УДК 62-50

# СИНТЕЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ УПРАВЛЯЕМОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

**Андрашитов Дмитрий Сергеевич,**
*канд. техн. наук, доцент, ст. преподаватель, начальник метрологической службы,*
*e-mail: dima-andrahitov@rambler.ru,*
*Военная академия РВСН им. Петра Великого,*

**Козьменко Александр Сергеевич,**
*слушатель,*
*e-mail: korynd-s@yandex.ru,*
*Военная академия РВСН им. Петра Великого,*

**Филимонов Алексей Александрович,**
*адъюнкт,*
*e-mail: korynd-s@yandex.ru,*
*Военная академия РВСН им. Петра Великого*

*Современные технические системы представляют собой сложные динамические объекты с автоматизированным или автоматическим управлением. Передовыми в этом направлении являются объекты авиационной, космической и ракетной техники. Однако увеличение числа выполняемых ими функций, усложнение алгоритмов работы и переход, в целом, к интеллектуализации выдвигает на первый план проблему их сопровождения, т.е. оценку состояния при заданном управлении. На практике исследование свойств динамических объектов, к примеру, космической техники, осуществляется путем математического моделирования поведения объекта в условиях, приближенных к реальным. При этом качество проведенной оценки параметров состояния объекта определяет адекватность математической модели реальному объекту. В этом случае основное внимание уделяется повышению точности, снижению вычислительных затрат и устойчивости алгоритмов оценивания состояния удаленного управляемого объекта (космического аппарата). В статье рассматривается новый алгоритм оценивания состояния на основе совмещенного с физическими принципами синтеза, удовлетворяющий обозначенным условиям.*

**Ключевые слова:** микроминиатюризация, космический аппарат, вычислительный алгоритм, синтез, телекоммуникации, моделирование, оптимизация

# SYNTHESIZED ALGORITHM FOR IMPROVING THE ACCURACY OF ESTIMATION OF PARAMETERS OF A CONTROLLED DYNAMIC SYSTEM MODEL

**Andrashitov D.S.,**
*candidate of technical sciences, associate professor, senior lecturer, head of metrological service,*
*e-mail: dima-andrahitov@rambler.ru,*
*Military Academy of strategic missile forces named after Peter the Great,*

**Kozmenko A.S.,**
*listener,*
*e-mail: korynd-s@yandex.ru,*
*Military Academy of strategic missile forces named after Peter the Great,*

**Filimonov A.A.,**
*adjunct,*
*e-mail: korynd-s@yandex.ru,*
*Military Academy of strategic missile forces named after Peter the Great*

*Modern technical systems are complex dynamic objects with automated or automatic control. Advanced in this direction are objects of aviation, space and rocket technology. However, the increase in the number of functions performed by them, the complication of work algorithms, and the transition, as a whole, to intellectualization highlight the problem of their maintenance, i.e. assessment of the state for a given control. In practice, the study of the properties of dynamic objects, for example, space technology, is carried out by mathematical modeling of the behavior of an object in conditions close to real ones. Moreover, the quality of the assessment of the state parameters of the object determines the adequacy of the mathematical model to the real object. In this case, the main attention is paid to improving accuracy, reducing computational costs and stability of algorithms for assessing the state of a remote controlled object (spacecraft). The article considers a new state estimation algorithm based on synthesis combined with physical principles that satisfies the indicated conditions.*

**Keywords:** microminiaturization, spacecraft, computational algorithm, synthesis, telecommunications, modeling, optimization

**DOI 10.21777/2500-2112-2019-4-61-67**

Стремительное развитие средств массовой телекоммуникации, сотовой и спутниковой связи требует задействования при своей эксплуатации все более мощных систем обработки и передачи информации. К таким системам относится различного рода космическая техника.

Тенденция к микроминиатюризации космической техники в спутникостроении закономерно приводит к созданию малогабаритных, сложноуправляемых объектов, одной из основных проблем которых является их сопровождение при воздействии различных внешних сил.

Данная задача не является новой [1; 2; 7]. Для ее решения предложено множество различных методов. Основные из них построены на базе теории статистического синтеза, предполагающей представление управляющих воздействий в виде марковского процесса, и требующие решения уравнения Стратановича [7]. Это связано с существенными вычислительными затратами, что ограничивает возможность применения подобных методов в реальном масштабе времени. Известны подходы, состоящие в определении расширенного вектора состояния и использовании соответствующих линейных и нелинейных фильтров [5]. Однако увеличение размерности на практике приводит к известному эффекту «размазывания точности» и снижению устойчивости алгоритмов.

В настоящей работе предложен подход, заключающийся в рассмотрении неизвестных управлений как сил, вынуждающих нелинейную динамическую систему следовать по зашумленной наблюдаемой траектории, как оптимальных. Для их нахождения, например, можно использовать принцип максимума Л.С. Понтрягина, который в теории оптимального управления считается наиболее конструктивным [6]. Тогда необходимо решать двухточечную краевую задачу с известными граничными условиями, что, как правило, приводит к увеличению вычислительных затрат и сложности вычислительных процедур.

Поэтому для решения задачи оценки параметров маневрирующих космических аппаратов предлагается использовать естественные свойства объекта в виде вариационного принципа Гамильтона – Остроградского, который обеспечивает получение алгоритмов, отличающихся высокой точностью оценивания, простотой, универсальностью, небольшим объемом вычислительных затрат [1; 2]. Кроме того, в этом случае структура алгоритмов оценки не зависит от выбора системы координат, что исключает необходимость нелинейных преобразований измерительных шумов и позволяет повысить точность оценки параметров движения летательных аппаратов.

**Математическая постановка задачи.** Общим принципом, содержащим в себе все положения динамики материальной системы, является принцип Гамильтона – Остроградского, согласно которому выполняется равенство нулю элементарного значения [6]

$$\delta' R = \int_{t_0}^{t_k} (\delta T + \delta' A) dt = 0, \tag{1}$$

интеграла действия

$$R = \int_{t_0}^{t_k} (T + A) dt, \tag{2}$$

где $T$ – кинетическая энергия,

$A = \int\limits_{q(t_0)}^{q(t_k)} Qdq$ – обобщенная работа,

$Q$ – обобщенная сила,

$q$ – обобщенная координата.

Из (2) с учетом (1) вытекает дифференциальное уравнение Лагранжа второго рода [3]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s, s = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Вектор обобщенных сил рассматривается как смесь полезных вынуждающих сил и различных случайных воздействий

$$Q_s = Q_s^1 + Q_s^2; \left|Q_s^1\right| \le K, K > 0; Q_s^2 \in L_2\left[t_0, t_k\right]. \tag{4}$$

Уравнение наблюдения имеет вид:

$$y(t) = H(q,t) + \xi(t), \tag{5}$$

где $H \in R^n$ – известная вектор – функция,

$\xi \in R^l$ – вектор случайных воздействий на канал наблюдения с известной интенсивностью.

В пространстве наблюдений введем целевой функционал

$$J_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_k}\left[y(t) - H\left(\hat{q},t\right)\right]^T \mathbf{R}_\xi^{-1} \left[y(t) - H\left(\hat{q},t\right)\right]dt = \int\limits_{t_0}^{t_k} F\left(\hat{q}\right)dt, \tag{6}$$

где $\mathbf{R}_\xi \in R^{n\times n}$ – диагональная весовая матрица, характеризующая интенсивность помех в канале наблюдений,

$^{\mathrm{T}}$ – знак транспонирования.

Тогда имеет место следующая *формулировка обратной задачи динамики*: определить вектор обобщенных сил $Q$ как функцию обобщенных координат и обобщенных скоростей $(q,\dot{q}) \in R^{2n}$ и соответствующую ему траекторию $q(t) \in R^n$, обеспечивающие минимум целевого функционала

$$J_1 \rightarrow \min \tag{7}$$

при условии (3) и ограничении (4).

Для решения поставленной задачи (3)–(7) сконструируем с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа расширенный функционал

$$J = J_1 + \lambda R \rightarrow \min, \tag{8}$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа.

Применение аппарата негладкого анализа для исследования (8) на экстремум позволило получить необходимое условие минимума в форме теоремы объединенного принципа максимума [1]: для динамической системы (3) при ограничении (4) необходимое условие минимума целевого функционала (6) определяются максимумом функции

$$\Phi\left(\hat{q},\dot{\hat{q}}\right) = \max_{Q\in L_2^n[t_0,t_k]} \Phi(q,\dot{q},\lambda) = \max_{Q\in L_2^n[t_0,t_k]} \sum_{s=1}^{n}\left[\lambda Q_s(q,\dot{q}) + V_s(q)\right]\dot{\hat{q}}_s, \tag{9}$$

где λ – постоянный множитель Лагранжа,

$Q(q,\dot{q}) \in L_2^n\left[t_0,t_k\right]$ – обобщенная сила,

$V_s(q)$ – фиктивная обобщенная сила

$$V_s(q) = \frac{\partial F}{\partial \hat{q}_s}\delta q_s \tag{10}$$

а условие трансверсальности выражением

$$\sum_{s=1}^{n}[\lambda(A_s - T_s) + F_s] = 0,\ s = \overline{1,n}. \tag{11}$$

Легко выяснить, что множество, на котором функция Φ (9) достигает максимума, определяется совпадением знаков сомножителей $\operatorname{sign}[\lambda Q_s + W_s] = \operatorname{sign}\dot{q}_s$, или их пропорциональностью $[\lambda Q_s + W_s] = \mu_s(q,\dot{q})\dot{q}_s$, где $\mu_s(q,\dot{q})$ – синтезирующая знакоотрицательная функция. Поэтому теорема позволяет с точностью до функции $\mu_s(q,\dot{q})$ определить множество обобщенных сил

$$Q_s(q,\dot{q}) = \lambda^{-1}\left\{\mu_s(q,\dot{q})\dot{q}_s - V_s(q)\right\},\ s = \overline{1,n}. \tag{12}$$

Равенства (11) определяют в фазовом пространстве гиперповерхность переключения управления. Так как на этой гиперповерхности обобщенная сила равна нулю, то

$$L(q,\dot{q},t) = \lambda T(q,\dot{q}) - F(q,\dot{q}) = A(Q) = const. \tag{13}$$

Преобразование Лежандра функции $L(q,\dot{q},t)$ (13) по переменным $\dot{q}_s$ есть функция Гамильтона

$$H(q,p,t) = \lambda T + F = \frac{\lambda}{2}\sum_{s,k=1}^{n}\frac{A_{sk}}{D}p_s p_k + F = h = const, \tag{14}$$

в которой величины $\dot{q}_s$ выражены через $q_s$, $p_s$, $t$ при помощи уравнений $p_s = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$ для обобщенных импульсов; при этом при проведении преобразования величины $q$, $t$ играют роль параметров. Здесь $A_{sk}$ – алгебраическое дополнение элемента $a_{sk}$ гессиана кинетического потенциала.

Равенство (14) показывает, что поверхности переключения являются изоэнергетическими. Откуда по уравнениям Уиттекера определяется синтезирующая функция на этой поверхности

$$\hat{\mu}_s(q,\dot{q}) = -\lambda\left|\frac{dp_s}{dq_s}\right| = -\frac{|\dot{q}_s|}{L_s|V_s|}. \tag{15}$$

**Пример.** В качестве примера проведем оценку состояния модели летательного аппарата, уравнения движения которого в декартовой системе координат могут быть записаны в следующем виде [7]:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= 0.5\rho v^2\left(u_1\dot{x}v^{-1} - u_2\dot{y}v_n^{-1} - u_3\dot{x}\dot{z}v_n^{-1}v^{-1}\right),\\
\ddot{y} &= 0.5\rho v^2\left(-u_1\dot{y}v^{-1} + u_2\dot{x}v_n^{-1} - u_3\dot{y}\dot{z}v_n^{-1}v^{-1}\right),\\
\ddot{z} &= 0.5\rho v^2\left(-u_1\dot{z}v^{-1} + u_3 v_n v^{-1}\right) - g,
\end{aligned} \tag{16}$$

где $u_1$, $u_2$, $u_3$ – приведенные аэродинамические коэффициенты,

$v$, $v_n$ – скорость центра масс и планерная скорость.

Наблюдения при измерении наклонной направляющих косинусов дальности (16) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + n_1 = h_1 + n_1,\\
y_2 &= x^{-1}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + n_2 = h_2 + n_2,\\
y_3 &= z^{-1}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + n_3 = h_3 + n_3,
\end{aligned} \tag{17}$$

где $n_1$, $n_2$, $n_3$ – белый гауссовский независимый шум, имеющий нулевое математическое ожидание и заданную дисперсию,

$h_1$, $h_2$, $h_3$ – обобщенные криволинейные неортогональные координаты.

Пусть требуется найти такие оценки действующей на динамическую систему (17) силы $\hat{Q}_s$, а также соответствующую ей траекторию $\hat{h}_s$, что

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_k}\left[\beta_1\left(Y_1 - \hat{h}_1\right)^2 + \beta_2\left(Y_2 - \hat{h}_2\right)^2 + \beta_3\left(Y_3 - \hat{h}_3\right)^2\right] \to \min, \tag{18}$$

где $\beta_s$ – константы, определяющие неопределенности шумов наблюдения.

Для (18) рассмотрим два случая.

1. Искомые силы, рассматриваемые как причинные характеристики, имеющие регулярный характер, которые выбираются из класса кусочно-постоянных функций, что соответствует предположению о управляемом движении летательного аппарата [2].

2. Искомые силы, имеющие сингулярный характер, рассматриваются как элементы пространства $L_2\left[t_0, t_k\right]$, что соответствует предположению о движении летательного аппарата под действием некоторых неизвестных сил.

Пусть

$$\left|Q_s^1\right| \le K,\ K > 0. \tag{19}$$

Тогда из (12) с учетом (5), (10), (15) и (19) получим

$$\widehat{Q}_s^1 = \lambda^{-1}\left|Q_s^1\right| sign\left[-\lambda\frac{\left|\dot{q}_s\right|}{a_s^{-1}L_s\left|\beta_s\left(Y_s - \hat{h}_s\right)\right|} - \beta_s\left(Y_s - \hat{h}_s\right)\right], \tag{20}$$

где $a_s$ характеризует инерционные свойства системы.

Пусть

$$Q_s^2 \in L_2\left[t_0, t_k\right]. \tag{21}$$

Выбрав синтезирующую функцию $\mu_s(\hat{h}, \dot{\hat{h}})$ в форме (15), запишем для второго этапа предлагаемого алгоритма (21)

$$\widehat{Q}_s^2 = -\lambda_2^{-1}\left[\left|\frac{dp_s}{dq_s}\right|\frac{\dot{\hat{h}}_s}{a_s^{-1}} + \beta_s\left(Y_s - \hat{h}_s\right)\right]. \tag{22}$$

С учетом (3), (4) на основе (20), (22) получим следующие уравнения оценки $\widehat{Q}_s$ по измерениям $Y_s$:

$$\ddot{\hat{h}}_s = \lambda^{-1}\left|Q_s^1\right| sign\left[-\lambda\frac{\left|\dot{q}_s\right|}{a_s^{-1}L_s\left|\beta_s\left(Y_s - \hat{h}_s\right)\right|} - \beta_s\left(Y_s - \hat{h}_s\right)\right] - \tag{23}$$

$$-\lambda_2^{-1}\left[\left|\frac{dp_s}{dq_s}\right|\frac{\dot{\hat{h}}_s}{a_s^{-1}} + \beta_s\left(Y_s - \hat{h}_s\right)\right]$$

Оценка эффективности предлагаемого метода проведена на основе численного моделирования (23) для различных значений интенсивности маневра и среднеквадратическое отклонение (СКО) шумов наблюдений. Результаты моделирования для наклонной дальности приведены на рисунке 1, где обозначено: кривая 1 – оценка последовательного алгоритма, содержащего уравнения (20), (22); кривая 2 – оценка, полученная на основе (22) [2]; кривая 3 – оценка, полученная для (20); кривая 4 – оценка фильтра Калмана – Бьюси (ФКБ) [8]; кривая 5 – оценка нечетко-логического фильтра [4].

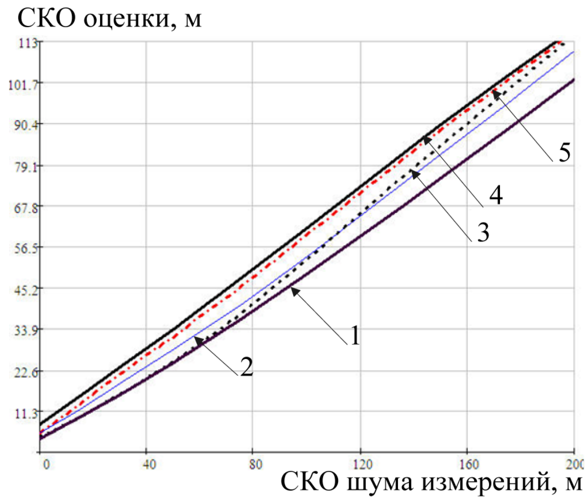


Рисунок 1 – Зависимость СКО оценки
от СКО шума измерения

## Заключение

Результаты численного моделирования позволяют говорить о высокой эффективности нового алгоритма комплексной оценки параметров управляемых удаленных объектов в сравнении с классическими методами обработки измерительной информации [4; 6–8], а также полученными в [1; 2] на основе совмещенного с физическими принципами синтезе. Эффективность понимается в смысле точности и устойчивости полученного алгоритма.

Поскольку принята оптимизационная постановка задачи [7], то нет необходимости в использовании гипотезы движения удаленного объекта, кроме предположения о принадлежности искомой силы Лебегову функциональному пространству. Это является существенным преимуществом предлагаемого алгоритма перед традиционными. Кроме того, нет необходимости решения двухточечной краевой задачи как в принципе максимума Л.С. Понтрягина, который традиционно считается более конструктивным, чем принцип динамического программирования Р. Беллмана [6].

Полученные результаты могут найти широкое применение при построении математических моделей динамических систем с целью исследования их свойств.

## Список литературы

1. Анализ функционирования алгоритмов параметрической идентификации информационно-управляющих систем, удовлетворяющих принципу Гамильтона – Остроградского / Д.С. Андрашитов, И.В. Дерябкин, А.А. Костоглотов, С.В. Лазаренко // Динамика сложных систем – XXI век. – 2014. – Т. 8, № 2. – С. 90–95.

2. *Костоглотов А.А., Лазаренко С.В., Андрашитов Д.С.* Регуляризированный алгоритм многопараметрической вариационной идентификации динамических систем // Сервис в России и за рубежом. – 2011. – № 8 (27). – С. 25–36.

3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 414 с.

4. *Музыченко Н.Ю., Москат М.М.* Нечетко-логический фильтр слежения за динамическими объектами // Общие вопросы радиоэлектроники. НИИРС. – 2005. – С. 12–22.

5. *Сейдж Э., Дж. Мелс.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. – М.: Связь, 1976. – 496 с.

6. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.

7. *Студер Ф., Фарина А.* Цифровая обработка радиолокационной информации. – М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.

8. *Singer R.A.* Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets // IEEE Trans. – 1970. – AES-6, № 4. – P. 473–483.

**References**

1. Analiz funkcionirovaniya algoritmov parametricheskoj identifikacii informacionno-upravlyayushchih sistem, udovletvoryayushchih principu Gamil'tona – Ostrogradskogo / D.S. Andrashitov, I.V. Deryabkin, A.A. Kostoglotov, S.V. Lazarenko // Dinamika slozhnyh sistem – XXI vek. – 2014. – T. 8, № 2. – S. 90–95.
2. *Kostoglotov A.A., Lazarenko S.V., Andrashitov D.S.* Regulyarizirovannyj algoritm mnogoparametricheskoj variacionnoj identifikacii dinamicheskih sistem // Servis v Rossii i za rubezhom. – 2011. – № 8 (27). – S. 25–36.
3. *Markeev A.P.* Teoreticheskaya mekhanika. – M.: Nauka, 1990. – 414 s.
4. *Muzychenko N.Yu., Moskat M.M.* Nechetko-logicheskij fil'tr slezheniya za dinamicheskimi ob"ektami // Obshchie voprosy radioelektroniki. NIIRS. – 2005. – S. 12–22.
5. *Sejdzh E., Dzh. Mels.* Teoriya ocenivaniya i ee primenenie v svyazi i upravlenii. – M.: Svyaz', 1976. – 496 s.
6. Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya / pod red. A.A. Krasovskogo. – M.: Nauka, 1987. – 712 s.
7. *Studer F., Farina A.* Cifrovaya obrabotka radiolokacionnoj informacii. – M.: Radio i svyaz', 1993. – 320 s.
8. *Singer R.A.* Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets // IEEE Trans. – 1970. – AES-6, № 4. – P. 473–483.