

КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Владимир Викторович Шайдуров, д.ф.-м.н., член-корр. РАН
директор ИВМ СО РАН

Тел.: 391 2432756, e-mail: shidyrov@icm.krasn.ru

Галина Ивановна Щепановская, к.ф.-м.н., с.н.с

Тел.: 391 2907471, e-mail: gi@icm.krasn.ru

Максим Викторович Якубович, м.н.с

Тел.: (391) 290-74-71, e-mail: yakubovich@icm.krasn.ru

Институт вычислительного моделирования СО РАН

www.icm.krasn.ru

В работе обсуждаются алгоритмы численного решения двумерных уравнений Навье-Стокса для вязкого теплопроводного газа. Дискретизация уравнений по времени осуществляется полу-Лагранжевым методом, часто называемым обобщенным методом характеристик, иногда – методом траекторий. А дискретизация по пространству реализуется методом конечных элементов. Особое внимание уделяется возможному виду краевых условий для замыкания вычислительной области и последствий их использования при численном моделировании на примере тестовой задачи протекания газа в канале.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, вязкий теплопроводный газ, полу-Лагранжева аппроксимация, метод конечных элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00224) и программы фундаментальных исследований РАН (проект № 18.2).

При решении уравнений Навье-Стокса для вязкого теплопроводного газа в ограниченной вычислительной области возникает проблема выбора краевых условий на границе истечения газа. К настоящему времени сложилось множество подходов к выбору таких краевых условий [1]. Мы рассмотрим два из них на примере задачи протекания газа в канале. Для этого в качестве области определения возьмём единичный квадрат Ω с границей Γ , состоящей из четырёх сегментов:



В.В. Шайдуров

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : x = 1.0, y \in (0.0, 1.0)\};$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : x \in (0.0, 1.0], y = 0.0\};$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) : x = 0.0, y \in [0.0, 1.0]\};$$

$$\Gamma_4 = \{(x, y) : x \in (0.0, 1.0], y = 1.0\}.$$

Для аппроксимации задачи по времени введем равномерную сетку с шагом $\tau = T/M$:

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_k : t_k = k\tau, k = 0, \dots, M\}.$$

Для произвольной функции $\varphi(t, x, y)$ мы будем использовать обозначения $\varphi^k(x, y) = \varphi(t_k, x, y)$ и $\varphi_{l,m}^k = \varphi(t_k, x_l, y_m)$.

В этой работе мы опустим этап полу-Лагранжевой дискретизации уравнений Навье-Стокса по времени. Он подробно изложен в работе [2] и в настоящее время опубликован в ряде статей [3-6]. Его суть заключается в том, что совокупность первых производных (субстанциональная или Лагранжева производная) заменяется с помощью разностной производной



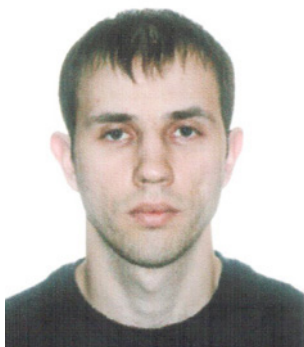
Г.И. Щепановская

назад по времени вдоль траектории движения частицы. В итоге из четырёх уравнений системы Навье-Стокса на каждом шаге по времени получается система стационарных уравнений, не содержащих производных по времени.

Кроме того, для обеспечения устойчивости и сходимости приближенных решений метода конечных элементов в норме пространства $L_2(\Omega)$ мы производим следующую замену искомых переменных

$$\sigma = \rho^{1/2}, \quad \varepsilon = e^{1/2}.$$

С учетом положительности плотности ρ и энергии e эта замена не производит комплексных чисел.



М.В. Якубович

Итак, мы начинаем описание дискретизации уравнений Навье-Стокса по пространству с момента, когда дискретизация по времени на временном слое t_{k+1} уже проведена и полученные уравнения представляют собой систему эллиптических уравнений второго порядка для двух компонент скорости $\mathbf{v} = (u, v)$ и «энергии» ε , а также одного уравнения первого порядка для «плотности» σ . Для них мы применим метод конечных элементов с кусочно-билинейными базисными функциями и используем для интегрирования по ячейкам простые квадратурные формулы [1, 7].

В целях упрощения изложения возьмем равномерную квадратную сетку по пространству с координатами $x_l = lh, y_m = mh, l = 0, 1, \dots, n, m = 0, 1, \dots, n$, с шагом $h = 1/n$. Множество узлов этой сетки обозначим через $\bar{\Omega}_h = \{s_{l,m} = (x_l, y_m) : l = 0, 1, \dots, n, m = 0, 1, \dots, n\}$ и введем множество внутренних узлов $S_h = \bar{\Omega}_h \cap \Omega$.

Краевые условия в задачах газовой динамики играют важную роль, поскольку единственность решений исходных дифференциальных задач определяется, в том числе, граничными и начальными условиями. Кроме того, учет граничных условий существенно влияет на устойчивость и экономичность алгоритмов, а также на точность решения.

При решении уравнений Навье-Стокса на входе в канал Γ_3 обычно задаются условия невозмущенного потока:

$$\mathbf{v}|_{\Gamma_3} = \mathbf{v}_{in}, \quad e|_{\Gamma_3} = e_{in}.$$

А на твердых границах канала Γ_2 и Γ_4 задается условие прилипания

$$\mathbf{v}|_{\Gamma_s} = 0, \quad s = 2, 4,$$

а также условие тепловой изоляции, то есть равенство нулю производной от внутренней энергии по нормали к твердой стенке

$$\left. \frac{\partial e}{\partial n} \right|_{\Gamma_s} = 0, \quad s = 2, 4.$$

На выходной границе Γ_1 предположим отсутствие возвратных течений. Тогда для уравнения плотности на этом участке не требуется краевых условий, но необходимо задать краевые условия для компонент скорости и внутренней энергии. Зачастую на практике применяются приближенные так называемые «мягкие» условия вида

$$\frac{\partial^s f}{\partial x^s} = 0, \quad \frac{\partial^s W}{\partial x^s} = 0 \quad (s = 1, 2, 3),$$

предполагающие установление функций f или потоков W в продольном направлении x при подходе к выходной границе. Точность их использования и влияние на решение внутри области обычно исследуются численно варьированием положения входной границы и проверкой законов сохранения в расчётной области. Приведённые простейшие типы краевых условий, конечно, не описывают всего их многообразия.

Краевое условие Дирихле в методе конечных элементов может показаться экзотическим. Кажется, что для этого либо надо знать непростое поведение искомого решения на выходе из области, либо многократно увеличивать вычислительную область для достижения невозмущённого потока на выходе из неё. Между тем, с учётом полу-Лагранжевого подхода такие краевые условия уже не выглядят слишком экзотическими. В самом деле, предположим ситуацию, когда давление на выходе уже выровнялось, трение практически отсутствует, а главную роль играет лишь инерционный перенос газа и его свойств. Тогда за счет аппроксимации получающихся уравнений первого порядка [8] полу-Лагранжевым подходом на каждом слое по времени действительно получается краевое условие Дирихле.

Для узла, в котором ставится граничное условие Дирихле, значение искомой функции известно и соответствующее вариационное уравнение не возникает. Поэтому при проведении вычислений с этими условиями для каждой компоненты скорости получается $(n-1) \times (n-1)$ уравнений, а для «энергии» – $(n-1) \times (n+1)$ с учетом краевых условий Неймана, которые не устраняют необходимости построения вариационных уравнений в граничных узлах $\bar{\Omega}_h \cap \Gamma_2$ и $\bar{\Omega}_h \cap \Gamma_4$. Для примера выпишем вариационные уравнения только для внутренних узлов $(s_{l,m} \in S_h)$ вычислительной области.

Для $\sigma_{l,m}^{k+1}$ получаем схему следующего вида:

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{4h} (u_{l+1,m}^k - u_{l-1,m}^k) + \frac{1}{4h} (v_{l,m+1}^k - v_{l,m-1}^k) \right) \sigma_{l,m}^{k+1} = \frac{1}{\tau} \sigma^k (\bar{X}_l^k, \bar{Y}_m^k), \quad l, m = 1, \dots, n-1.$$

Здесь и далее координаты $(\bar{X}_l^k, \bar{Y}_m^k)$ означают точку выхода траектории частицы из плоскости $t = t_k$, приходящую в узел (x_l, y_m) на слое $t = t_{k+1}$.

Вариационные уравнения количества движения для продольной составляющей скорости u после дискретизации получаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{2}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{l-1,m}^k + \mu_{l,m}^k) \right] u_{l-1,m}^{k+1} - \left[\frac{1}{2h^2 \text{Re}} (\mu_{l,m-1}^k + \mu_{l,m}^k) \right] u_{l,m-1}^{k+1} + \\ & \left[\frac{\rho_{l,m}^{k+1}}{\tau} + \frac{2}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{l-1,m}^k + 2\mu_{l,m}^k + \mu_{l+1,m}^k) + \frac{1}{2h^2 \text{Re}} (\mu_{l,m-1}^k + 2\mu_{l,m}^k + \mu_{l,m+1}^k) \right] u_{l,m}^{k+1} - \\ & \left[\frac{1}{2h^2 \text{Re}} (\mu_{l,m}^k + \mu_{l,m+1}^k) \right] u_{l,m+1}^{k+1} - \left[\frac{2}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{l,m}^k + \mu_{l+1,m}^k) \right] u_{l+1,m}^{k+1} + \\ & \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{6} \mu_{l-1,m}^k - \frac{1}{4} \mu_{l,m-1}^k \right) \right] v_{l-1,m-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{4} \mu_{l,m+1}^k - \frac{1}{6} \mu_{l-1,m}^k \right) \right] v_{l-1,m+1}^{k+1} + \\ & \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{4} \mu_{l,m-1}^k - \frac{1}{6} \mu_{l+1,m}^k \right) \right] v_{l+1,m-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{6} \mu_{l+1,m}^k - \frac{1}{4} \mu_{l,m+1}^k \right) \right] v_{l+1,m+1}^{k+1} = \\ & \frac{\rho_{l,m}^{k+1}}{\tau} u^k (\bar{X}_l^k, \bar{Y}_m^k) - \frac{1}{2h} (P_{l+1,m}^k - P_{l-1,m}^k), \quad l, m = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Здесь μ – вязкость; P – давление.

Для компоненты скорости v после дискретизации получаются следующие алгебраические уравнения:

$$\begin{aligned}
 & - \left[\frac{1}{2h^2 \text{Re}} (\mu_{l-1,m}^k + \mu_{l,m}^k) \right] v_{l-1,m}^{k+1} - \left[\frac{2}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{l,m-1}^k + \mu_{l,m}^k) \right] v_{l,m-1}^{k+1} + \\
 & \left[\frac{\rho_{l,m}^{k+1}}{\tau} + \frac{1}{2h^2 \text{Re}} (\mu_{l-1,m}^k + 2\mu_{l,m}^k + \mu_{l+1,m}^k) + \frac{2}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{l,m-1}^k + 2\mu_{l,m}^k + \mu_{l,m+1}^k) \right] v_{l,m}^{k+1} - \\
 & \left[\frac{2}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{l,m}^k + \mu_{l,m+1}^k) \right] v_{l,m+1}^{k+1} - \left[\frac{1}{2h^2 \text{Re}} (\mu_{l,m}^k + \mu_{l+1,m}^k) \right] v_{l+1,m}^{k+1} + \\
 & \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{6} \mu_{l,m-1}^k - \frac{1}{4} \mu_{l-1,m}^k \right) \right] u_{l-1,m-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{4} \mu_{l-1,m}^k - \frac{1}{6} \mu_{l,m+1}^k \right) \right] u_{l-1,m+1}^{k+1} + \\
 & \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{4} \mu_{l+1,m}^k - \frac{1}{6} \mu_{l,m-1}^k \right) \right] u_{l+1,m-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{6} \mu_{l,m+1}^k - \frac{1}{4} \mu_{l+1,m}^k \right) \right] u_{l+1,m+1}^{k+1} = \\
 & \frac{\rho_{l,m}^{k+1}}{\tau} v^k (\bar{X}_l^k, \bar{Y}_m^k) - \frac{1}{2h} (P_{l,m+1}^k - P_{l,m-1}^k), \quad l, m = 1, \dots, n-1
 \end{aligned}$$

И, наконец, для ε во внутренних узлах получаем следующие алгебраические уравнения:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} (\varepsilon_{l,m}^k - \varepsilon_{l-1,m}^k) - \frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} (\mu_{l-1,m}^k + \mu_{l,m}^k) \right] \varepsilon_{l-1,m}^{k+1} + \\
 & \left[\frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} (\varepsilon_{l,m}^k - \varepsilon_{l,m-1}^k) - \frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} (\mu_{l,m-1}^k + \mu_{l,m}^k) \right] \varepsilon_{l,m-1}^{k+1} + \\
 & \left[\frac{\rho_{l,m}^{k+1}}{\tau} - \frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} (4\varepsilon_{l,m}^k - \varepsilon_{l+1,m}^k - \varepsilon_{l-1,m}^k - \varepsilon_{l,m+1}^k - \varepsilon_{l,m-1}^k) + \right. \\
 & \left. \frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} (4\mu_{l,m}^k + \mu_{l+1,m}^k + \mu_{l-1,m}^k + \mu_{l,m+1}^k + \mu_{l,m-1}^k) \right] \varepsilon_{l,m}^{k+1} - \\
 & \left[\frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} (\varepsilon_{l,m+1}^k - \varepsilon_{l,m}^k) + \frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} (\mu_{l,m}^k + \mu_{l,m+1}^k) \right] \varepsilon_{l,m+1}^{k+1} - \\
 & \left[\frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} (\varepsilon_{l+1,m}^k - \varepsilon_{l,m}^k) + \frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} (\mu_{l,m}^k + \mu_{l+1,m}^k) \right] \varepsilon_{l+1,m}^{k+1} = \\
 & \frac{\rho_{l,m}^{k+1}}{\tau} \varepsilon^k (\bar{X}_l^k, \bar{Y}_m^k) - \frac{1}{4h} \frac{P_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} (u_{l+1,m}^{k+1} - u_{l-1,m}^{k+1} + v_{l,m+1}^{k+1} - v_{l,m-1}^{k+1}) + \\
 & \frac{1}{6h^2 \text{Re}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} \left((u_{l+1,m}^{k+1} - u_{l,m}^{k+1})^2 + (u_{l,m}^{k+1} - u_{l-1,m}^{k+1})^2 \right) + \\
 & \frac{1}{6h^2 \text{Re}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} \left((v_{l,m+1}^{k+1} - v_{l,m}^{k+1})^2 + (v_{l,m}^{k+1} - v_{l,m-1}^{k+1})^2 \right) + \\
 & \frac{1}{8h^2 \text{Re}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} \left[(v_{l+1,m}^{k+1} - v_{l,m}^{k+1} + u_{l,m+1}^{k+1} - u_{l,m}^{k+1})^2 + (v_{l,m}^{k+1} - v_{l-1,m}^{k+1} + u_{l,m+1}^{k+1} - u_{l,m}^{k+1})^2 + \right. \\
 & \left. (v_{l+1,m}^{k+1} - v_{l,m}^{k+1} + u_{l,m}^{k+1} - u_{l,m-1}^{k+1})^2 + (v_{l,m}^{k+1} - v_{l-1,m}^{k+1} + u_{l,m}^{k+1} - u_{l,m-1}^{k+1})^2 \right] +
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{12\text{Re}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} \left[(u_{l+1,m}^{k+1} - u_{l,m}^{k+1} - v_{l,m+1}^{k+1} + v_{l,m}^{k+1})^2 + (u_{l,m}^{k+1} - u_{l-1,m}^{k+1} - v_{l,m+1}^{k+1} + v_{l,m}^{k+1})^2 + (u_{l+1,m}^{k+1} - u_{l,m}^{k+1} - v_{l,m}^{k+1} + v_{l,m-1}^{k+1})^2 + (u_{l,m}^{k+1} - u_{l-1,m}^{k+1} - v_{l,m}^{k+1} + v_{l,m-1}^{k+1})^2 \right], \quad l, m = 1, \dots, n-1.$$

Уравнения для граничных узлов на Γ_2 и Γ_4 с учетом условия Неймана имеют несколько другой вид.

Напомним, что краевые условия Неймана учитываются уже на этапе вывода слабой (интегральной) формулировки задачи, когда возникают (криволинейные) интегралы на соответствующих участках границы после интегрирования по частям некоторых слагаемых. Далее приведём вариационные алгебраические уравнения, соответствующие узлам $s_{l,m} \in \bar{\Omega}_h \cap \Gamma_1$ для компонент скорости и «энергии» после использования граничных условий $\partial \mathbf{U} / \partial n = 0$, где $\mathbf{U} = (u, v, \varepsilon)$.

Для компоненты скорости u получаем

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{2}{3h^2\text{Re}} (\mu_{n-1,m}^k + \mu_{n,m}^k) \right] u_{n-1,m}^{k+1} - \left[\frac{1}{4h^2\text{Re}} (\mu_{n,m-1}^k + \mu_{n,m}^k) \right] u_{n,m-1}^{k+1} + \\ & \left[\frac{\rho_{n,m}^{k+1}}{2\tau} + \frac{2}{3h^2\text{Re}} (\mu_{n-1,m}^k + \mu_{n,m}^k) + \frac{1}{4h^2\text{Re}} (\mu_{n,m-1}^k + 2\mu_{n,m}^k + \mu_{n,m+1}^k) \right] u_{n,m}^{k+1} - \\ & \left[\frac{1}{4h^2\text{Re}} (\mu_{n,m}^k + \mu_{n,m+1}^k) \right] u_{n,m+1}^{k+1} + \\ & \left[\frac{1}{h^2\text{Re}} \left(\frac{1}{6} \mu_{n-1,m}^k - \frac{1}{4} \mu_{n,m-1}^k \right) \right] v_{n-1,m-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{h^2\text{Re}} \left(\frac{1}{4} \mu_{n,m+1}^k - \frac{1}{6} \mu_{n-1,m}^k \right) \right] v_{n-1,m+1}^{k+1} + \\ & \left[\frac{1}{h^2\text{Re}} \left(\frac{1}{4} \mu_{n,m-1}^k - \frac{1}{6} \mu_{n,m}^k \right) \right] v_{n,m-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{h^2\text{Re}} \left(\frac{1}{6} \mu_{n,m}^k - \frac{1}{4} \mu_{n,m+1}^k \right) \right] v_{n,m+1}^{k+1} = \\ & \frac{\rho_{n,m}^{k+1}}{2\tau} u^k (\bar{X}_n^k, \bar{Y}_m^k) - \frac{1}{2h} (P_{n,m}^k - P_{n-1,m}^k), \quad m = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Для компоненты v получаем

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{1}{2h^2\text{Re}} (\mu_{n-1,m}^k + \mu_{n,m}^k) \right] v_{n-1,m}^{k+1} - \left[\frac{1}{3h^2\text{Re}} (\mu_{n,m-1}^k + \mu_{n,m}^k) \right] v_{n,m-1}^{k+1} + \\ & \left[\frac{\rho_{n,m}^{k+1}}{2\tau} + \frac{1}{2h^2\text{Re}} (\mu_{n-1,m}^k + \mu_{n,m}^k) + \frac{1}{3h^2\text{Re}} (\mu_{n,m-1}^k + 2\mu_{n,m}^k + \mu_{n,m+1}^k) \right] v_{n,m}^{k+1} - \\ & \left[\frac{1}{3h^2\text{Re}} (\mu_{n,m}^k + \mu_{n,m+1}^k) \right] v_{n,m+1}^{k+1} + \\ & \left[\frac{1}{h^2\text{Re}} \left(\frac{1}{6} \mu_{n,m-1}^k - \frac{1}{4} \mu_{n-1,m}^k \right) \right] u_{n-1,m-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{h^2\text{Re}} \left(\frac{1}{4} \mu_{n-1,m}^k - \frac{1}{6} \mu_{n,m+1}^k \right) \right] u_{n-1,m+1}^{k+1} + \\ & \left[\frac{1}{h^2\text{Re}} \left(\frac{1}{4} \mu_{n,m}^k - \frac{1}{6} \mu_{n,m-1}^k \right) \right] u_{n,m-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{h^2\text{Re}} \left(\frac{1}{6} \mu_{n,m+1}^k - \frac{1}{4} \mu_{n,m}^k \right) \right] u_{n,m+1}^{k+1} = \\ & \frac{\rho_{n,m}^{k+1}}{2\tau} v^k (\bar{X}_n^k, \bar{Y}_m^k) - \frac{1}{4h} (P_{n,m+1}^k - P_{n,m-1}^k), \quad m = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Для «энергии» получаем

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} (\varepsilon_{n,m}^k - \varepsilon_{n-1,m}^k) - \frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} (\mu_{n,m}^k + \mu_{n-1,m}^k) \right] \varepsilon_{n-1,m}^{k+1} + \\
 & \left[\frac{\gamma}{4h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} (\varepsilon_{n,m}^k - \varepsilon_{n,m-1}^k) - \frac{\gamma}{4h^2 \text{PrRe}} (\mu_{n,m-1}^k + \mu_{n,m}^k) \right] \varepsilon_{n,m-1}^{k+1} + \\
 & \left[\frac{\rho_{n,m}^{k+1}}{2\tau} - \frac{\gamma}{4h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} (4\varepsilon_{n,m}^k - 2\varepsilon_{n-1,m}^k - \varepsilon_{n,m-1}^k - \varepsilon_{n,m+1}^k) + \right. \\
 & \quad \left. \frac{\gamma}{4h^2 \text{PrRe}} (4\mu_{n,m}^k + 2\mu_{n-1,m}^k + \mu_{n,m-1}^k + \mu_{n,m+1}^k) \right] \varepsilon_{n,m}^{k+1} - \\
 & \left[\frac{\gamma}{4h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} (\varepsilon_{n,m+1}^k - \varepsilon_{n,m}^k) + \frac{\gamma}{4h^2 \text{PrRe}} (\mu_{n,m}^k + \mu_{n,m+1}^k) \right] \varepsilon_{n,m+1}^{k+1} = \\
 & \frac{\rho_{n,m}^{k+1}}{2\tau} \varepsilon^k (\bar{X}_n^k, \bar{Y}_m^k) - \frac{1}{8h} \frac{P_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} (2u_{n,m}^{k+1} - 2u_{n-1,m}^{k+1} + v_{n,m+1}^{k+1} - v_{n,m-1}^{k+1}) + \\
 & \frac{1}{6h^2 \text{Re}} \frac{\mu_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} (u_{n,m}^{k+1} - u_{n-1,m}^{k+1})^2 + \frac{1}{12h^2 \text{Re}} \frac{\mu_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} \left[(v_{n,m+1}^{k+1} - v_{n,m}^{k+1})^2 + (v_{n,m}^{k+1} - v_{n,m-1}^{k+1})^2 \right] + \\
 & \frac{1}{8h^2 \text{Re}} \frac{\mu_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} \left[(v_{n,m}^{k+1} - v_{n-1,m}^{k+1} + u_{n,m+1}^{k+1} - u_{n,m}^{k+1})^2 + (v_{n,m}^{k+1} - v_{n-1,m}^{k+1} + u_{n,m}^{k+1} - u_{n,m-1}^{k+1})^2 \right] + \\
 & \frac{1}{12h^2 \text{Re}} \frac{\mu_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} \left[(u_{n,m}^{k+1} - u_{n-1,m}^{k+1} - v_{n,m+1}^{k+1} + v_{n,m}^{k+1})^2 + \right. \\
 & \quad \left. (u_{n,m}^{k+1} - u_{n-1,m}^{k+1} - v_{n,m}^{k+1} + v_{n,m-1}^{k+1})^2 \right], \quad m = 1, \dots, n-1.
 \end{aligned}$$

На использование вязкости, гладко обращающейся в нуль, повлияли два мотива. Во первых, обращение в нуль вязкости означает превращение уравнений параболического типа второго порядка в уравнения первого порядка. Одновременно со стабилизацией давления это приближает поведение среды только к инерционному переносу газа и его параметров вдоль траекторий. Во вторых, на входе в канал образуется разрыв данных на концах отрезка Γ_3 . В них не совпадают пределы скорости u : по x он равен нулю за счет прилипания, а по y - невозмущенной скорости. Условие с исчезающей вязкостью на входе примиряет между собой тип уравнений и краевых условий.

Например, исчезающая вязкость на выходе из канала реализуется путем подстановки вместо динамической вязкости в уравнения количества движения и внутренней энергии функции следующего вида:

$$\mu(t, x, y) = \begin{cases} \left(\gamma(\gamma-1)M^2\varepsilon^2 \right)^\omega, & x \in [0, 1-b], \\ \left(\gamma(\gamma-1)M^2\varepsilon^2 \right)^\omega \times (1-x-2b+c)(x-1+c) / (b-c)^2, & x \in (1-b, 1-c], \\ 0, & x \in (1-c, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

Согласно (1) динамическая вязкость на отрезке $x \in [0, 1-b]$ равна своему расчетному значению, на отрезке $x \in (1-b, 1-c)$ убывает от расчетного значения до нуля и равна нулю на $x \in (1-c, 1]$. В результате такого приёма в области $x \in (1-c, 1]$ уравнение

неразрывности сохраняет прежний вид, уравнение скорости принимает форму уравнения Эйлера, а уравнение для внутренней энергии принимает упрощённый вид с учетом обращения в нуль теплового потока и диссипативной функции.

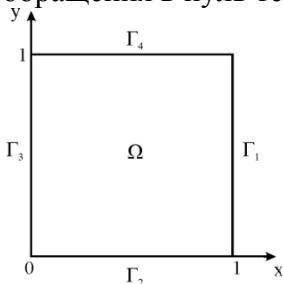


Рис. 1. Вычислительная область

Расчёты выполнялись на равномерных квадратных сетках, содержащих $[101 \times 101]$ и $[201 \times 201]$ узлов ($n = 100, 200$). Шаг по пространству соответственно равнялся $h = 0.01$ и $h = 0.005$.

Вычислительный эксперимент проводился для трех вариантов условий на границе расчётной области:

- а) условия Дирихле для всех искомых функций на границе Γ ;
- б) условия Дирихле и Неймана в следующем виде:

$$\sigma|_{\Gamma_{true}} = \sigma_{true}(t, x, y), \quad u|_{\Gamma_{true}} = u_{true}(t, x, y), \quad v|_{\Gamma_{true}} = v_{true}(t, x, y)$$

$$\varepsilon|_{\Gamma_3} = \varepsilon_{true}(t, x, y), \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial n}|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n}|_{\Gamma_4} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n}|_{\Gamma_1} = 0.$$

где $\Gamma_{true} = \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, а индекс *true* у функции означает, что она задана;

- в) условия Дирихле и Неймана из варианта б) с использованием «исчезающей вязкости» на Γ_1 .

При реализации тестовых вычислений искомые функции $\sigma, u, v, \varepsilon$ имели следующий аналитический вид:

$$\begin{aligned} \sigma(t, x, y) &= (2 - x^2)y(1 - y)\arctg(t) + 1, \quad u(t, x, y) = (2.8 - x^2)y(1 - y)\arctg(t), \\ v(t, x, y) &= 0.1(2 - x^2)y(1 - y)\arctg(t), \quad \varepsilon(t, x, y) = (1 - x^2)y(1 - y)\arctg(t) + 0.67. \end{aligned} \quad (2)$$

После подстановки тестовых функций (2) в исходные уравнения получаются правые части, которые учитываются при численном решении уравнений Навье-Стокса. На рис. 2 представлен график функции u в момент времени $t = 50$. Расчёты проводились на сетках с шагом $h = 0.01, 0.005$ ($n = 100, 200$) и шагом по времени $\tau = 0.0005$. На рис. 3 – 6 представлены графики поведения сеточных аналогов норм погрешностей для u и ε при постановке различных вариантов граничных условий для чисел Маха $M = 2, 4$ и чисел Рейнольдса $Re = 2 \times 10^3, 10^4$. Кривые 1, 2 соответствуют расчетам с условиями Дирихле на границе области для всех искомых функций. Кривые 3, 4 соответствуют вычислениям по варианту б). Кривые под номерами 5, 6 соответствуют расчетам для варианта в) с параметрами $b = 0.2, c = 0.1$, кривые 7, 8 – с параметрами $b = 0.1, c = 0.05$. График с «исчезающей вязкостью» ($b = 0.2, c = 0.1$) в момент времени $t = 50$ представлен на рис. 7.

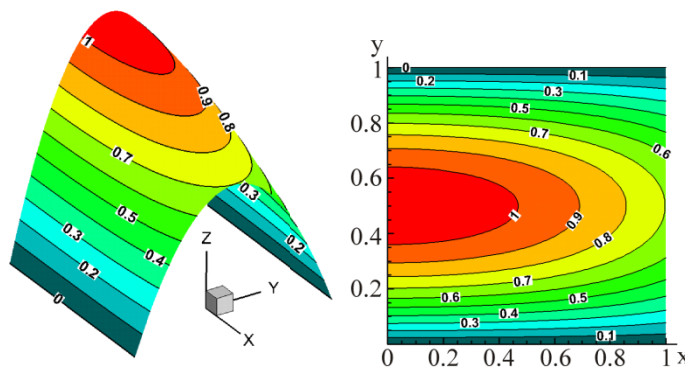


Рис. 2. График функции u при $t = 50$

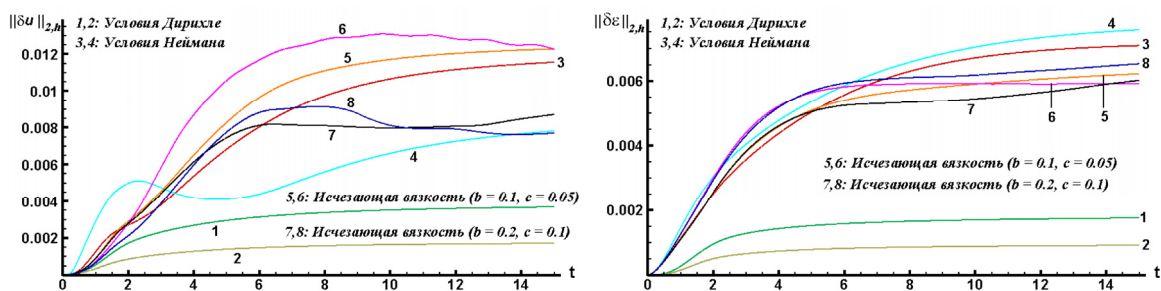


Рис. 3. $M = 2$ $Re = 2 \times 10^3$

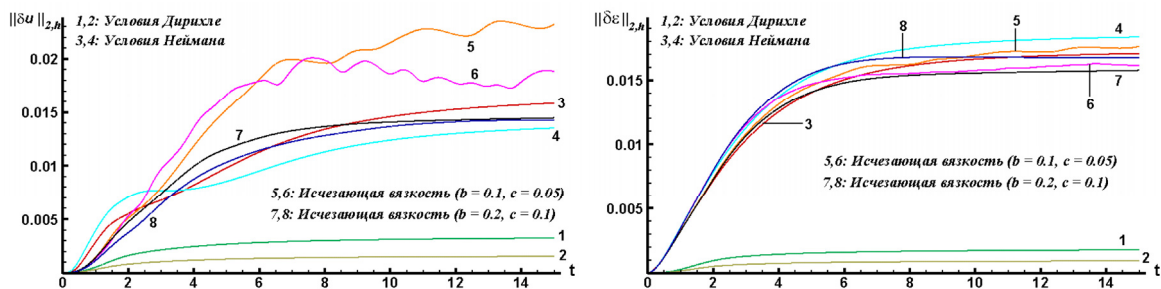


Рис. 4. $M = 4$ $Re = 2 \times 10^3$

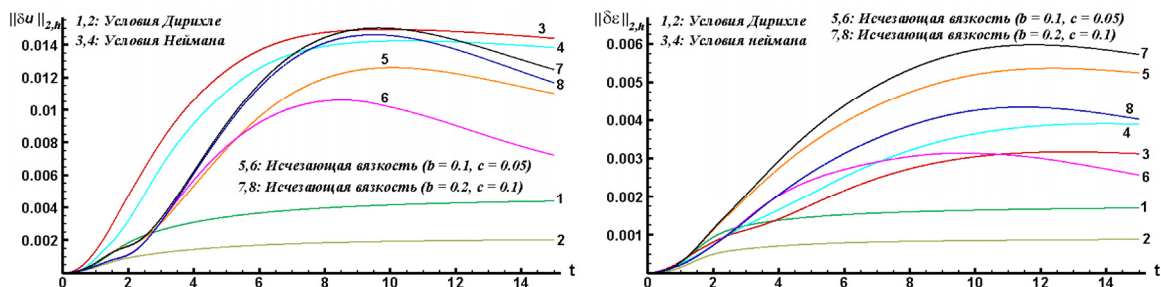


Рис. 5. $M = 2$ $Re = 10^4$

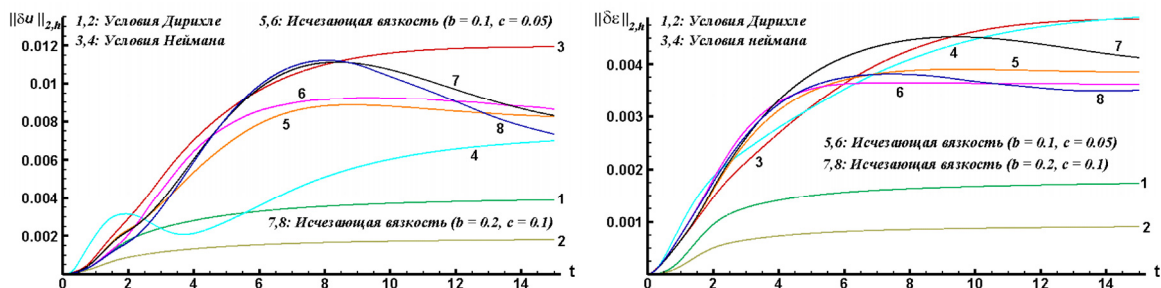


Рис. 6. $M = 4$ $Re = 10^4$

По рисункам можно сделать вывод, что уменьшение вязкости около выходной границы в некоторых случаях обеспечивает уменьшение погрешности вычислений по сравнению с условиями Неймана для определенных чисел Маха и Рейнольдса. Отчетливо это проявляется при $Re = 10^4$.

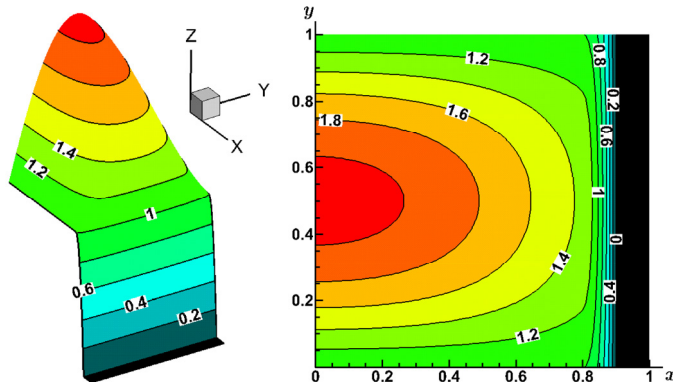


Рис. 7. Распределение динамического коэффициента вязкости μ при $t = 50$ с параметрами $b = 0.2, c = 0.1$

Литература

1. *Rannacher R.* Methods for Numerical Flow Simulation. Institute of Applied Mathematics, University of Heidelberg, Germany, 2007. P. 1-58.
2. *Shaidurov V.V., Shchepanovskaya G.I., Yakubovich M.V.* Numerical modelling of supersonic flows in channel // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. V. 27. N 6. P. 501-516.
3. *Priestley A.* A quasi-conservative version of the semi-Lagrangian advection scheme // Mon. Weather Rev. 1993. V. 121. P. 621-629.
4. *Scroggs J.S. and Semazzi F.H.M.* A conservative semi-Lagrangian method for multidimensional fluid dynamics applications // Numer. Meth. Part. Diff. Eq. 1995. V. 11. P. 445-452.
5. *Phillips T.N. and Williams A.J.* Conservative semi-Lagrangian finite volume schemes // Numer. Meth. Part. Diff. Eq. 2001. V. 17. P. 403-425.
6. *Iske A.* Conservative semi-Lagrangian advection on adaptive unstructured meshes // Numer. Meth. Part. Diff. Eq. 2004. V. 20. P. 388-411.
7. *Щепановская Г.И.* Математическое и численное моделирование течений вязкого теплопроводного газа // Вестник СибГАУ. 2011. Т. 5. № 38. С. 101-106.
8. *Shaidurov V., Liu T., Zheng Z.* Four-stage Computational Technology with Adaptive Numerical Methods for Computational Aerodynamics // Conf. Proc. of American Institute of Physics. 2012. V. 1487. P. 42-48.

Boundary condition in the finite element method For navier-stokes equations

*Vladimir Viktorovich Shaidurov, Phys.&Math.Dr., Corr. memb. of RAS, Director of ICM SB RAS
Institute of Computational Modeling of SB RAS*

*Galina Ivanovna Shchepanovskaya, Phys.& Math.Cand., senior research scientist
Institute of Computational Modeling of SB RAS*

*Maxim Viktorovich Yakubovich, junior research scientist
Institute of Computational Modeling of SB RAS*

In this paper, algorithms are discussed for numerical solution of the two-dimensional Navier-Stokes equations of viscous heat-conductive gas. Discretization of equations in time is realized by semi-Lagrangian method which often is called as the generalized method of characteristics or trajectories. And discretization in space is fulfilled by the finite element method. Particular attention is paid to the possible form of the boundary conditions for the closure of the computational domain and their implications for the numerical simulation in a test problem of gas flow in the channel as an example.

Keywords: Navier-Stokes equations, viscous heat-conductive gas, semi-Lagrangian approximation, finite element method.

УДК 681.31

О ЗАДАЧАХ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Татьяна Александровна Янковская, канд. физ. - мат. наук, доцент
Тел.: +7 913 1952303, e-mail: tajanko@mail.ru
Сибирский федеральный университет
<http://www.sfu-kras.ru/>*

В статье рассматривается постановка и формализация комбинаторно-оптимизационных задач. Приведена классификация задач структурного синтеза и указаны их характерные особенности.

Ключевые слова: структура системы, синтез, оптимизация, методы, математическое моделирование задач.