УДК 517.518.87

ОБ ОДНОЙ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ С УЧАСТИЕМ ПРОИЗВОДНЫХ

Цыренханда Жэмбэевна Юмова, *к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики*
Тел.: 8 902 169 1273,e-mail: syum@mail.ru,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40 В.

Разработан алгоритм замены некоторых узлов решетки другими для минимизации нормы функционала погрешности при выполнении условия согласования порядка сходимости с шагом решетки и гладкостью функции вдоль выбранных координатных направлений. Результаты полученного метода проверены на контрольных примерах

Ключевые слова: кубатурные формулы, функциональные пространства Соболева.

Введение

При больших численных расчетах возникает трудность в приближенном вычислении кратных интегралов из-за того, что до сих пор не созданы универсальные методы оптимизации кубатурных формул на классах функций. В этой связи, исследования задач теории ведутся с точки зрения разных научных направлений. Одним из таких является «функционально-аналитический» подход, предложенный С.Л. Соболевым [1], связанный с исследованием оценок погрешностей в классах суммируемых функций и линейных нормированных пространствах, включающих в себя интегрируемые функции.

Ц.Ж. Юмова

Основные результаты исследования задач оптимизации кубатурных формул на классах функций анизотропных пространств, не одинаковых вдоль разных координатных направлений из-за дифференциальных свойств функций, рассматривались в работах Ц.Б. Шойнжурова [2], М.Д. Рамазанова [3]. Особенностью анизотропного пространства является то, что в узлах решетки формулы коэффициенты определяются с учетом дифференциальной природы подынтегральной функции по выбранным координатным направлениям.

В частности, М.Д. Рамазанов исследовал кубатурные формулы на произвольном, но не весовом пространстве периодических функций с единичным кубом в качестве основного периода. Однако при таком определении нормы функции возникали определенные трудности при периодическом продолжении функции на единичный куб.

Ц.Б. Шойнжуров продолжил функции из рассматриваемой области на все пространство, «избавившись» от ограничений. Это позволило ему к периодической на всем пространстве функции применить преобразование Фурье.

В работе построены решётчатые кубатурные формулы заменой одних узлов на другие с фиксированными коэффициентами при значениях функции и ее производных с учетом их дифференциальных свойств.

Предварительные сведения и обозначения

Строятся кубатурные формулы на классах функций анизотропного пространства $W_p^{\overline{m}}(E_n)$ с естественной нормой при $1 \le p < \infty$

$$\|\varphi\|_{W_p^{\overline{m}}(E_n)} = \left[\int\limits_{E_n} \left(|\varphi(x)|^p + \sum_{k=1}^{n} \left| D^{m_k} \varphi(x) \right|^p \right) dx \right]^{1/p} < \infty .$$

Пусть $k = 1,..,n$, $h_k > 0$ – шаги решетки, x_k – узлы формулы, N_k – количество узлов решетки, C_k – коэффициенты формулы, m_k – гладкость функции вдоль выбранных координатных направлений, $\overline{m} = (m_1, m_2, ..., m_n)$, $N^n = N_1 N_2 \cdots N_n$ – количество узлов формулы, $m^* = n \bigg/ \left(\sum_{k=1}^{n} m_k^{-1} \right)$, $\Delta = \{x \in E_n, 0 \le x_k < 1, k = 1,2,...,n\}$ – фундаментальный единичный куб.

Представление норм функционала погрешности и экстремальной функции

При оценке качества той или иной кубатурной формулы предпочтительней считается та, функционал погрешности которой имеет меньшую норму. Для отыскания нормы функционала погрешности используется экстремальная функция, которая является обобщенным решением некоторых дифференциальных уравнений в частных производных. Дифференциальный оператор $L(D) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{m_k} D^{2m_k}$, входящий в такое уравнение, порождается видом нормы функции в основном пространстве. Известно [4], что фундаментальное решение $\varepsilon_{2\overline{m}}(x)$ оператора $L(D)$, вообще говоря, не единственно; оно определяется с точностью до слагаемого $\varepsilon^0_{2\overline{m}}(x)$, являющегося произвольным решением однородного уравнения $L(D)\varepsilon^0_{2\overline{m}} = 0$. В нашем случае применительно к оператору $L(D)$, фундаментальное решение имеет вид

$$\varepsilon_{2\overline{m}}(x) = \int_{E_n} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{m_k} (2\pi i \xi)^{2m_k} + 1} d\xi \ .$$

Приводимые ниже оценки для нее и ее производных с различными значениями гладкости функции $\overline{m}$ по координатным направлениям, взяты из известного источника [5]:

$$\varepsilon_{2\overline{m}}(x) \le C_{\overline{m}} \begin{cases} \left(|x|^{2m_k \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2m_k} - 1 \right)} \right)^{-1}, & |x| < 1; \\ e^{-kx}, & |x| > 1, \ k > 0; \end{cases}$$

$$D^s \varepsilon_{2\overline{m}}(x) \le C \begin{cases} \left(|x|^{2m_k \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1+m_k}{2m_k} - 1 \right)} \right)^{-1}, & \sum_{k=1}^{n} \frac{1+s_k}{2m_k} - 1 > 0, \ |x| < 1; \\ e^{-kx}, & |x| > 1, \ k > 0, s = (s_1, s_2, .., s_n), \end{cases}$$

где $C_{\overline{m}}$ является непрерывной функцией от параметра $\overline{m}$.

Благодаря введению Ц.Б. Шойнжуровым [6] специальной нормы, для которой соответствующий дифференциальный оператор был хорошо изучен и описан в литературе, в частности, в работе [5], стало возможным применять свойства его фундаментального решения для нахождения экстремальных функций и норм функционалов погрешности кубатурных формул. Ниже применен сходный прием нормирования функций анизотропного пространства, и на этом пути получен ряд результатов.

Теорема. Если $1 < p < \infty$, $p - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m_k} > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\varepsilon_{2\overline{m}}(x) * l(x) \in W_{p'}^{\overline{m}}$, $l(x) \in W_p^{\overline{m}*}$, то экстремальная функция $\varphi_l(x)$, соответствующая функционалу погрешности *l(x),* определяется равенством

$$\varphi_l(x) = \sum_{k=0}^{n} D^{m_k} \varepsilon_{2\overline{m}}(x) * \left| D^{m_k} \varepsilon_{2\overline{m}}(x) * l(x) \right|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn} D^{m_k} \varepsilon_{2\overline{m}}(x) * l(x),$$

нормы функционала погрешности *l(x)* и экстремальной функции $\varphi_l(x)$, соответственно, имеют представления

$$\| l(x) \|_{W_p^{\overline{m}*}} = \left[\int_{E_n} \left| D^{2m_k} \varepsilon_{2\overline{m}}(x) * l(x) \right|^{p'} dx \right]^{1/p'},$$

$$\| \varphi_l \|_{W_p^{\overline{m}}} = \left[\int_{E_n} \sum_{k=0}^{n} \left| D^{m_k} \varepsilon_{2\overline{m}}(x) * l(x) \right|^{p'} dx \right]^{1/p}.$$

Возникшая трудность, характерная для анизотропного пространства, когда все функции должны быть периодически продолженными с одним и тем же основным периодом, требовала, чтобы норма не возрастала при вычитании из функции ее нулевого коэффициента в соответствующих рядах Фурье. Для разрешения упомянутой проблемы в работе [7] был установлен критерий асимптотической оптимальности кубатурной формулы по коэффициентам, а именно, порядок сходимости должен согласовываться с шагом решетки и гладкостью функции вдоль выбранных координатных направлений системой соотношений:

$$h_1^{m_1} = h_2^{m_2} = \ldots = h_n^{m_n} = h^{m^*}. \tag{1}$$

Это позволило получить возможность для усовершенствованных формул установить порядковую оптимальность на всем классе решетчатых кубатурных формул в анизотропном пространстве и найти из (1) зависимость шага решетки от гладкости функции по выбранному направлению, определенную равенством

$$h_k = h^{m^*/m_k},\ N_k = N^{m^*/m_k},\ k = 1,2,\ldots,n.$$

Функционал погрешности кубатурной формулы внутри произвольной гладкой области анизотропного пространства будет минимальным, если использовать коэффициенты, определяемые из равенства

$$\sum_{\gamma_k=0}^{N_k} C_{\gamma_k^{\alpha_k}}\, \gamma_k^{\alpha_k} = \frac{1-\sigma_k h_k}{\alpha_k+1}, \quad \alpha_k = 0,1,\ldots,m_k$$

при любом порядке старшей производной, гладкости функции m_k вдоль выбранной координатной оси OX_k, $k = 1,2,\ldots,n$.

Алгоритм замены узлов на другие

Преимущество кубатурных формул в анизотропных пространствах, характеризуемых решётчатым расположением узлов и постоянством коэффициентов для внутренних узлов, отстоящих от границы на расстояние порядка шага решётки, заключается в том, что учет гладкости функции вдоль выбранных координатных направлений дает более точные результаты, чем кубатурные формулы, где гладкость по всем направлениям одинаковая. Известно [1], что «…выбор коэффициентов при данных узлах представляет собой линейную задачу, наоборот, выбор узлов является задачей, значительно более трудной».

Построим элементарные функционалы погрешностей на плоскости с помощью замены одних узлов решетки на другие, с фиксированными коэффициентами при значениях функции и ее производных. В заменяемых узлах решетки достаточно иметь только вычисленные коэффициенты при значениях функции в зависимости от гладкости выбранного направления. Заменять будем узлы решетки, которые не входят в область фундаментального параллелепипеда с длинами ребер h_1, h_2 на узлы, принадлежащие области, так, чтобы погрешность как разность между неизвестным точным значением интеграла и приближающей его кубатурной суммой

$$\langle l,\varphi\rangle = \int\limits_{\Delta}\varphi(x)dx - \sum_{\gamma=\overline{1,N}} C_\gamma\varphi(x_\gamma)$$

была равна нулю. При этом число заменяемых узлов N должно совпадать с числом одночленов M формулы, определяемым равенством

$$M = \left(\min_{m_k}\{m_1, m_2\}\right)^2 + 2\,. \tag{2}$$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (x_1 + x_2^2)\,dx\,dy$ с заменой узлов на другие и проверкой.

По формуле (2) число заменяемых узлов равно 3. Среди узлов, выходящих за область фундаментального прямоугольника, выберем $\varphi(0,2), \varphi(1,1), \varphi(1,2)$. Их назовем «старыми». Заменим их на «новые» узлы внутри заданной области, в которых вычислены коэффициенты при значениях функции, и/или при значениях производных:

$$\varphi(0,2) = \varphi(0,1),\;\; \varphi(1,1) = \varphi^{(1,0)}_{(1,0)},\;\; \varphi(1,2) = \varphi^{(0,1)}_{(0,0)}\,.$$

Тогда, заменив вышеперечисленные узлы, получим:

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \approx \frac{5}{24}\varphi(0,0) + \frac{1}{3}\varphi(0,1) + \left(-\frac{1}{24}\right)\varphi(0,1) +$$
$$+\frac{5}{24}\varphi(1,0) + \frac{1}{3}\varphi^{(1,0)}_{(1,0)} + \left(-\frac{1}{24}\right)\varphi^{(0,1)}_{(0,0)} = \frac{5}{6} = 0{,}8333333.$$

Результат совпадает с известным аналитическим решением.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (x_1^2 + x_2^3)\,dx\,dy$ с заменой узлов и проверкой.

Количество одночленов $M = \left(\min\{2,3\}\right)^2 + 2 = 6$ находим из равенства (2). В данном случае число заменяемых узлов равно 6. Следующие 6 узлов $\varphi(0,3)$, $\varphi(1,2)$, $\varphi(1,3)$, $\varphi(2,1)$, $\varphi(2,2)$, $\varphi(2,3)$ должны быть заменены:

$$\varphi(0,3) = \varphi^{(0,1)}_{(0,2)},\quad \varphi(1,2) = \varphi(1,1),\quad \varphi(1,3) = \varphi^{(0,1)}_{(0,1)},$$

$$\varphi(2,1) = \varphi(2,0),\;\; \varphi(2,2) = \varphi(1,0),\quad \varphi(2,3) = \varphi^{(0,1)}_{(0,0)}\,.$$

Заменой «старых» узлов на «новые», с фиксированными коэффициентами при значениях функции и ее производных, получим

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \approx \frac{5}{32}\varphi(0,0) + \frac{1}{4}\varphi(1,0) - \frac{1}{32}\varphi(2,0) + \frac{95}{288}\varphi(0,1) + \frac{19}{36}\varphi(1,1) - \frac{19}{288}\varphi(2,0) +$$
$$-\frac{25}{288}\varphi(0,2) - \frac{5}{36}\varphi(1,1) + \frac{5}{288}\varphi(1,0) + \frac{5}{288}\varphi^{(0,1)}_{(0,2)} + \frac{1}{36}\varphi^{(0,1)}_{(0,1)} - \frac{1}{288}\varphi^{(0,1)}_{(0,0)}\,. \tag{3}$$

Подставим значения функции и ее производных в формулу (3):

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (x_1^2 + x_2^3)dx_1dx_2 \approx \frac{5}{32}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{32}\cdot 4 + \frac{95}{288}\cdot 1 + \frac{19}{36}\cdot 2 - \frac{19}{288}\cdot 4 +$$

$$-\frac{25}{288}\cdot 8-\frac{5}{36}\cdot 2+\frac{5}{288}\cdot 1+\frac{5}{288}\cdot 12+\frac{1}{36}\cdot 3-\frac{1}{288}\cdot 0=\frac{7}{12}=058(3)\,.$$

Результат совпадает с известным аналитическим решением.

Заключение

Автор считает, что в данной работе новыми являются следующие положения и результаты. Новизна метода проявилась в том, что разработан алгоритм выбора узлов решетки при фиксированных коэффициентах, и эта задача является более трудной задачей. Для классов функций, зависящих от гладкостей по выбранным координатным осям, построенные формулы сохраняют полученный ранее порядок сходимости. Качество полученных методов проверены на контрольных задачах с известными решениями.

Литература

1. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
2. *Шойнжуров Ц.Б.* Некоторые вопросы теории кубатурных формул в неизотропных пространствах С.Л. Соболева. // Докл. АН СССР, 1973. Т. 209/ № 5. С. 1036-1038.
3. *Рамазанов М.Д.* Лекции по теории приближенного интегрирования. Уфа: Изд-во Башкир. ун-та, 1973. 174 с.
4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – 5-е изд., доп. М.: Наука, 1988. 512 с.
5. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1977. 456 с.
6. *Шойнжуров Ц.Б.* Некоторые вопросы теории кубатурных формул в пространстве $W_p^m(E_n)$ // Сб.Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск: Наука, 1980. С.302-306.
7. *Юмова Ц.Ж.* Вычисление параметров функционалов погрешностей кубатурных формул. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH&Co. KG, 2011. 108 с.

On the cubature formula with the involving derivatives

Yumova Tsyrenkhanda Zhembeevna*, Candidate of Physics and Mathematics, Associate professor of the Department of High Mathematics,*
East Siberian State University of Technology and Management,
Ulan-Ude, Kluchevskaya st, 40V.

The algorithm of replacing some other lattice nodes to minimize the error functional norm is developed under the concordance condition of the convergence order with lattice step and the smoothness of the function along the selected coordinate directions. The results obtained by the method tested in the control examples.

УДК 532.517.4

ДИНАМИКА ЗАГЛУБЛЕНИЯ ПЕРЕМЕШАННОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ В ТРЕХМЕРНЫХ РАСЧЕТАХ

Лидия Алексеевна Компаниец*, канд. физ.-мат. наук, доцент, с.н.с.*
тел.: 8 391 249 8811, e-mail: kla@icm.krasn.ru
ФГБУН ИВМ СО РАН
http://icm.krasn.ru
Татьяна Валерьевна Якубайлик*, канд. физ.-мат. наук, н.с.*
тел.: 8 391 249 8811, e-mail: ytv@icm.krasn.ru
ФГБУН ИВМ СО РАН
http://icm.krasn.ru