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой гуманитарных и естественнонаучных дисциплин,*
*e-mail: leobond5@mail.ru,*
*Московский университет им. С.Ю. Витте, филиал в г. Сергиевом Посаде, Россия*

*Для систематизации комбинаторных последовательностей, а также связанных с ними двухиндексных последовательностей применяются T-модели и T-диаграммы. T-модели представляют собой последовательности числовых таблиц своеобразного вида, а T-диаграммы являются диаграммами Хассе, строящимися на основе этих таблиц. Задание T-модели набором алфавита, специального отображения и начальной таблицы позволяет с помощью введения параметров легко получать классы T-моделей и T-диаграмм. Сравнение этих классов по виду специального отображения дает возможность строить их систематизацию. В качестве примера в статье приведена систематизация классов степеней, обобщенных факториалов, обобщенных чисел Фибоначчи, Каталана и чисел Белла, а также отмечены некоторые другие, просто систематизируемые этим методом классы обобщенных чисел.*

**Ключевые слова:** систематизация, классификация, комбинаторная последовательность, T-модель, посет, T-диаграмма, производящая функция

# SYSTEMATIZATION OF COMBINATOR SEQUENCES USING T-MODELS AND T-DIAGRAMS

**Bondarenko L.N.,**
*candidate of engineering sciences, Associate Professor, head of the sub-department of humanities and natural science disciplines,*
*leobond5@mail.ru,*
*Moscow Witte University, a branch in the city of Sergiev Posad, Russia*

*To systematize combinatorial sequences, as well as the associated to them two-index sequences, T-models and T-diagrams are used. T-models are sequences of numerical tables of a peculiar kind, and T-diagrams are Hasse diagrams based on these tables. Defining the T-model with a set of alphabet, special mapping, and initial table makes it easy to obtain classes of T-models and T-diagrams by introducing parameters. Comparison of these classes by the type of special mapping makes it possible to construct their systematization. As an example, the article gives a systematization of classes of degrees, generalized factorials, generalized Fibonacci numbers, Catalan numbers and Bell numbers, as well as some other classes of generalized numbers that are simply systematized by this method.*

**Keywords:** Systematization, classification, combinatorial sequence, T-model, poset, T-diagram, generating function

**DOI 10.21777/2500-2112-2020-2-58-68**

## Введение

Задачи перечисления различных объектов часто встречаются в химии, физике, информатике и т.п. Рассмотрение этих задач методами перечислительной комбинаторики привело к возникновению огромного числа целочисленных последовательностей. Многие из них можно найти в уникальной «The on-line encyclopedia of integer sequences» (OEIS) [1], которая в настоящее время содержит более 330000 статей по числовым последовательностям, встречающимся в комбинаторике, теории графов и т.д.

Возрастающие последовательности целых положительных чисел из [1] естественно называть комбинаторными последовательностями. Большой объем содержащихся в OEIS данных, несмотря на ее прекрасный интерфейс, не всегда позволяет обнаруживать различные существенные связи между такими последовательностями.

Эта проблема только усугубляется многочисленными возможностями построения на базе одной комбинаторной последовательности ряда связанных с ней двухиндексных последовательностей. Многие из таких последовательностей можно также найти в OEIS, а важной областью их применения является, в частности, математическая статистика.

Хотя бы частичному решению этой проблемы может способствовать подходящая систематизация ряда комбинаторных последовательностей и связанных с ними важнейших двухиндексных последовательностей. Трудности систематизации в комбинаторике хорошо известны и превосходно отмечены в предисловии к книге [2].

В фундаментальных трудах по перечислительной комбинаторике, например, [3–5] в качестве инструмента описания комбинаторных последовательностей особо выделяются производящие функции. Наряду с ними используются соответствующие задачи перечисления заданных перестановок и разбиений множеств, матриц, деревьев и т.п., а также рекуррентные соотношения, решетки и многое другое.

Поэтому в каждой статье OEIS, обозначаемой буквой A с шестизначным номером, имеются комментарии по задачам, связанным с рассматриваемой последовательностью, ссылки на источники, а также номера других близких по тематике статей OEIS и основные формулы, включающие производящие функции, рекуррентные соотношения и т.д.

Таким образом, по данной статье OEIS обычно нелегко выделить класс, состоящий из аналогичных комбинаторных последовательностей, а также классы соответствующих двухиндексных последовательностей, определенное упорядочение которых и приводит к требуемой систематизации.

Рассматривая различные описания комбинаторной последовательности как ее модели и выполняя некоторую параметризацию выбранной модели, можно определить класс комбинаторных последовательностей. Отметим, что параметры легко вводятся во многие производящие функции, но это является непростой задачей для ряда других моделей. Для целей систематизации выбранная модель также должна иметь простую связь с соответствующими моделями двухиндексных последовательностей, что не выполняется, например, для ряда производящих функций.

Для моделирования и классификации комбинаторных последовательностей из OEIS в [6, 7] использовались *T*-модели, представляющие собой последовательности числовых таблиц определенного вида. В эти модели легко вводятся параметры, и они имеют простую связь с многими двухиндексными последовательностями. Основными методами систематизации комбинаторных последовательностей с помощью *T*-моделей могут служить их параметризация и введение в них определенных регулярностей.

Отметим, что из-за неустановившейся терминологии некоторые обозначения работ [6, 7] в данной статье несколько изменены.

## 1. Классы T-моделей, T-диаграмм и их свойства

*T*-модель (табличная модель) комбинаторной последовательности является последовательностью числовых таблиц $T_1, T_2, \cdots$, построенных так, что все последовательности соответствующих им числовых $i$-характеристик ($i$-х весов) для $i = 0,1,\ldots$ отвечают исходной комбинаторной последовательности с точностью до сдвига. Таким образом, каждой *T*-модели по построению соответствует одна комбинаторная последовательность, но обратное неверно, так как ей может отвечать множество *T*-моделей [6, 7].

**Определение 1.**

*T*-модель задается тройкой $(S, \theta, T_1)$, в которой $S \subseteq \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ – алфавит; $\theta : s \to j_1\, j_2 \ldots j_s$ – дискретное многозначное отображение, где символы $s, j_1, \ldots, j_s \in S$ и выполнены неравенства $1 \le j_1 \le j_2 \le \ldots \le j_s$; $T_1$ – фиксированная начальная таблица. $\theta$ отображает каждый $s \in T_n$ в числовую неубывающую последовательность (строку) $j_1\, j_2 \cdots j_s$ длины $|\theta(s)| = s$ следующей таблицы $T_{n+1}$, которая находится рекурсивно по формуле:

$$T_{n+1} = \theta(T_n), \; n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Определение 1 дополняется введением, при $i \geq 0$ блоков $i$-го ранга таблиц $T_{n+i}$, являющимися степенями образов $\theta^i(s)$ элементов $s \in T_n$, а также веса $\left|\theta^i(s)\right|$ блока $\theta^i(s)$, равного при $i \geq 1$ числу содержащихся в нем блоков $(i-1)$-го ранга и $\left|\theta^0(s)\right| = s$. Для таблицы $T_{n+i}$ с помощью (1) задается $i$-й вес:

$$\left|T_{n+i}\right|_i = \left|\theta^i(T_n)\right| = \sum_{s \in T_n} \left|\theta^i(s)\right|, \; i \geq 0, \; n \in \mathbf{N}.$$

Это приводит при $i \geq 0$ для всех $n \in \mathbf{N}$ к важному свойству инвариантности $\left|T_{n+i}\right|_i = \left|T_n\right|_0$ последовательности весов таблиц *T*-модели, причем веса $\left|T_n\right|_i$ при $n > i$ и $i = 0,1,\ldots$ равны соответственно сумме элементов, числу элементов, числу строк и т.д. таблицы $T_n$ [6, 7].

Введем двухпараметрический класс *T*-моделей с помощью параметров $m, r \in \mathbf{N}$. Для этого зададим регулярный алфавит $S^{(r)}$, у которого расстояния между соседними символами все одинаковы и равны $r$, и уменьшим произвол в выборе начальной таблицы *T*-модели, полагая $T_1^{(m,r)} = (mr+1)$.

Тогда систематизацию полученных классов *T*-моделей можно реализовать за счет выбора соответствующих отображений $\theta$, который также накладывает ограничение на выбор первого символа алфавита $S^{(r)}$.

Для примера рассмотрим отображение $\theta : s \to s^s$, дублирующее символ $s \in S^{(r)}$ ровно $s$ раз. В этом случае параметр $m$ излишен, и определение 1 задает класс *T*-моделей с односимвольным алфавитом $S^{(r)} = \{r+1\}$ и $T_1^{(r)} = (r+1)$, которому, при $n \in \mathbf{N}$ отвечает класс степеней $(r+1)^n$.

В частности, по определению 1 получим следующую последовательность таблиц

$$T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}, T_4^{(1)}, T_5^{(1)}, \ldots :$$

$$(2), \; (2\,2), \begin{pmatrix} 2\,2 \\ 2\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\,2 & 2\,2 \\ 2\,2 & 2\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\,2 & 2\,2 & 2\,2 & 2\,2 \\ 2\,2 & 2\,2 & 2\,2 & 2\,2 \end{pmatrix}, \ldots, \tag{2}$$

а суммы элементов таблиц $\left|T_n^{(1)}\right|_0$ задают последовательность $2^n$, при $n \in \mathbf{N}$.

Для каждой таблицы $T_n$ *T*-модели определения 1 двухиндексная последовательность вводится с помощью соответствующего производящего многочлена $\sum_{s \in T_n} t^s$, а простое тождество $\theta(t^s) = t^{j_1} + t^{j_2} + \ldots + t^{j_s}$ сразу дает:

$$\sum_{s \in T_{n+1}} t^s = \theta\left(\sum_{s \in T_n} t^s\right) = \sum_{s \in T_n} \theta(t^s),$$

что позволяет вычислять веса $|T_n|_1$ и $|T_n|_0$ соответственно как значения производящего многочлена и его производной при $t = 1$ [6, 7].

Для получения простого рекуррентного соотношения между такими производящими многочленами их можно модифицировать с помощью несложных преобразований (например, деление на некоторую степень $t$ или замена $t$ на $\sqrt{t}$), сохраняющих их значения при $t = 1$. Так модифицированный производящий многочлен таблицы $T_n^{(m,r)}$ двухпараметрического класса *T*-моделей будем обозначать $U_n^{(m,r)}(t)$, а его коэффициенты, при $n \in \mathbf{N}$ рассматривать как одну из основных двухиндексных последовательностей.

Подчеркнем, что нахождение значений $U_n^{(m,r)}(1)$ приводит к определению класса комбинаторных последовательностей, отвечающего рассматриваемому классу *T*-моделей. Так же отметим, что рекуррентное соотношение между многочленами $U_n^{(m,r)}(t)$ иногда позволяет определить $U_0^{(m,r)}(t)$. Так же иногда полезно использовать значение параметра $m = 0$, вводя образ $\theta(1)$.

Для класса *T*-моделей степеней $(r+1)^n$ делением на $t$ получим $U_n^{(r)}(t) = (r+1)^{n-1} t^r$, при $n \in \mathbf{N}$, что соответствует вырожденному случаю класса двухпараметрических числовых последовательностей $(r+1)^{n-1}$, при $n \in \mathbf{N}$.

При построении других двухиндексных последовательностей будем считать для простоты, что в *T*-модели определения 1 начальная таблица $T_1$ содержит только один элемент, который больше 1, и определим рекурсивно нумерацию элементов таблиц этой *T*-модели [6, 7]:

- положим номер $\nu_1$ элемента таблицы $T_1$, равным 1;

- если $n \geq 2$ и $s \in T_{n-1}$ имеет номер $\nu_1 \dots \nu_{n-1}$, то сопоставим элементу $s' \in T_n$ строки $\theta(s)$ номер (слово) $\nu = \nu_1 \dots \nu_{n-1} \nu_n$, в котором суффикс $\nu_n$ совпадает с порядковым номером из $\mathbf{N}$ элемента $s'$ в строке $\theta(s)$.

На множестве номеров $P_n$ таблицы $T_n$ задаются различные статистики, производящие многочлены которых определяют двухиндексные последовательности [7], причем в ряде случаев находится отображение $\pi$, позволяющее, при $P_1 = \{1\}$ аналогично соотношению (1) записать:

$$P_{n+1} = \pi(P_n), \;\; n \in \mathbf{N}.$$

Хотя нумерация элементов таблиц *T*-модели определения 1 сложнее нумерации элементов обычных матриц, она позволяет найти локально конечное частично упорядоченное множество (посет), соответствующее таблице $T_n$ этой модели [6, 7].

**Определение 2.**

На множестве номеров $P_n$ таблицы $T_n$, рассматриваемых как векторы, зададим частичный порядок, полагая, что номер $\nu' \in P_n$ покрывает $\nu \in P_n$, если вектор $\nu' - \nu$ имеет все нулевые координаты, кроме одной, равной единице. Диаграмму Хассе посета $P_n$ обозначим $L_n$ и назовем ее *T*-диаграммой таблицы $T_n$.

*T*-диаграмма $L_n$ таблицы $T_n$ является ориентированным графом, а введенные понятия естественно переносятся на классы *T*-моделей. В частности, по определению 2 строится *T*-диаграмма $L_5^{(1)}$ таблицы $T_5^{(1)}$ выражения (2), представляющая собой 4-х мерный булев куб, изображенный на рисунке 1.

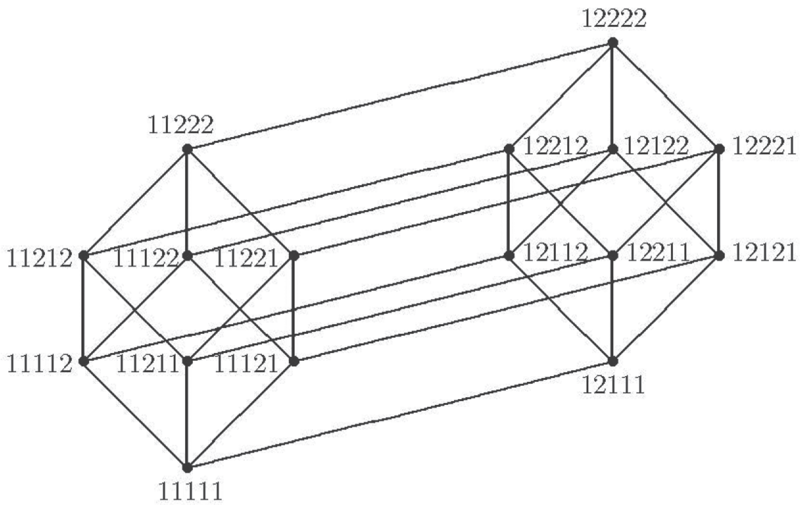


Рисунок 1 – *T*-диаграмма $L_5^{(1)}$ таблицы $T_5^{(1)}$ выражения (2)

Для получения *T*-диаграмм наиболее простого вида в [6, 7] предложено для *T*-модели определения 1 использовать регулярное отображение $\theta : s \to j_1 \, j_2 \dots j_s$, для которого все столбцы таблицы:

$$s_1 \to j_{11} \, j_{12} \dots j_{1s_1}$$
$$s_2 \to j_{21} \, j_{22} \dots j_{2s_2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

являются неубывающими числовыми последовательностями для всех символов $s_1 < s_2 < \dots$ алфавита $S$. Для этого случая в [7] доказано утверждение.

**Теорема 1.**

Для *T*-модели $(S, \theta, T_1)$ с регулярным отображением $\theta$, при $n \geq 2$ все посеты $P_n$ являются дистрибутивными решетками.

Значимость теоремы 1 состоит в том, что класс дистрибутивных решеток наиболее важен с комбинаторной точки зрения [4].

Поэтому при систематизации классов комбинаторных последовательностей с использованием соответствующих классов *T*-моделей и *T*-диаграмм целесообразно ограничиться регулярными отображениями $\theta$.

Изображение *T*-диаграммы $L_n$ таблицы $T_n$, пример которого показан на рисунке 1, позволяет ввести две важные двухиндексные последовательности, связанные с *T*-моделью определения 1.

**Определение 3.**

а) для *T*-диаграммы $L_n$ таблицы $T_n$ число ее частей, изоморфных булеву кубу размерности $k$, обозначим $R_{n,k}$ и определим:

$$R_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} R_{n,k} x^k \; ; \tag{3}$$

б) для *T*-диаграммы $L_n$ таблицы $T_n$ число ее вершин, имеющих положительную валентность (степень) $k$, обозначим $V_{n,k}$ и определим многочлен:

$$V_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} V_{n,k} x^k \, . \tag{4}$$

Справедливы равенства $R_n(-1) = 1$ [7] и $V_n(0) = 1$, из которого вытекает большая эффективность многочленов $V_n(x)$ при рассматриваемой систематизации, причем для регулярного отображения $\theta$ между многочленами (3) и (4) имеется несложная зависимость.

**Теорема 2.**

Для *T*-модели $(S, \theta, T_1)$ с регулярным отображением $\theta$ справедливо равенство:

$$R_n(x) = V_n(x+1) \cdot \tag{5}$$

*Доказательство.* Используя простую связь между коэффициентами многочленов (3) и (4) [4], находим:

$$R_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} R_{n,k} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \sum_{j=k}^{n-1} \binom{j}{k} V_{n,j} = \sum_{j=0}^{n-1} V_{n,j} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} x^k = \sum_{j=0}^{n-1} V_{n,j} (x+1)^j = V_n(x+1) \, ,$$

что и требовалось доказать (круглые скобки в формулах используются для стандартного обозначения биномиальных коэффициентов).

Из полученных результатов сразу вытекает важное следствие.

**Теорема 3.**

Для введенных двухпараметрических классов *T*-моделей многочлены $V_n^{(m,r)}(x)$ принимают следующий вид:

$$V_n^{(m,r)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} V_{n,k}^{(m)} r^k x^k \, . \tag{6}$$

В частности, для рассматриваемого примера однопараметрического класса *T*-моделей формулы (5) и (6) легко приводят к двухиндексной последовательности $V_{n,k} = \binom{n-1}{k}$, а $V_n^{(r)}(x) = (rx+1)^{n-1}$.

Таким образом, при алфавите $S^{(r)} = \{r+1\}$, отображении $\theta : s \to s^s$, где $s \in S^{(r)}$, начальной таблице $T_1^{(r)} = (r+1)$ и $n \in \mathbf{N}$ классу *T*-моделей $(S^{(r)}, \theta, T_1^{(r)})$ соответствует класс степеней $(r+1)^{n-1}$ и класс двухиндексных последовательностей $\binom{n-1}{k} r^k$, где $k = 0, 1, \ldots, n-1$, содержащие, в частности, степени двойки и обычные биномиальные коэффициенты.

Перечислим некоторые статьи OEIS, в которых рассматриваются элементы полученных классов: [1; A000079, A000244, A000302, A000351, A000400, A000420, A007318, A013609 – A013619]. Уже этот список показывает полезность рассматриваемой систематизации.

В ряде случаев можно называть классы *T*-моделей по имени отвечающих им комбинаторным последовательностям, а произвол выбора начальной таблицы в определении 1 отражает одну из трудностей систематизации комбинаторных последовательностей.

## 2. Класс обобщенных факториалов и его свойства

В качестве следующего по сложности регулярного отображения $\theta$ рассмотрим $\theta : s \to s'^{s}$, где символ $s'$ непосредственно следует за $s$ в алфавите $S^{(r)} = \{mr+1,\ (m+1)r+1, \ldots\}$, а начальная таблица $T_1^{(m,r)} = (mr+1)$.

В этом случае для двухпараметрического класса *T*-моделей легко проверить, что многочлены $U_n^{(m,r)}(t)$ удовлетворяют рекуррентному выражению:

$$U_1^{(m,r)}(t) = t^{mr},\ U_{n+1}^{(m,r)}(t) = t^r \frac{d}{dt}(t\,U_n^{(m,r)}(t)),\ n \in \mathbf{N},$$

с помощью которого для них несложно находится экспоненциальная производящая функция:

$$F^{(m,r)}(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}^{(m,r)}(t)\frac{u^n}{n!} = \frac{t^{mr}}{(1-rt^r u)^{m+\frac{1}{r}}}. \tag{7}$$

Так как $U_n^{(m,r)}(t) = (r(m+n-2)+1)!^{(r)}\, t^{r(m+n-2)}$, а $U_n^{(m,r)}(1) = (r(m+n-2)+1)!^{(r)}$, где $(r(m+n-2)+1)!^{(r)} = 1\cdot(rm+1)\cdot(r(m+1)+1)\ldots(r(m+n-2)+1)$, при $n \in \mathbf{N}$ обозначает обобщенный факториал с шагом $r$ [8], то рассматриваемому двухпараметрическому классу *T*-моделей соответствует класс обобщенных факториалов $(r(m+n-2)+1)!^{(r)}$, причем многочлены $U_n^{(m,r)}(t)$ также как и для класса степеней не определяют двухиндексной последовательности.

С помощью формулы (5) и результатов из [7] находится выражение:

$$V_n^{(m,r)}(x) = \prod_{i=1}^{n-1}((m+i-1)\,r\,x+1), \tag{8}$$

а рассмотрение коэффициентов многочленов (8) с использованием формулы (6) приводит к двухиндексной последовательности:

$$V_{n,k}^{(m)} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}^{(m)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m+j-1}{j} \begin{bmatrix} n-j-1 \\ n-k-1 \end{bmatrix} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!},\ k = 0,1,\ldots,n-1, \tag{9}$$

где квадратные скобки, как и в [9], использованы для обозначения чисел Стирлинга первого рода без учета их знака и их $m$-обобщений, а выражения (9) проверяются методом математической индукции.

Соотношение (8) позволяет получить экспоненциальную производящую функцию:

$$G^{(m,r)}(x,u) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{n+1}^{(m,r)}(x)\frac{u^n}{n!} = \frac{1}{(1-rxu)^{m+\frac{1}{rx}}}, \tag{10}$$

которую полезно сравнить с формулой (7).

Так как в (9) $V_{n,0}^{(m)} = 1$, то при фиксированном $m$ двухиндексная последовательность (9) может быть записана в виде нижней треугольной матрицы $H^{(m)}$ с единичной главной диагональю. Ее обращение приводит к $m$-обобщениям чисел Стирлинга второго рода, появляющихся в рамках рассматриваемой систематизации при определенном выборе отображения $\theta$.

Числа $V_{n,k}^{(m)}$ из (9), стоящие на диагоналях матрицы $H^{(m)}$ при фиксированном $k$ и $n \in \mathbf{N}$ определяют также двухиндексную последовательность $W_{k,j}^{(m)}$, образующуюся при записи $V_{n,k}^{(m)}$ в форме интерполяционного многочлена Ньютона следующего вида:

$$V_{n,k}^{(m)} = V_k^{(m)}(n) = \sum_{j=0}^{k} W_{k,j}^{(m)} \binom{n-1}{k+j}, \tag{11}$$

где $W_{k,j}^{(m)} = \Delta^{k+j} V_{n,k}^{(m)}$ определяет конечную разность порядка $k+j$ по $n$, причем $W_{k,k}^{(m)} = (2k-1)!^{(2)}$, а числа $W_k^{(m)} = \sum_{j=0}^{k} W_{k,j}^{(m)}$ образуют еще одну комбинаторную последовательность.

Последовательность $W_{k,j}^{(m)}$ в (11) находится по рекуррентной формуле:

$$W_{0,j}^{(m)} = \delta_{0,j},\ W_{k,j}^{(m)} = (k+j-1)W_{k-1,j-1}^{(m)} + (m+k+j-1)W_{k-1,j}^{(m)},\ k \in \mathbf{N},\ j \in \mathbf{Z}, \tag{12}$$

в которой $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера, равный 1, при $i = j$ и 0 при $i \neq j$. Для класса степеней сумма (10) вырождается в одно слагаемое, а $W_k = 1$.

Таким образом, в рассматриваемом случае классу $T$-моделей $(S^{(r)}, \theta, T_1^{(m,r)})$, при $n \in \mathbf{N}$ соответствует класс обобщенных факториалов $(r(m+n-2)+1)!^{(r)}$, а также классы двухиндексных последовательностей $\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}^{(m)} r^k$, где $k = 0,1,\ldots,n-1$, и $W_{k,j}^{(m)}$, где $j = 0,1,\ldots,k$, содержащие, в частности, обычные факториалы и числа Стирлинга первого рода.

Перечислим некоторые из статей OEIS, в которых рассматриваются элементы полученных классов: [1; A000142, A001147, A007559, A007696, A008548, A130534, A143491 – A143493, A112486, A112487, A234289].

### 3. Класс обобщенных чисел Фибоначчи и его свойства

Рассмотрим алфавит $S^{(r)} = \{r+1,\ 2r+1\}$, состоящий из двух символов. Для этого случая имеются два варианта выбора начальных таблиц: $T_1^{(1,r)} = (r+1)$ и $T_1^{(2,r)} = (2r+1)$, т.е. параметр $m = 1, 2$. Отображение $\theta$ зададим следующим образом: $\theta : s \to s^r s',\ s' \to s^r s'^{r+1}$, где $s = r+1$ и $s' = 2r+1$.

Это приводит к задаче построения двух однопараметрических классов $T$-моделей и соответствующих им $T$-диаграмм.

При $T_1^{(1,r)} = (r+1)$ для соответствующих $T$-моделей многочлены $U_n^{(1,r)}(t)$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$U_1^{(1,r)}(t) = t^r,\ U_2^{(1,r)}(t) = t^r(t^r + r),\ U_n^{(1,r)}(t) = (2r+1)U_{n-1}^{(1,r)}(t) - r^2 U_{n-2}^{(1,r)}(t),\ n \geq 3,$$

а многочлены $V_n^{(1,r)}(x)$ с помощью результатов из [7] и формулы (5) находятся при $n \in \mathbf{N}$ в следующем явном виде:

$$V_n^{(1,r)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-k-2}{k} r^k x^k .$$

Аналогично при $T_1^{(2,r)} = (2r+1)$ для соответствующих $T$-моделей многочлены $U_n^{(2,r)}(t)$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$U_1^{(2,r)}(t) = t^{2r},\ U_2^{(2,r)}(t) = t^r((r+1)t^r + r),\ U_n^{(2,r)}(t) = (2r+1)U_{n-1}^{(2,r)}(t) - r^2 U_{n-2}^{(2,r)}(t),\ n \geq 3,$$

а многочлены $V_n^{(2,r)}(x)$ с помощью результатов из [7] и формулы (5) находятся при $n \in \mathbf{N}$ в следующем явном виде:

$$V_n^{(2,r)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-k-1}{k} r^k x^k .$$

Несмотря на то, что построенные для I и II варианта классы $T$-моделей нельзя объединить в один заданием одного регулярного отображения $\theta$, полученные для них результаты допускают объединение.

Для многочленов $U_n^{(r)}(t)$, определяемых рекуррентной формулой:

$$U_1^{(r)}(t)=t^r,\ U_2^{(r)}(t)=t^{2r},\ U_n^{(r)}(t)=U_{n-1}^{(r)}(t)+rU_{n-2}^{(r)}(t),\ \ n\ge 3,$$

получаем при $n\in\mathbf{N}$ равенства $U_{2n-1}^{(r)}(t)=U_n^{(1,r)}(t),\ U_{2n}^{(r)}(t)=U_n^{(2,r)}(t)$.

Аналогично для $V_n^{(r)}(x)$, определяемых рекуррентной формулой:

$$V_1^{(r)}(x)=1,\ V_2^{(r)}(x)=1,\ V_n^{(r)}(x)=V_{n-1}^{(r)}(x)+rxV_{n-2}^{(r)}(x),\ \ n\ge 3,$$

получаем при $n\in\mathbf{N}$ равенства $V_{2n-1}^{(r)}(x)=V_n^{(1,r)}(x),\ V_{2n}^{(r)}(x)=V_n^{(2,r)}(x)$.

Для многочленов $V_n^{(r)}(\mathrm{x})$ запишем также производящую функцию:

$$G^{(r)}(x,u)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n^{(r)}(x)u^n=\frac{u}{1-u-rxu^2}.$$

По полученным результатам видно, что при $T_1^{(1,r)}=(r+1)$ и $n\in\mathbf{N}$ однопараметрический класс *T*-моделей соответствует классу обобщенных нечетных чисел Фибоначчи и двухиндексному классу последовательностей $\binom{2n-k-2}{k}r^k$, где $k=0,1,\ldots,n-1$, а при $T_1^{(2,r)}=(2r+1)$ – классу обобщенных четных чисел Фибоначчи и двухиндексному классу последовательностей $\binom{2n-k-1}{k}r^k$, где $k=0,1,\ldots,n-1$.

Перечислим некоторые статьи OEIS, в которых рассматриваются элементы полученных классов: [1; A001519, A085478, A007583, A114192, A001906, A078812, A002450, A099459, A000045, A102426, A001045].

### 4. Класс обобщенных чисел Каталана и его свойства

Рассмотрим алфавит $S^{(r)}=\{mr+1,\ (m+1)r+1,\ldots\}$, многосимвольное отображение $\theta: s\to(mr+1)^r((m+1)r+1)^r\ldots(s+(m-1)r)^r(s+mr)$ и $T_1^{(m,r)}=(mr+1)$.

В этом случае для двухпараметрического класса *T*-моделей легко проверить, что многочлены $U_n^{(m,r)}(t)$ удовлетворяют рекуррентному выражению:

$$U_0^{(m,r)}(t)=1,\ (1-t^r)U_{n+1}^{(m,r)}(t)+t^{mr}(t^r+r-1)U_n^{(m,r)}(t)=rt^{mr}U_n^{(m,r)}(1),\ \ n\in\mathbf{N} \qquad (13)$$

и могут быть записаны в следующем виде:

$$U_n^{(m,r)}(t)=t^{mr}\sum_{k=0}^{m(n-1)}U_{n,k}^{(m,r)}t^{rk},\ \ n\in\mathbf{N}.$$

Частные случаи многочленов $U_n^{(m,r)}(t)$ с помощью *T*-моделей были подробно изучены в [6, 7], что позволяет рассматривать их коэффициенты $U_{n,k}^{(m,r)}$ как обобщения известных баллотировочных чисел:

$$U_{n,k}^{(1,1)}=\frac{n-k}{n+k}\binom{n+k}{n},\ \ k=0,\ldots,n-1,\ \ n\in\mathbf{N}.$$

В [7] для рекуррентных выражений типа (13) использовался новый метод, позволяющий получать производящие функции чисел $U_n^{(m,r)}(1)$. Для применения этого метода введем обычную производящую функцию $F^{(m,r)}(t,u)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n^{(m,r)}(t)u^n$, и для нее с помощью (13) найдем соотношение:

$$F^{(m,r)}(t,u)=\frac{1-t^r+rt^{mr}uF^{(m,r)}(1,u)}{1-t^r+t^{mr}(t^r+r-1)u},$$

полагая в котором $rF^{(m,r)}(1,u)=t^r+r-1$, придем при $t\to 1$ к неопределенности вида $0/0$. Следовательно, при $z=rF^{(m,r)}(1,u)-r+1$ для неявного описания функции $F^{(m,r)}(1,u)$ справедливо следующее алгебраическое уравнение:

$$u\,z^m(z+r-1)-z+1=0,$$

которому, в частности, удовлетворяет производящие функции чисел Фусса – Каталана $U_n^{(m,1)}(1)$ [9] и малых чисел Шрёдера $U_n^{(1,2)}(1)$ [5].

С помощью формулы (5) и результатов из [7] находится выражение:

$$V_n^{(m,r)}(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\binom{mn}{k}r^k x^k,\ n\in\mathbf{N}, \tag{14}$$

которое при $m=r=1$ описывает известные многочлены Нараяны [5].

Простого описания обычных производящих функций $F^{(m,r)}(t,u)$ и $G^{(m,r)}(x,u)=rx\sum_{n=1}^{\infty}V_n^{(m.r)}(x)u^n$ не найдено, но можно на основе аналогичных результатов из [7] компактно записать производящую функцию, обратную к функции $v=G^{(m,r)}(x,u)$:

$$\left(G^{(m,r)}(x,v)\right)^{-1}=\frac{v}{(v+rx)(v+1)^m}. \tag{15}$$

В частности, обращение функции (15) при $m=1$ дает:

$$G^{(1,r)}(x,u)=\frac{1-(rx+1)u-\sqrt{(1-(rx-1)u)^2-4u}}{2u}.$$

При $m=1$ для коэффициентов из формулы (14):

$$V_{n,k}^{(1)}(x)=\frac{1}{n}\binom{n}{k+1}\binom{n}{k},\ k=0,1,\ldots,k,\ n\in\mathbf{N},$$

также несложно получить числа $W_{k,j}^{(1)}$ из выражения (11) в виде:

$$W_{k,j}^{(1)}=\frac{(k+j)!}{j!(k-j)!(j+1)!},\ j=0,1,\ldots,k,\ k=0,1,\ldots,n-1,$$

что дает при $j=k$ известные числа Каталана [5, 9]:

$$W_{k,k}^{(1)}=\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k},\ k\in\mathbf{N}\cup\{0\},$$

а $W_k^{(1)}=\sum_{j=0}^{k}W_{k,j}^{(1)}$ определяют последовательность больших чисел Шредера.

Таким образом, рассматриваемый двухпараметрический класс *T*-моделей соответствует, при $n\in\mathbf{N}$, классу обобщенных чисел Каталана $U_n^{(m,r)}(1)$ и двухиндексной последовательности обобщенных баллотировочных чисел $U_{n,k}^{(m,r)}$, а применение *T*-диаграмм приводит к двухиндексной последовательности чисел $\frac{1}{n}\binom{n}{k+1}\binom{mn}{k}r^k$, $k=0,1,\ldots,n-1$ из (14).

Перечислим некоторые статьи OEIS, в которых рассматриваются элементы полученных классов: [1; A000108, A001764, A002293 – A002296, A009766, A062745, A001003, A007564, A059231, A078009, A033877, A034015, A001263, A120986, A114656, A088617, A006318].

## 6. Класс обобщенных чисел Белла и его свойства

Рассмотрим алфавит $S^{(r)}=\{mr+1,\ (m+1)r+1,\ldots\}$, простое отображение $\theta: s\to s^{s-1}s'$, где $s'=s+r$, и начальную таблицу $T_1^{(m,r)}=(mr+1)$.

В этом случае для двухпараметрического класса *T*-моделей легко проверить, что многочлены $U_n^{(m,r)}(t)$ удовлетворяют рекуррентному выражению:

$$U_1^{(m,r)}(t) = t^{mr}, \; U_{n+1}^{(m,r)}(t) = t^r U_n^{(m,r)}(t) + t\frac{d}{dt}U_n^{(m,r)}(t), \; n \in \mathbf{N}, \tag{16}$$

и записываются в следующей форме:

$$U_n^{(m,r)}(t) = t^{mr}\sum_{k=0}^{n-1} U_{n,k}^{(m,r)} t^{rk}, \; n \in \mathbf{N}.$$

Соотношение (16) позволяет легко получить экспоненциальную производящую функцию многочленов $U_n^{(m,r)}(t)$:

$$F^{(m,r)}(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}^{(m,r)}(t)\frac{u^n}{n!} = t^{mr} e^{mru} e^{\frac{t^r(e^{ru}-1)}{r}}. \tag{17}$$

С помощью формулы (5) и результатов из [7] находится экспоненциальную производящая функция многочленов $V_n^{(m,r)}(x)$:

$$G^{(m,r)}(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{n+1}^{(m,r)}(t)\frac{u^n}{n!} = e^{mrxu} e^{\frac{e^{rxu}-1}{rx}}. \tag{18}$$

Сравнение выражений (17) и (18) показывает, что многочлены $U_n^{(m,r)}(t)$ и $V_n^{(m,r)}(x)$ записываются в аналогичной форме, но $V_n^{(m,r)}(x)$ более просты, а их коэффициенты $V_{n,k}^{(m)}$ из (6) могут быть получены в следующем виде:

$$V_{n,k}^{(m)} = \begin{Bmatrix} n \\ n-k \end{Bmatrix}^{(m)} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \begin{bmatrix} m \\ m-j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n+m-j-1 \\ n+m-k-1 \end{Bmatrix}, \; k = 0,1,\ldots,n-1, \tag{19}$$

где фигурные скобки, как и в [9], использованы для обозначения чисел Стирлинга второго рода и их $m$-обобщений, а $U_n^{(m,r)}(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{Bmatrix} n \\ n-k \end{Bmatrix}^{(m)} r^k$ могут рассматриваться как обобщения чисел Белла.

С помощью выражений (10) и (18) числа (9) и (19) могут быть объединены следующим соотношением ортогональности:

$$\sum_{k\ge1} (-1)^{k-j} \begin{Bmatrix} i \\ k \end{Bmatrix}^{(m)} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}^{(m)} = \delta_{i,j}, \; i,j \in \mathbf{N},$$

а для коэффициентов $W_{k,j}^{(m)}$ в (11) справедлива рекуррентная формула:

$$W_{0,j}^{(m)} = \delta_{0,j}, \; W_{k,j}^{(m)} = (k+j-1)W_{k-1,j-1}^{(m)} + (m+j)W_{k-1,j}^{(m)}, \; k \in \mathbf{N}, \; j \in \mathbf{Z}, \tag{20}$$

просто связанная с аналогичной формулой (12), и также $W_{k,k}^{(m)} = (2k-1)!^{(2)}$.

Отметим, что выражения (7) – (12) и (16) – (20) можно использовать в соответствующих классах *T*-моделей и при значении параметра $m = 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае классу *T*-моделей $(S^{(r)}, \theta, T_1^{(m,r)})$, при $n \in \mathbf{N}$ соответствует класс обобщенных чисел Белла $\sum_{k=0}^{n-1} \begin{Bmatrix} n \\ n-k \end{Bmatrix}^{(m)} r^k$, а также классы двухиндексных последовательностей $\begin{Bmatrix} n \\ n-k \end{Bmatrix}^{(m)} r^k$ и $W_{k,j}^{(m)}$, где $k = 0,1,\ldots,n-1$ и $j = 0,1,\ldots,k$, содержащие, в частности, обычные числа Белла и числа Стирлинга второго рода.

Перечислим некоторые из статей OEIS, в которых рассматриваются элементы полученных классов: [1; A000110, A005493, A005494, A004213, A005011, A008277, A126351, A143494 – A143496, A112493].

## Заключение

Полученные автором статьи результаты позволяют существенно расширить приведенный список комбинаторных последовательностей, систематизируемых с использованием *T*-моделей и *T*-диаграмм.

Так, при выборе отображения $\theta : s \to s'^{s-1}s''$, где $s' = s + r,\ s'' = s' + r$, появляется класс обобщений последовательности [1; A002720], в который, в частности, входит двухиндексная последовательность чисел Лаха без учета знака [1; A105278], а небольшое изменение отображения $\theta$ в классе Каталана приводит к классу обобщений больших чисел Шредера [1; A006318].

Несложная модификация использованных *T*-моделей позволяет получить классы обобщений чисел Бесселя [1; A001515], Фубини [1; A000670], чисел инволюции [1; A000085] и т. д.

Обычный порядок классификации в статье опирается на применение производящих функций. Полученные на базе *T*-моделей результаты показывают возможность его улучшения. При рассматриваемой классификации в один класс включаются как комбинаторные последовательности, так и важнейшие, связанные с ними двухиндексные последовательности.

Описанная систематизация приводит не только к обобщению, но и к появлению многих новых комбинаторных последовательностей, описание которых отсутствует в OEIS. Построение таких последовательностей на основе *T*-моделей следует рассматривать как своеобразные задачи комбинаторики. Также найдены случаи, когда с помощью *T*-модели можно продолжить последовательность трудно вычисляемых чисел, имеющуюся в OEIS.

## Список литературы

1. *Sloane N.J.A.* The on-line encyclopedia of integer sequences. – 2020. – http://oeis.org.
2. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества / пер. с англ. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 256 с.
3. *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика / пер. с англ. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 504 с.
4. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика / пер. с англ. Т. 1. – М.: Мир, 1990. – 440 с.
5. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика / пер. с англ. Т. 2. – М.: Мир, 2009. – 768 с.
6. *Бондаренко Л.Н.* Моделирование комбинаторных последовательностей // Образовательные ресурсы и технологии. (Электронный научный журнал). – 2019 – №2 (27), С. 64–74.
7. *Бондаренко Л.Н.* Модели комбинаторного анализа. Монография. – М.: изд. «МУ им. С.Ю. Витте», 2019. – 248 с.
8. *Ониши Ё.* Обобщенные числа Бернулли–Гурвица и универсальные числа Бернулли // Успехи математических наук. – 2011. – Т. 66. – Вып. 5 (401). – С. 47–108.
9. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики / пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 703 с.

## References

1. *Sloane N.J.A.* The on-line encyclopedia of integer sequences. – 2020. – http://oeis.org.
2. *Riordan Dzh.* Kombinatornye tozhdestva / per. s angl. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1982. – 256 s.
3. *Gul'den Ya., Dzhekson D.* Perechislitel'naya kombinatorika / per. s angl. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1990. – 504 s.
4. *Stenli R.* Perechislitel'naya kombinatorika / per. s angl. T. 1. – M.: Mir, 1990. – 440 s.
5. *Stenli R.* Perechislitel'naya kombinatorika / per. s angl. T. 2. – M.: Mir, 2009. – 768 s.
6. *Bondarenko L.N.* Modelirovanie kombinatornyh posledova-tel'nostej // Obrazovatel'nye resursy i tekhnologii. (Elektronnyj nauchnyj zhurnal). – 2019 – №2 (27), S. 64–74.
7. *Bondarenko L.N.* Modeli kombinatornogo analiza. Mo-nografiya. – M.: izd. «MU im. S.Yu. Vitte», 2019. – 248 s.
8. *Onishi Yo.* Obobshchennye chisla Bernulli–Gurvica i universal'-nye chisla Bernulli // Uspekhi matematicheskih nauk. – 2011. – T. 66. – Vyp. 5 (401). – S. 47–108.
9. *Grekhem R., Knut D., Patashnik O.* Konkretnaya matematika. Osno-vanie informatiki / per. s angl. – M.: Mir, 1998. – 703 s.